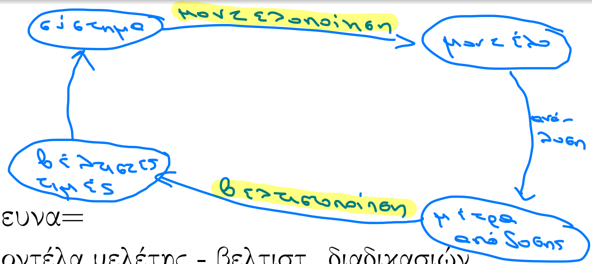
Επιχειρησιακή Έρευνα

Αθανασία Μάνου

Διαπανεπιστημιακό Διατμηματικό
Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών
Μαθηματικά της Αγοράς και της Παραγωγής (ΜΑΠ)

Επιχειρησιακή Έρευνα



- Επιχειρησιακή Έρευνα=
  - Μαθηματικά μοντέλα μελέτης - βελτιστ. διαδικασιών,
  - Μαθηματικές μέθοδοι βέλτιστης λήψης αποφάσεων.

Κλάδοι της Επιχειρησιακής Έρευνας

Βελτιστο-ποίηση

- Γραμμικός Προγραμματισμός.
- Μη-Γραμμικός Προγραμματισμός.
- Ακέραιος Προγραμματισμός - Συνδυαστική Βελτιστοποίηση.
- Δυναμικός Προγραμματισμός.

Ανταγωνι-σμός

- Θεωρία Παιγνίων.

Ανάλυση

- Θεωρία Ελέγχου Αποθεμάτων.
- Θεωρία Ουρών Αναμονής.
- ...

Περιεχόμενα του μαθήματος

Ενότητα 1

- Κατηγορίες προβλημάτων βελτιστοποίησης.
- Μοντελοποίηση προβλημάτων βελτιστοποίησης.
- Κλασικά προβλήματα βελτιστοποίησης.

Ενότητα 2

- Επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης στον ΗΥ.

Ενότητες 3 και 4

- Συνοπτική θεωρία Γραμμικού Προγραμματισμού.

Ενότητα 5

- Συνοπτική θεωρία Μη-Γραμμικού Προγραμματισμού.

Ενότητα 6

- Εισαγωγή στον Δυναμικό Προγραμματισμό.
- Επίλυση προβλημάτων Δυναμικού Προγραμματισμού.

Βασικές πηγές του μαθήματος

- Vanderbei, R.J. (2014) Linear Programming: Foundations and Extensions, 4th Edition. Springer.
- Hillier, F.S. and Lieberman, G.J. (2015) Introduction to Operations Research, 10th Edition. McGraw Hill.
- Fourer, R., Gay, D.M. and Kernighan, B.W. (2003) AMPL: A Modeling Language for Mathematical Programming, 2nd Edition. Duxbury Thomson.
- Taha, H.A. (2017) Operations Research: An Introduction, 10th Edition. Pearson.

Ενότητα 1:
Εισαγωγή

Γενικό πρόβλημα μαθηματικού προγραμματισμού

- x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$: μεταβλητές απόφασης.
- ζ: η αντικειμενική συνάρτηση.
- Αντικειμενική συνάρτηση:

$$\zeta = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

- Τυπικός γραμμικός περιορισμός:

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq \text{ ή } = \text{ ή } \geq b.$$

- Τυπικός περιορισμός μεταβλητών:

$$x_j \in A_j.$$

Παράδειγμα π.μ.π.

- Μία εταιρεία παράγει 2 προϊόντα: P_1 και P_2.
- Η εταιρεία έχει τη δυνατότητα να φτιάξει μέχρι 250 κιλά από το P_1 και μέχρι 320 κιλά από το P_2.
- Για την παραγωγή αυτών των προϊόντων απαιτείται μια πρώτη ύλη. Συγκεκριμένα, για την παραγωγή ενός κιλού προϊόντος P_1 χρειάζονται 0.7 κιλά πρώτης ύλης, ενώ για την παραγωγή ενός κιλού προϊόντος P_2 χρειάζονται 0.4 κιλά πρώτης ύλης.
- Η διαθέσιμη ποσότητα πρώτης ύλης είναι 200 κιλά.
- Η εταιρεία γνωρίζει ότι αν φτιάξει x_1 κιλά από το P_1, θα έχει κέρδος $x_1(300 - x_1)$ Ευρώ από την πώληση όλης αυτής της ποσότητας. Επίσης, αν φτιάξει x_2 κιλά από το P_2, θα έχει κέρδος $x_2(1000 - 3x_2)$ Ευρώ από την πώληση όλης αυτής της ποσότητας.
- Η εταιρεία θέλει να βρει τις ποσότητες (σε κιλά) που πρέπει να παραχθούν από κάθε προϊόν ώστε να μεγιστοποιηθεί το κέρδος.

Μεταβλητές απόφασης

x_1: ποσότητα σε kg από το P_1 που θα παραχθεί

x_2: " " " " P_2 "

$$\max \quad \underbrace{x_1(300 - x_1) + x_2(1000 - 3x_2)}^{\text{αντικειμενική συνάρτηση}}$$

υπό

$$\left.\begin{aligned} x_1 &\le 250 \\ x_2 &\le 320 \\ 0.7 \cdot x_1 + 0.4 \cdot x_2 &\le 200 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}\right\} \text{περιορισμοί}$$

Παράδειγμα π.μ.π.

- x_1: ποσότητα προϊόντος P_1 που θα παραχθεί.
  x_2: ποσότητα προϊόντος P_2 που θα παραχθεί.
- Π.μ.π.:

$$
\begin{array}{ll}
\max & x_1(300 - x_1) + x_2(1000 - 3x_2) \\
\text{υπό} & x_1 \leq 250 \\
 & x_2 \leq 320 \\
 & 0.7x_1 + 0.4x_2 \leq 200 \\
 & x_j \geq 0, \qquad\qquad j = 1, 2.
\end{array}
$$

Γενικό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού

- x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$: μεταβλητές απόφασης.
- ζ: η αντικειμενική συνάρτηση.
- Γραμμική αντικειμενική συνάρτηση:

$$\zeta = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n.$$

- Τυπικός γραμμικός περιορισμός:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n \leq \text{ ή } = \text{ ή } \geq b.$$

- Τυπικός περιορισμός μεταβλητών:

$$x_j \geq 0 \text{ ή } \leq 0 \text{ ή } \in \mathbb{R}.$$

min $5x_1 + 8x_2 + 3x_3$

υπό $2x_1 - 1x_2 + 7x_3 \leq 5$

$x_1 + x_3 = 7$

$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 1$

$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0,$

$x_3 \geq 0$

Παράδειγμα π.γ.π.

- Ένας οργανισμός τρέφεται με 2 είδη τροφών, T_1 και T_2.
- Από αυτές τις τροφές παίρνει 3 θρεπτικά συστατικά, Θ_1, Θ_2 και Θ_3.
- Ο οργανισμός πρέπει να καταναλώνει καθημερινά τουλάχιστον 12 μονάδες από το Θ_1, τουλάχιστον 15 μονάδες από το Θ_2 και το πολύ 12 μονάδες από το Θ_3.
- Κάθε γραμμάριο της τροφής T_j περιέχει a_{ij} μονάδες του θρεπτικού συστατικού Θ_i, $j = 1, 2,\ \ i = 1, 2, 3$. Ο πίνακας δίνει τις τιμές των a_{ij}.

a_{ij}		
	T_1	T_2
Θ_1	12	6
Θ_2	3	5
Θ_3	2	3

- Κάθε γραμμάριο τροφής T_1 κοστίχει 5 Ευρώ και κάθε γραμμάριο τροφής T_2 κοστίζει 4 Ευρώ.
- Θέλουμε να βρούμε πόση ποσότητα πρέπει να φάει από κάθε τροφή ώστε να πάρει τις ποσότητες που πρέπει από κάθε θρεπτικό συστατικό και να περιορίσει το συνολικό κόστος.

x_1: ποσότητα σε gr. της T_1 που θα φάει

x_2 : » » » » T_2 » »

$$\min \quad 5x_1 + 4x_2$$

$$\text{υπό} \quad 12x_1 + 6x_2 \geq 12$$

$$3x_1 + 5x_2 \geq 15$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Παράδειγμα π.γ.π.

- x_1: ποσότητα τροφής T_1.
  x_2: ποσότητα τροφής T_2.
- Π.γ.π.:

$$\begin{array}{ll} \min & 5x_1 + 4x_2 \\ \text{υπό} & 12x_1 + 6x_2 \geq 12 \\ & 3x_1 + 5x_2 \geq 15 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & x_j \geq 0, \qquad\qquad j = 1, 2. \end{array}$$

Προϋποθέσεις γραμμικού προγραμματισμού

- **Αναλογικότητα:** Η συνεισφορά μιας μεταβλητής στην αντικειμενική και στους περιορισμούς είναι ανάλογη της τιμής της. $5x_1$ ✓ $3x_1^2$ ✗ $\frac{3}{x_1}$ ✗
- **Προσθετικότητα:** Η συνεισφορά μιας μεταβλητής στην αντικειμενική και στους περιορισμούς δεν εξαρτάται από άλλες μεταβλητές. $5x_1 \cdot x_2$ ✗ $7x_1 - 8x_2$ ✓
  Η συνολική συνεισφορά των μεταβλητών αποφάσεων ισούται με το άθροισμα των επιμέρους συνεισφορών τους.
- **Διαιρετότητα:** Κάθε μεταβλητή παίρνει πραγματικές τιμές. $x_1 \geq 0$, $x_1 \leq 0$, $x_1 \in \mathbb{R}$ ✓ $x_1 \in \{1, 2, 3\}$ ✗
- **Βεβαιότητα - Ντετερμινισμός:** Οι παράμετροι είναι απόλυτα γνωστές. Δεν υπεισέρχεται τυχαιότητα.

Κεντρική θέση του Γραμμικού Προγραμματισμού

- Πληθώρα εφαρμογών.
- Κομψή και πλήρης μαθηματική θεωρία.
- Ύπαρξη αποτελεσματικών αλγορίθμων.
- Υπόβαθρο για τον ακέραιο προγραμματισμό.
- Υπόβαθρο για το μη-γραμμικό προγραμματισμό.

Κλασικά προβλήματα

- Το πρόβλημα της μίξης των υλικών.
- Το πρόβλημα της δίαιτας.
- Το πρόβλημα της μεταφοράς.
- Προγραμματισμός παραγωγής.
- Το πρόβλημα της αποτίμησης των υλικών.

Το πρόβλημα της μίξης των υλικών

- n τύποι προϊόντων προς παραγωγή. $j = 1, 2, \ldots, n$
- m τύποι πρώτων υλών. $i = 1, \ldots, m$
- a_{ij}: ποσότητα από την πρώτη ύλη i που απαιτείται για την παραγωγή μιας μονάδας προϊόντος τύπου j.
- b_i: διαθέσιμη ποσότητα πρώτης ύλης i.
- c_j: καθαρό κέρδος από την πώληση μιας μονάδας προϊόντος τύπου j.
- Στόχος: Μεγιστοποίηση συνολικού καθαρού κέρδους από την πώληση των προϊόντων.

Μεταβλητές απόφασης:

x_j: ποσότητα προϊόντος j που θα φτιάξω, $j = 1, \dots, n$

$$\max \quad c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_n \cdot x_n$$

υπό

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1, \quad i = 1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2, \quad i = 2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m, \quad i = m$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Ισοδύναμα,

$$\max \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

υπό

$$a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \le b_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, n$$

Ισοδύναμα,

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

υπό $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1, \dots, m$

$x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$

Το πρόβλημα της μίξης - Μοντελοποίηση

- x_j: ποσότητα προϊόντος j που θα παραχθεί.
- Π.γ.π.:

$$
\begin{array}{lll}
\max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\
\text{υπό} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, & i = 1, 2, \ldots, m \\
 & x_j \geq 0, & j = 1, 2, \ldots, n.
\end{array}
$$

Το πρόβλημα της δίαιτας

- n τύποι φαγητών προς κατανάλωση. $j = 1, 2, \ldots, n$
- m είδη θρεπτικών συστατικών. $i = 1, 2, \ldots, m$
- a_{ij}: η ποσότητα θρεπτικού συστατικού i που περιέχεται σε μια μερίδα φαγητού j.
- b_i: η ελάχιστη ημερήσια ποσότητα θρεπτικού συστατικού i που επιβάλλεται να προσληφθεί.
- d_i: η μέγιστη ημερήσια ποσότητα θρεπτικού συστατικού i που επιτρέπεται να προσληφθεί.
- c_j: κόστος μιας μερίδας φαγητού j.
- Στόχος: Καθορισμός της δίαιτας ελάχιστου κόστους που σέβεται τους διατροφικούς περιορισμούς.

Μεταβλητές απόφασης:

x_j : ποσότητα από το φαγητό είδος j που θα φάω, $j=1,\dots,n$

$$\min \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

υπό

$$b_1 \le a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le d_1 \quad , \quad i=1$$

$$b_2 \le a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le d_2 \quad , \quad i=2$$

$$\vdots$$

$$b_m \le a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le d_m \quad , \quad i=m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \ge 0$$

Ισοδύναμα,

$$\min \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

υπό

$$b_i \le \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le d_i \quad , \quad i=1,\dots,m$$

$$x_j \ge 0 \quad , \quad j=1,2,\dots,n$$

Το πρόβλημα της δίαιτας - Μοντελοποίηση

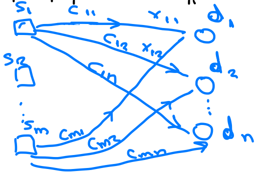
- x_j: μερίδες φαγητού j που θα αγοραστούν.
- Π.γ.π.:

$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\
\text{υπό} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, & i = 1, 2, \ldots, m \\
 & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq d_i, & i = 1, 2, \ldots, m \\
 & x_j \geq 0, & j = 1, 2, \ldots, n.
\end{array}
$$

Το πρόβλημα της μεταφοράς

$i=1,2,\ldots,m$ $j=1,\ldots,n$

- m σημεία παραγωγής, n σημεία κατανάλωσης.
- s_i: η προσφορά του σημείου i. παραγωγής
- d_j: η ζήτηση του σημείου j. κατανάλωσης
- c_{ij}: κόστος μεταφοράς μιας μονάδας προϊόντος από το i στο j.
- Στόχος: Ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους μεταφοράς από τα σημεία παραγωγής στα σημεία κατανάλωσης.



Μεταβλητές απόφασης:

x_{ij} : ποσότητα που θα μεταφερθεί από το σημείο παραγωγής i στο σημείο κατανάλωσης j ;

$i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

υπό

$$\sum_{j=1}^{n} x_{1j} \le s_1 \quad , i=1$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{2j} \le s_2 \quad , i=2$$

$$\vdots$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{mj} \le s_m \quad , i=m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i1} \ge d_1 \quad , j=1$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i2} \ge d_2 \quad , j=2$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{in} \ge d_n \quad , j=n$$

$$x_{ij} \ge 0 \ , \ i=1,\dots,m \ , \ j=1,2,\dots,n$$

Ισοδύναμα,

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

υπό

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le s_i \ , \ i=1,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge d_j \ , \ j=1,\dots,n$$

$$x_{ij} \ge 0 \ , \ i=1,\dots,m \ , \ j=1,\dots,n$$

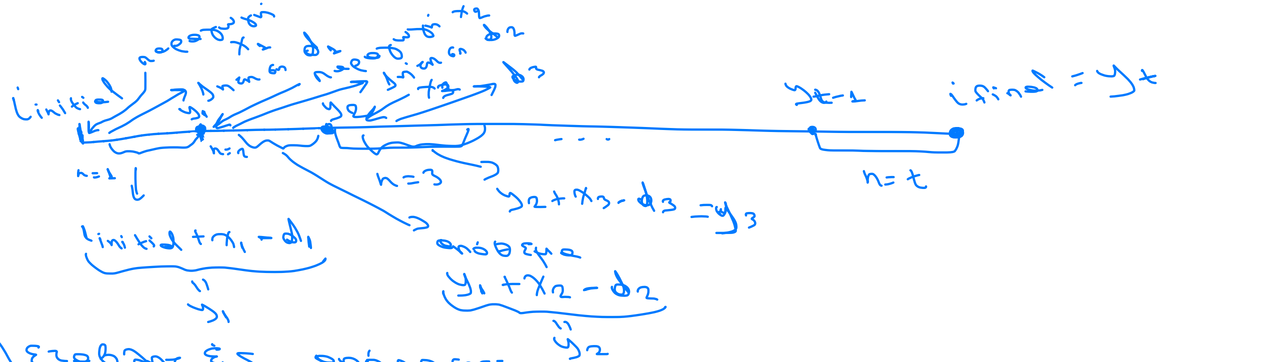
Το πρόβλημα της μεταφοράς - Μοντελοποίηση

- x_{ij}: ποσότητα προς μεταφορά από το i στο j.
- Π.γ.π.:

$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} & \\
\text{υπό} & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq d_j, & j = 1, 2, \ldots, n \\
 & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq s_i, & i = 1, 2, \ldots, m \\
 & x_{ij} \geq 0, & i = 1, 2, \ldots, m, \;\; j = 1, 2, \ldots, n.
\end{array}
$$

Προγραμματισμός παραγωγής

- Εταιρεία προγραμματίζει την παραγωγή προϊόντος.
- t: Αριθμός περιόδων παραγωγής.
- $i_{initial}$: Αρχικό απόθεμα προϊόντος.
- Στην αρχή κάθε περιόδου, η εταιρεία παράγει νέα προϊόντα και αμέσως μετά ικανοποιεί την τρέχουσα ζήτηση.
- d_n: Ζήτηση προϊόντος την περίοδο n, $n = 1, 2, \ldots, t$.
- i_{final}: Τελικό απαιτητό απόθεμα προϊόντος.
- c_n: Κόστος παραγωγής ανά μονάδα προϊόντος την περίοδο n, $n = 1, 2, \ldots, t$.
- h_n: Κόστος αποθήκευσης υπερβάλλοντος προϊόντος ανά μονάδα προϊόντος την περίοδο n, $n = 1, 2, \ldots, t$.
- Η ζήτηση κάθε περιόδου πρέπει να ικανοποιείται άμεσα (no backlogging).
- Στόχος: Ελαχιστοποίηση κόστους παραγ./αποθήκευσης.



Μεταβλητές απόφασης:

x_n: ποσότητα που θα παραχθεί την περίοδο n

$n = 1, \dots, t$

y_n: απόθεμα την περίοδο n, $n = 1, \dots, t$

$$\min \quad c_1 \cdot x_1 + h_1 y_1 + c_2 x_2 + h_2 \cdot y_2 + \dots + c_t x_t + h_t \cdot y_t$$

υπό

$$y_1 = i_{initial} + x_1 - d_1$$

$$y_n = y_{n-1} + x_n - d_n, \quad n = 2, \dots, t-1$$

$$i_{final} = y_{t-1} + x_t - d_t$$

$$y_n = y_{n-1} + x_n - d_n, \quad n = 2, \dots, t$$

$$i_{final} = y_t$$

$$x_n \geq 0, \quad n = 1, 2, \dots, t$$

$$y_n \geq 0, \quad n = 1, 2, \dots, t-1$$

$$i_{final} = y_t = y_{t-1} + x_t - d_t$$

Προγραμματισμός παραγωγής - Μοντελοποίηση

- x_n: ποσότητα παραγωγής προϊόντος την περίοδο n, $n = 1, 2, \ldots, t$.
- y_n: απόθεμα προϊόντος την περίοδο n, $n = 1, 2, \ldots, t$ (αμέσως μετά την ικανοποίηση της ζήτησης).
- Π.γ.π.:

$$
\begin{array}{ll}
\min & \sum_{n=1}^{t}(c_n x_n + h_n y_n) \\
\text{υπό} & i_{initial} + x_1 = d_1 + y_1 \\
& y_{n-1} + x_n = d_n + y_n,\ n = 2, 3, \ldots, t \\
& y_t = i_{final} \\
& x_n, y_n \geq 0,\ n = 1, 2, \ldots, t.
\end{array}
$$