$5^{η}$ ενότητα Μη-γραμμικός προγραμματισμός

5.1 Προβλήματα μη-γραμμικού προγραμματισμού χωρίς περιορισμούς

max $f(\underline{x})$ $\quad$ $(f(x_1, x_2, \dots, x_n))$

υπό

$\underline{x} \in \mathbb{R}^n$

όπου $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με συνεχείς παραγώγους $2^{ης}$ τάξης (C^2).

Π.χ. $\quad$ max $5x_1^2 - 2x_2^3 + 2x_1 \cdot x_2$

υπό

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

ΟΡΙΣΜΟΙ

- $\underline{x}^*$ ολικό μέγιστο της f, αν $f(\underline{x}^*) \geq f(\underline{x})$ $\forall$ $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$
- $\underline{x}^*$ τοπικό μέγιστο της f, αν $\exists$ $\varepsilon > 0$: $f(\underline{x}^*) \geq f(\underline{x})$ $\forall$ $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $\|x - x^*\| < \varepsilon$.

Αναγκαία συνθήκη για τοπικό μέγιστο

$$\left.\begin{array}{l} \nabla f(\underline{x}^*) = \underline{0} \\ H f(\underline{x}^*) \text{ θετικά ορισμένος} \end{array}\right\} \underline{x}^* \text{ τοπικό μέγιστο}$$

ΟΡΙΣΜΟΙ

- Ανάδελτα της f στο $\underline{x}$: $\nabla f(\underline{x}) = \left(\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_n} \right)$

- Εσσιανός πίνακας της f στο $\underline{x}$:

$$H f(\underline{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\underline{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\underline{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\underline{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\underline{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\underline{x})}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\underline{x})}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \\ \frac{\partial^2 f(\underline{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\underline{x})}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\underline{x})}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$f(x_1,x_2,x_3) = x_1 + 2x_3 + x_2 \cdot x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$

$\nabla f(x_1,x_2,x_3) = (1-2x_1,\ x_3 - 2x_2,\ 2 + x_2 - 2x_3)$

$$H f(x_1,x_2,x_3) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

ΟΡΙΣΜΟΙ

Έστω A $n \times n$ συμμετρικός πίνακας. Ο A λέγεται:

(i) θετικά ορισμένος, αν $\underline{x}' A \underline{x} > 0 \quad \forall\ \underline{x} \in \mathbb{R}^n,\ \underline{x} \neq \underline{0}$

(ii) θετικά ημιορισμένος, αν $\underline{x}' A \underline{x} \geq 0, \quad \forall\ \underline{x} \in \mathbb{R}^n$

(iii) αρνητικά ορισμένος, αν $\underline{x}' A \underline{x} < 0, \quad \forall\ \underline{x} \in \mathbb{R}^n,\ \underline{x} \neq 0$

(iv) αρνητικά ημιορισμένος, αν $\underline{x}' A \underline{x} \leq 0, \quad \forall\ \underline{x} \in \mathbb{R}^n$.

Κριτήρια

- A αρνητικά ορισμένος (ημι-ορισμένος) $\iff$ $-A$ θετικά (ημι) ορισμένος
- A θετικά ορισμένος $\iff$ οι ώριες υποορίζουσές του είναι θετικές

Παράδειγμα

ΝΔΟ $A=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}$ αρνητικά ορισμένος.

<u>Λύση</u>

Αρκεί ΝΔΟ $-A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$ θετικά ορισμένος.

$\rightarrow |2|=2>0$

$\rightarrow \begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\end{vmatrix} = 6-1=5>0$

Άρα, ο $-A$ είναι θετικά ορισμένος. Άρα, A αρνητικά ορισμένος. ■

Ικανή συνθήκη τοπικού μεγίστου

$$\left.\begin{array}{l}\nabla f(\underline{x}^*)=0\\ Hf(\underline{x}^*) \text{ αρνητικά ορισμένος}\end{array}\right\} \underline{x}^* \text{ τοπικό μέγιστο}$$

Άσκηση

Να βρεθεί τοπικό μέγιστο της $f(x_1,x_2)=-x_1^2-x_2^2+2x_1-3x_2+x_1\cdot x_2$

<u>Λύση</u>

$\nabla f(x_1,x_2)=(-2x_1+2+x_2\ ,\ -2x_2-3+x_1)$

$\nabla f(x_1,x_2)=(0,0) \iff$

$(-2x_1+2-x_2\ ,\ -2x_2-3+x_1)=(0,0) \iff$

$$\iff \begin{cases} -2x_1 + 2 + x_2 = 0 \\ -2x_2 - 3 + x_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = 2x_1 - 2 \\ -2\cdot(2x_1 - 2) - 3 + x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_2 = 2x_1 - 2 \\ -3x_1 = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = -\frac{4}{3} \\ x_1 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$

$$\rightsquigarrow \; Hf(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$Hf\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$-Hf\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right) = \begin{bmatrix} \boxed{2} & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- $|2| = 2 > 0$
- $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$

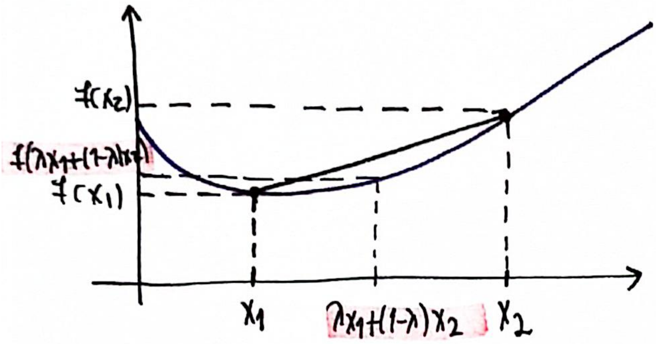
Άρα, $-Hf\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ θετικά ορισμένος.

Άρα, $Hf\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ αρνητικά ορισμένος.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Η f είναι κυρτή (κοίλη) όταν $\forall\ \underline{x_1}, \underline{x_2} \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda \in [0,1]$ ισχύει:

$$f(\lambda \underline{x_1} + (1-\lambda)\underline{x_2}) \leq \lambda \cdot f(\underline{x_1}) + (1-\lambda)\cdot f(\underline{x_2})$$
$$(\geq)$$



Θεώρημα: ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ

Έστω $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Η f είναι κυρτή (κοίλη) αν και μόνο αν $Hf(\underline{x})$ θετικά (αρνητικά) ημιορισμένος $\forall\ \underline{x} \in \mathbb{R}^n$.

Θεώρημα:

$$\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ f \text{ κοίλη} \\ \underline{x}^* \text{ τοπικό μέγιστο} \end{array}\right\} \Longrightarrow x^* \text{ ολικό μέγιστο}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Τοπικό μέγιστο $(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$. $\quad Hf(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

είχαμε δείξει ότι $Hf(x_1,x_2)$ αρνητικά ορισμένος

$\Longrightarrow Hf(x_1,x_2)$ αρνητικά ημιορισμένος $\Longrightarrow f$ κοίλη.

Άρα, (x_1^*, x_2^*) ολικό μέγιστο.

Μάθημα 8

$\boxed{5.2}$ Προβλήματα μη-γραμμικού προγραμματισμού με περιορισμούς

Επίλυση με συνθήκες Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

Έστω το π.μ.γ.π:

$$\max f(\underline{x})$$

υπό

$$g_1(\underline{x}) \leq 0$$
$$\vdots$$
$$g_p(\underline{x}) \leq 0$$

με $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κοίλη και $g_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i=1,\dots,p$ κυρτές συναρτήσεις

Αυτά λέγονται προβλήματα κυρτού προγραμματισμού τύπου 1

Π.Κ.Π.-1

Κάνουμε τα εξής:

- Για κάθε περιορισμό $(g_i(\underline{x}) \leq 0)$ θεωρώ έναν πολλαπλασιαστή $\mu_i \geq 0$.
- Φτιάχνω την συνάρτηση Lagrange:

$$L(\underline{x}) = f(\underline{x}) - \mu_1 g_1(\underline{x}) - \dots - \mu_p g_p(\underline{x})$$

$$= f(\underline{x}) - \sum_{i=1}^{p} \mu_i g_i(\underline{x})$$

Θεώρημα: Θεωρούμε το π.μ-γ.π. της μορφής ΠΚΠ-1. Έστω

$\underline{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ και $\underline{\mu}^* = (\mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_p^*)$ που

ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες:

$\mu_i^* \geq 0 \quad , i=1,2,\dots,p$ ①

$\dfrac{\partial L(\underline{x})}{\partial x_j} = 0 \quad , j=1,\dots,n$ ②

$g_i(\underline{x}^*) \leq 0 \quad , i=1,\dots,p$ ③

$\mu_i^* g_i(x^*) = 0 \quad , i=1,\dots,p$ ④

Τότε το $\underline{x}^*$ θα είναι η βέλτιστη λύση του ΠΚΠ-1.

ΑΣΚΗΣΗ

Δίνεται το π μ-γ.π. : $\max\ 3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 + 3x_2$

υπό

$5x_1 + 2x_2 - 10 \leq 0$

(i) ΝΔΟ είναι ΠΚΠ

(ii) Να λυθεί με συνθήκες ΚΚΤ

Λύση

(i) Έστω $f(x_1,x_2) = 3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 + 3x_2$

$g_1(x_1,x_2) = 5x_1 + 2x_2 - 10$

Για να είναι ΠΚΠ πρέπει η $f(x_1,x_2)$ να είναι κοίλη και η $g_1(x_1,x_2)$ να είναι κυρτή.

- Η $g_1(x_1,x_2)$ είναι κυρτή ως γραμμική.
- Για την f αρκεί ΝΔΟ ο $H_f(x_1,x_2)$ είναι αρνητικά (ημι) ορισμένος.

$$\nabla f(x_1,x_2) = \left(\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} , \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} \right)$$

$$\Rightarrow \nabla f(x_1,x_2) = (-6x_1+2x_2-2, \ -4x_2+2x_1+3)$$

$$Hf(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}.$$ ΘΔΟ ο $-Hf(x_1,x_2)$ θετικά (ημι)ορισμένος:

$$-Hf(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Είναι:

$\rightarrow |6| = 6 > 0$

$\rightarrow \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 20 > 0$

Άρα, $-Hf(x_1,x_2)$ θετικά ορισμένος $\Rightarrow Hf(x_1,x_2)$ αρνητικά ορισμένος

Άρα, η $f(x_1,x_2)$ είναι γν. κοίλη $\Rightarrow$ είναι πρόβλημα κυρτού προγραμματισμού της μορφής ΠΚΠ-1.

<u>(ii)</u> Θεωρούμε τον πολλαπλασιαστή $\mu_1 \geq 0$. Η συν. Lagrange είναι: $L(x_1,x_2) = f(x_1,x_2) - \mu_1 \cdot (5x_1+2x_2-10)$

Συνθήκες ΚΚΤ:

$$\boxed{\begin{matrix} \mu_i \geq 0 & g_i(\underline{x}) \leq 0 \\ \frac{\partial L(\underline{x})}{\partial x_j} = 0 & \mu_i \cdot g_i(\underline{x}) = 0 \end{matrix}}$$

④

Συνθήκες ΚΚΤ

$\mu_1 \geq 0$ ΚΚΤ1

$$L(x_1,x_2)=3x_1^2-2x_2^2+2x_1x_2-2x_1+3x_2-\mu_1\cdot(5x_1+2x_2-10)$$

$-6x_1+2x_2-2-5\mu_1=0$ ΚΚΤ2

$-4x_2+2x_1+3-2\mu_1=0$ ΚΚΤ3

$5x_1+2x_2-10\leq 0$ ΚΚΤ4

$\mu_1\cdot(5x_1+2x_2-10)=0$ ΚΚΤ5

Διακρίνουμε περιπτώσεις: $\mu_1=0$ ή $\mu_1>0$

Περίπτωση 1: $\mu_1=0$

$$\left.\begin{matrix}\text{ΚΚΤ 2}\\ \text{ΚΚΤ 3}\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\mu_1=0} \left.\begin{matrix}-6x_1+2x_2=2\\ 2x_1-4x_2=3\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix}x_1=-\frac{1}{10} \ (2)\\ x_2=\frac{7}{10} \ (1)\end{matrix}$$

! Ελέγχω αν επαληθεύονται όλες οι συνθήκες. !

ΚΚΤ 1 ✓

ΚΚΤ 2 ✓

ΚΚΤ 3 ✓

ΚΚΤ 4: $5\cdot\left(-\frac{1}{10}\right)+2\cdot\frac{7}{10}-10\leq 0$ ✓

ΚΚΤ 5: ✓

Άρα λύση: $(x_1^*, x_2^*)=\left(-\frac{1}{10}, \frac{7}{10}\right)$

Περίπτωση 2: $\mu_1 > 0$

$$\text{KKT } 5 \xRightarrow{\mu_1>0} 5x_1 + 2x_2 - 10 = 0$$

$$\Rightarrow x_2 = 5 - \frac{5}{2}x_1 \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{KKT } 2 \xRightarrow{(3)} -6x_1 + 2\cdot\left(5 - \frac{5}{2}x_1\right) - 2 - 5\mu_1 = 0 \\ &\text{KKT } 3 \xRightarrow{(3)} -4\cdot\left(5 - \frac{5}{2}x_1\right) + 2x_1 + 3 - 2\mu_1 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -11x_1 - 5\mu_1 = -8 \Rightarrow \mu_1 = \frac{8}{5} - \frac{11}{5}x_1 \quad (4) \\ 12x_1 - 2\mu_1 = 17 \xRightarrow{(4)} 12x_1 - 2\cdot\left(\frac{8}{5} - \frac{11}{5}x_1\right) = 17 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{101}{82}$$

$$\xRightarrow{(4)} \mu_1 = \frac{8}{5} - \frac{11}{5}\cdot\frac{101}{82} < 0 \qquad \underline{\underline{\text{Αδύνατο}}}$$

! Όταν βρίσκουμε λύση ΣΤΑΜΑΤΑΜΕ.

Πόρισμα: Έστω π. μ-γ.π

$$\max \ f(\underline{x}) \qquad \text{ΠΚΠ}-2$$

$$\text{υπό} \quad x_j \geq 0 \quad , \ j = 1, 2, \ldots, n$$

όπου $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κοίλη.

Αν υπάρχει $\underline{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ που ικανοποιεί τις συνθήκες:

$$x_j^* \geq 0 \quad , j=1,\dots,n \qquad (1)$$

$$\frac{\partial f(\underline{x}^*)}{\partial x_j} \leq 0 \quad , j=1,2,\dots,n \qquad (2)$$

$$x_j^* \cdot \frac{\partial f(\underline{x}^*)}{\partial x_j} = 0 \quad , j=1,2,\dots,n \qquad (3)$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνεται το ακόλουθο π.μ-γ.π. :

$$\max \quad \ln(1+x_1) - x_1 - x_2$$

υπό

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(i) ΝΔΟ είναι πρόβλημα μη-γραμμικού προγραμματισμού της μορφής ΠΚΠ-2.

(ii) Να λυθεί με συνθήκες ΚΚΤ

Λύση

(i) Έστω $f(x_1,x_2) = \underline{\ln(\overbrace{1+x_1}^{\text{γραμμική}})} \overbrace{-x_1-x_2}^{\text{γραμμική}}$

σύνθεση κοίλης με γραμμική ⇒ κοίλη

Αρχικά ΝΔΟ $f(x_1,x_2)$ είναι κοίλη.

Άρα f κοίλη.

(ii) **Συνθήκες KKT**

$x_1 \geq 0$ KKT 1

$x_2 \geq 0$ KKT 2

$\frac{1}{1+x_1} \cdot 1 - 1 \leq 0$ KKT 3

$-1 \leq 0$ KKT 4

$x_1 \cdot \left(\frac{1}{1+x_1} - 1\right) = 0$ KKT 5

$x_2 \cdot (-1) = 0$ KKT 6

Παίρνουμε περιπτώσεις: $\left\{ \begin{array}{lll} x_1 = 0 & \text{ή} & x_1 > 0 \\ x_2 = 0 & \text{ή} & x_2 > 0 \end{array} \right\}$

Περίπτωση 1: $x_1 = 0$ και $x_2 = 0$

Επαληθεύονται όλες οι συνθήκες, άρα η βέλτιστη λύση $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$

Περίπτωση 2: $x_1 = 0$ και $x_2 > 0$

KKT 6 $\xRightarrow{x_2 > 0}$ $-1 = 0$ <u>ΑΔΥΝΑΤΟ</u>

Περίπτωση 3: $x_1 > 0$ και $x_2 = 0$

KKT 5 $\xRightarrow{x_1 > 0}$ $\frac{1}{1+x_1} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{1+x_1} = 1 \Rightarrow 1 + x_1 = 1$

$\Rightarrow x_1 = 0$ <u>ΑΔΥΝΑΤΟ</u>

Περίπτωση 4: $x_1 > 0$ και $x_2 > 0$

KKT 5 $\xRightarrow{x_1 > 0}$ $\frac{1}{1+x_1} - 1 = 0$

KKT 6 $\xRightarrow{x_2 > 0}$ $-1 = 0$ <u>ΑΔΥΝΑΤΟ</u>

Πόρισμα: Έστω το π. μ-γ.π. της μορφής

$\max f(\underline{x})$

υπό

$g_1(\underline{x}) \le 0$

$g_2(\underline{x}) \le 0$ ΠΚΠ-3

$\vdots$

$g_p(\underline{x}) \le 0$

$x_j \geq 0, \ j=1,\dots,n$

όπου $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κοίλη και $g_i(\underline{x}): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κυρτές συναρτήσεις.

Θεωρούμε πολλαπλασιαστές $\mu_i \geq 0$, $i=1,2,\dots,p$

και τη συνάρτηση Lagrange: $L(\underline{x}) = f(\underline{x}) - \sum_{i=1}^{p} \mu_i \cdot g_i(\underline{x})$.

Αν υπάρχει $\underline{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ και $\underline{\mu}^* = (\mu_1^*, \dots, \mu^*)$ τα οποία

ικανοποιούν τις συνθήκες:

$\mu_i \geq 0$, $i=1,\dots,p$ ①

$\dfrac{\partial L(\underline{x}^*)}{\partial x_j} \le 0$, $j=1,\dots,n$ ②

$x_j^* \cdot \dfrac{\partial L(\underline{x}^*)}{\partial x_j} = 0$, $j=1,\dots,n$ ③

$\mu_i^* \cdot g_i(\underline{x}^*) = 0$, $i=1,2,\dots,p$ ④

$g_i(\underline{x}^*) \le 0$, $i=1,2,\dots,p$ ⑤

$x_j^* \geq 0$, $j=1,\dots,n$ ⑥ τότε $\underline{x}^*$ βέλτιστη λύση ΠΚΠ-3.

ΑΣΚΗΣΗ

Θεωρούμε το π.μ-γπ

$$\max \ \ln(1+x_1+x_2)$$

υπό

$$x_1+2x_2 \leq 5 \iff x_1+2x_2-5 \leq 0$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

(i) ΝΔΟ ΠΚΠ

(ii) Να λυθεί με συνθήκες ΚΚΤ

<u>Λύση</u>

(i) Έστω $f(x_1,x_2) = \overbrace{\ln(\underbrace{1+x_1+x_2}_{\text{γραμμική}})}^{\text{κοίλη ως σύνθεση κοίλης με γραμμική}}$

και $g(x_1,x_2) = x_1+2x_2-5$ κυρτή ως γραμμική

Πρέπει ΝΔΟ f κοίλη και g_i κυρτή.

Άρα, είναι της μορφής ΠΚΠ-3.

(ii) Έστω πολλ/στής $\mu_1 \geq 0$ και η συνάρτηση Lagrange

$$L(x_1,x_2) = \ln(1+x_1+x_2) - \mu_1(x_1+2x_2-5)$$

(10)

Συνθήκες KKT

$\mu_1 \geq 0$ KKT1

$\frac{1}{1+x_1+x_2} \cdot 1 - \mu_1 \leq 0$ KKT2

$\frac{1}{1+x_1+x_2} \cdot 1 - 2\mu_1 \leq 0$ KKT3

$x_1 \cdot \left(\frac{1}{1+x_1+x_2} - \mu_1 \right) = 0$ KKT4

$x_2 \cdot \left(\frac{1}{1+x_1+x_2} - 2\mu_1 \right) = 0$ KKT5

$\mu_1 \cdot (x_1 + 2x_2 - 5) = 0$ KKT6

$x_1 + 2x_2 - 5 \leq 0$ KKT7

$x_1 \geq 0$ KKT 8

$x_2 \geq 0$ KKT 9

Θα πάρουμε περιπτώσεις:
$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mu_1 = 0 & \text{ή} & \mu_1 > 0 \\ x_1 = 0 & \text{ή} & x_1 > 0 \\ x_2 = 0 & \text{ή} & x_2 > 0 \end{array} \right\}$$

Περίπτωση 1: $\mu_1=0$, $x_1=0$, $x_2=0$

Ελέγχω αν επαληθεύονται οι συνθήκες:

KKT 2 ✗

Περίπτωση 2: $\mu_1=0$, $x_1=0$, $x_2>0$

$$KKT5 \xRightarrow{x_2>0} \frac{1}{1+x_1+x_2} - 2\mu_1 = 0 \xRightarrow[x_1=0]{\mu_1=0} \frac{1}{1+x_2} = 0 \quad ✗$$

Περίπτωση 3: $\mu_1=0$, $x_1>0$, $x_2=0$

$$KKT4 \xRightarrow{x_1>0} \frac{1}{1+x_1+x_2} - \mu_1 = 0 \xRightarrow[x_2=0]{\mu_1=0} \frac{1}{1+x_1} = 0 \quad ✗$$

Περίπτωση 4: $\mu_1>0$, $x_1>0$, $x_2=0$

$$KKT6 \xRightarrow{\mu_1>0} x_1+2x_2-5=0 \xRightarrow{x_2=0} x_1=5$$

$$KKT4 \xRightarrow{x_1>0} \frac{1}{1+x_1+x_2} - \mu_1 = 0 \xRightarrow[x_1=5]{x_2=0} \mu_1 = \frac{1}{6}$$

Ελέγχω όλες τις συνθήκες. Ισχύουν όλες. Η βέλτιστη λύση είναι $(x_1^*, x_2^*) = (5, 0)$.