ΜΑΘΗΜΑ 11
22/12/2023

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να λυθεί το πρόβλημα ελέγχου αποθεμάτων.

$N=4$
$d_t = 3$, $t=1,2,3,4$
$h_t = 1$, $t=1,2,3,4$
$M=3$
$m=4$

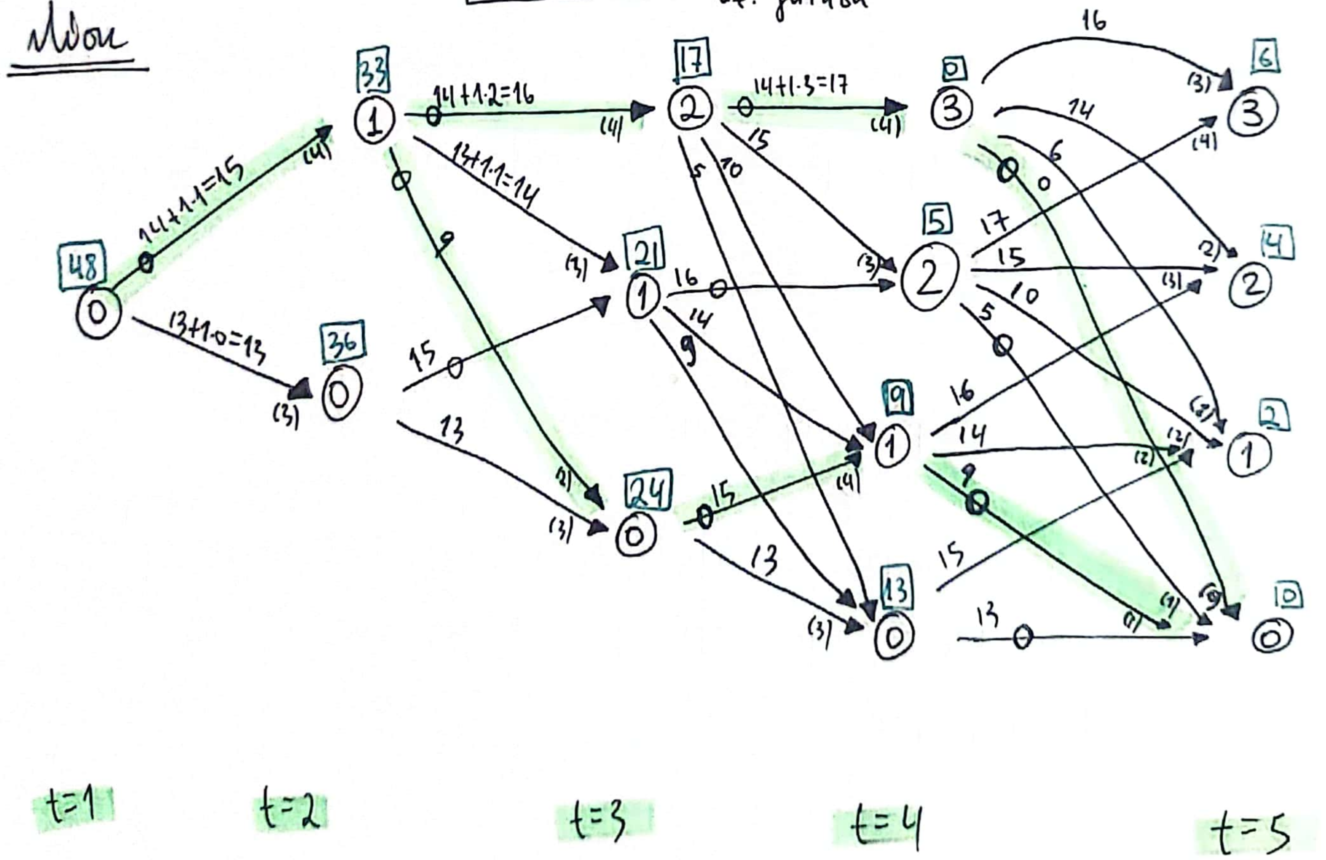
| $a_t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $K_t(a_t)$ | 0 | 5 | 9 | 13 | 14 |

$t=1,2,3,4$

$x_1=0$
Για κάθε μονάδα προϊόντος που μένει στην αποθήκη στο τέλος του χρονικού ορίζοντα υπάρχει κόστος καταστροφής 2 χρηματ. μον.

$\boxed{x_t + a_t - d_t}$ $a_t$: παραγωγή, $d_t$: ζήτηση

Λύση

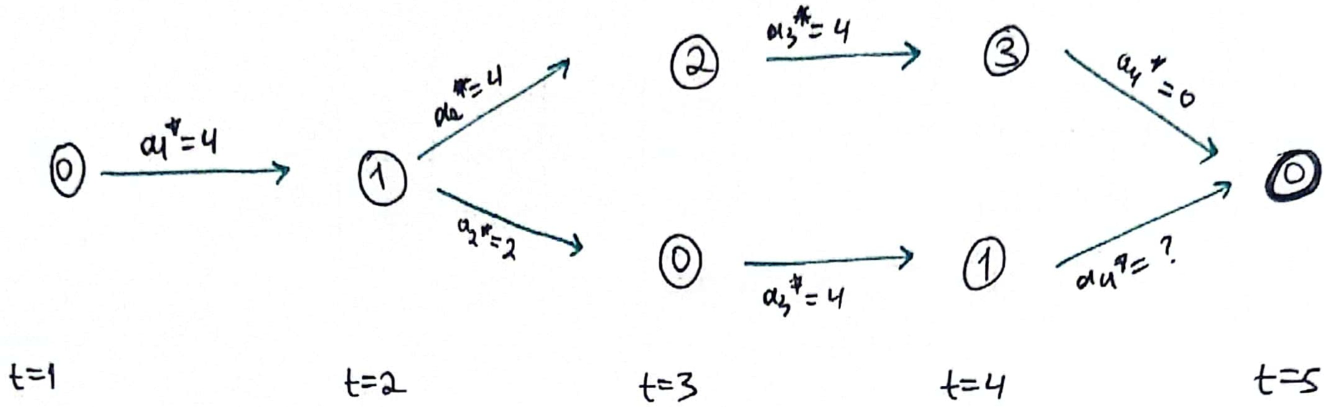



$x_1=0$ | • $a_1 \le m \Rightarrow a_1 \le 4$

• $x_1 + a_1 \geq d_1$
$\Rightarrow 0 + a_1 \geq 3$
$\Rightarrow a_1 \geq 3$

Ελάχιστο κόστος = $v(1,0)$ = 48

$t=1$     $x_t=x_1=0$




## Πρόβλημα κατανομής πόρων ή φόρτωσης φορτίου

Υπάρχουν b μονάδες κάποιου αγαθού (π.χ. κεφάλαιο χρημάτων, ώρες εργασίας, ποσότητα πρώτης ύλης) οι οποίες πρέπει να κατανεμηθούν σε N δραστηριότητες.

Έστω:

- $a_t$ = η ένταση της δραστηριότητας $t$, $t=1,2,\dots,N$
- $\Pi_t(a_t)$ = η ποσότητα του αγαθού που απαιτείται για να καλύψει τη δραστηριότητα $t$ με ένταση $a_t$, $t=1,2,\dots,N$
- $R_t(a_t)$ = απόδοση της δραστηριότητας $t$ αν αυτή γίνει με ένταση $a_t$, $t=1,\dots,N$

Να βρεθεί η κατανομή του b στις N δραστηριότητες έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί η συνολική απόδοση. Δηλ. να βρεθεί με τι ένταση θα γίνει κάθε δραστηριότητα ώστε να μεγιστοποιηθεί η συνολική απόδοση.

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Έστω ότι έχουμε φορτηγό με χωρητικότητα $b = 40m^3$ και πρέπει να το γεμίσουμε με κούτες 3 ειδών.
Θέλουμε να δούμε πόσες κούτες από κάθε είδος θα φορτώσει για να μεγιστοποιήσει τη συνολική αξία.

| Είδος (t) | Όγκος ($v_t$) | Αξία ($r(t)$) |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 4 |
| 2 | 5 | 7 |
| 3 | 8 | 10 |

Περιορισμένο αγαθό = όγκος , $b = 40m^3$

3 δραστηριότητες = είδος κούτας

$a_t$ = η ένταση δραστηρ. t = # κουτιών από το είδος t

$$\Pi_t(a_t) = V_t \cdot a_t$$

ποσότητα όγκου που θα καταναλωθεί

όγκος κούτας t

# που θα πάρω από κούτες t

$$R_t(a_t) = r_t \cdot a_t$$

αξία μιας ώρας t

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Έχω συγκεκριμένες ώρες διαβάσματος $b=12$ και θέλω να τις κατανείμω στο διάβασμα 3 μαθημάτων ώστε να μεγιστοποιήσω τον συνολικό βαθμό που θα πάρω. Ισχύει ότι:

| Μάθημα t | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 6 | 7 | 8 | 10 |
| 3 | 4 | 5 | 7 | 8 |

← ώρες διαβάσματος

Περιορισμένος πόρος = χρόνος

$b=12$

$a_t$ = ένταση δραστηριότητας t = ώρες διαβάσματος μαθήματος t

$\Pi_t(a_t) = a_t$

$R_t(a_t)$ = δίνεται από τον πίνακα

Διατύπωση σαν π.δ.π.

- Στάδια: Παίρνουμε $N$ αποφάσεις
  Στο στάδιο $t$ αποφασίζουμε την ένταση της δραστηριότητας $t$
  $t=1,\dots,N$
  $N=$ χρον. ορίζοντας

- Καταστάσεις: $x_t =$ διαθέσιμος πόρος στην αρχή του σταδίου $t$
  $x_1 = b$

- Αποφάσεις: $a_t =$ η ένταση της δραστηρ. $t$
  Πρέπει $a_t \geq 0$
  $\Pi_t(a_t) \leq x_t$
  $D_t(x_t) = \{ a_t : \Pi_t(a_t) \leq x_t \ , \ a_t \geq 0 \}$

- Δυναμική συστήματος: $x_{t+1} = g_t(x_t, a_t) \Longrightarrow$
  $x_{t+1} = x_t - \Pi_t(a_t)$

- Άμεσο κέρδος: $c_t(x_t, a_t) = R_t(a_t)$

- Τερματικό κέρδος: $\hat{c}(x_{N+1}) = 0$ (εκτός και αν λέει κάτι διαφορετικό το πρόβλημα)

- **Εξισώσεις Βελτιστοποίησης:** $v(t,x_t)$ = μέγιστο κέρδος από το στάδιο $t$ μέχρι το τέλος αν στην αρχή του σταδίου $t$ η κατάσταση είναι $x_t$

$$v(t,x_t) = \max_{a_t \in D_t(x_t)} \left\{ c_t(x_t,a_t) + v(t+1, g_t(x_t,a_t)) \right\}$$

- **Τερματικές συνθήκες:** $v(N+1, x_{N+1}) = \hat{c}(x_{N+1}) = 0$

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ένας εκδρομέας θέλει να φορτώσει το σακίδιό του με αντικείμενα 4 κατηγοριών. Ο διαθέσιμος όγκος είναι 9 μονάδες. Η θρεπτική αξία μιας μονάδας κατηγορίας $t$ είναι $w_t$ και ο όγκος είναι $v_t$.

| $t$ | $v_t$ | $w_t$ |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 7 |
| 2 | 6 | 16 |
| 3 | 7 | 19 |
| 4 | 5 | 15 |

Θέλουμε να δούμε πόσες μονάδες από κάθε κατηγορία θα μπουν στο σακίδιο ώστε να μεγιστοποιηθεί η συνολική θρεπτική αξία.

Λύση

$t = 1, 2, 3, 4, 5$ ← τερματικό στάδιο

$b = 9$

$a_t$ = # μονάδες από κατηγ. $t$ θα φορτωθούν

$\Pi_t(a_t) = v_t \cdot a_t$

$R_t(a_t) = w_t \cdot a_t$

| $t$ | $x_t$ | $a_t$ | $c_t(x_t,a_t)$ | $x_{t+1}$ | $v(t,x_t)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 9 | 0 | 0 | 9 | $0+19=19$ |
| | | 1 | $7\cdot1=7$ | $9-3\cdot1=6$ | $7+16=23^*$ |
| | | 2 | $7\cdot2=14$ | $9-3\cdot2=3$ | $14+0=14$ |
| | | 3 | $7\cdot3=21$ | 0 | $21+0=21$ |
| 2 | 9 | 0 | 0 | 9 | $0+19=19^*$ |
| | | 1 | $16\cdot1=16$ | $9-6\cdot1=3$ | $16+0=16$ |
| | 6 | 0 | 0 | 6 | $0+15=15$ |
| | | 1 | 16 | 0 | $16+0=16^*$ |
| | 3 | 0 | 0 | 3 | $0+0=0^*$ |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | $0+0=0^*$ |
| 3 | 9 | 0 | 0 | 9 | $0+15=15$ |
| | | 1 | 19 | $9-7\cdot1=2$ | $19+0=19^*$ |
| | 6 | 0 | 0 | 6 | $0+15=15^*$ |
| | 3 | 0 | 0 | 3 | $0+0=0^*$ |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | $0+0=0^*$ |
| 4 | 9 | 0 | 0 | 9 | $0+0=0$ |
| | | 1 | 15 | 4 | $15+0=15^*$ |
| | 6 | 0 | 0 | 6 | $0+0=0$ |
| | | 1 | 15 | 1 | $15+0=15^*$ |
| | 3 | 0 | 0 | 3 | $0+0=0^*$ |
| | 2 | 0 | 0 | 2 | $0+0=0^*$ |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | $0+0=0^*$ |
| 5 | 9 | | | | 0 |
| | 6 | | | | 0 |
| | 4 | | | | 0 |
| | 3 | | | | 0 |
| | 2 | | | | 0 |
| | 1 | | | | 0 |
| | 0 | | | | 0 |