Ασκηση 1

Θέτω $x_2 = x_2' - x_2''$ με $x_2', x_2'' \geq 0$

$x_3 = -x_3'$ με $x_3' \geq 0$

Οπότε έχουμε

$$\min \quad 3x_1 - 5x_2' + 5x_2'' - 3x_3'$$

υπό

$$\begin{aligned}
3x_1 - x_2' + x_2'' + 2x_3' &\leq 7 \\
-2x_1 - 4x_2' + 4x_2'' - 4x_3' &\geq 3 \\
x_1 \qquad\qquad + 2x_3' &= 4 \\
-2x_1 + 2x_2' - 2x_2'' - x_3' &\leq 8 \\
-2x_1 + 2x_2' - 2x_2'' - x_3' &\geq -8 \\
x_1, x_2', x_2'', x_3' &\geq 0
\end{aligned}$$

και ισοδύναμα

$$-\max \quad -3x_1 + 5x_2' - 5x_2'' + 3x_3'$$

υπό

$$\begin{aligned}
3x_1 - x_2' + x_2'' + 2x_3' &\leq 7 \\
2x_1 + 4x_2' - 4x_2'' + 4x_3' &\leq -3 \\
x_1 \qquad\qquad + 2x_3' &\leq 4 \\
-x_1 \qquad\qquad - 2x_3' &\leq -4 \\
-2x_1 + 2x_2' - 2x_2'' - x_3' &\leq 8 \\
+2x_1 - 2x_2' + 2x_2'' + x_3' &\leq +8 \\
x_1, x_2', x_2'', x_3' &\geq 0
\end{aligned}$$

Ασκηση 2 -

Αρχικό λεξικό

$$\begin{aligned}
\zeta &= 0 + 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
\hline
w_1 &= 5 \boxed{-2}x_1 - 3x_2 - x_3 \\
w_2 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\
w_3 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3
\end{aligned}$$

Λυση $(0,0,0,5,11,8)$ με $\zeta = 0$. Οχι βελτιστη

Η x_1 μπαινει στη βάση $(5>0)$

Η w_1 βγαινει απο τη βάση $(\min\{\frac{5}{2}, \frac{11}{4}, \frac{8}{3}\})$

Νεο λεξικό

$$\begin{aligned}
\zeta &= \frac{25}{2} - \frac{5}{2}w_1 - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\
\hline
x_1 &= \frac{5}{2} - \frac{1}{2}w_1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\
w_2 &= 1 + 2w_1 + 5x_2 + 0x_3 \\
w_3 &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}w_1 + \frac{1}{2}x_2 \boxed{-\frac{1}{2}}x_3
\end{aligned}$$

Λυση $(\frac{5}{2}, 0, 0, 0, 1, \frac{1}{2})$ με $\zeta = \frac{25}{2}$. Οχι βελτιστη

Η x_3 μπαινει στη βαση $(\frac{1}{2} > 0)$

Η w_3 βγαινει απο τη βαση $(\min\{\frac{5/2}{1/2}, \frac{1/2}{1/2}\})$

Νεο λεξικό

$$\begin{aligned}
\zeta &= 13 - w_1 - 3x_2 - w_3 \\
\hline
x_1 &= 2 - 2w_1 - 2x_2 + w_3 \\
w_2 &= 1 + 2w_1 + 5x_2 \\
x_3 &= 1 + 3w_1 + x_2 - 2w_3
\end{aligned}$$

Λυση $(2,0,1,0,1,0)$ βελτιστη με $\zeta = 13$

Άσκηση 3

Να λυθεί το πγπ

$$\max \quad 2x_1 + x_2$$

υπό

$$x_1 - 2x_2 \leq -4$$
$$x_1 + x_2 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Λύση

Το πρόβλημα είναι σε τυπική μορφή

Το αρχικό λεξικό είναι

$$\underline{J = 0 \quad + 2x_1 \quad + x_2}$$
$$w_1 = -4 \quad - x_1 \quad + 2x_2$$
$$w_2 = 3 \quad - x_1 \quad - x_2$$

Η βασική λύση είναι $(x_1, x_2, w_1, w_2) = (0, 0, -4, 3)$

Δεν έχω εφικτή λύση

Ξεκινάω με την φάση I της Simplex

Το τροποποιημένο πρόβλημα είναι

$$\max \quad -x_0$$

υπό

$$-x_0 + x_1 - 2x_2 \leq -4$$
$$-x_0 + x_1 + x_2 \leq 3$$
$$x_0, x_1, x_2 \geq 0$$

Το αρχικό λεξικό του τροποποιημένου είναι

$$\underline{J = 0 \quad \boxed{-x_0}}$$
$$\boxed{w_1} = -4 + x_0 - x_1 + 2x_2$$
$$w_2 = 3 + x_0 - x_1 - x_2$$

Scanned with CamScanner

Η x_0 θα μπει στη βάση
Η w_1 (πιο αρνητική) θα βγει από τη βάση

Το νέο λεξικό είναι

$$\begin{array}{rcrrrr}
\zeta & = & -4 & -w_1 & -x_1 & +\boxed{2x_2} \\ \hline
\boxed{x_0} & = & 4 & +w_1 & +x_1 & -2x_2 \\
w_2 & = & 7 & +w_1 & & -3x_2
\end{array}$$

↳ μπς για $x_2 = 2$
↳ μπς για $x_2 = \frac{7}{3}$

Το λεξικό δεν είναι βέλτιστο
Η x_2 θα μπει στη βάση
Η x_0 θα βγει από τη βάση.

Το νέο λεξικό είναι

$$\begin{array}{rcrrrr}
\zeta & = & 0 & & & -x_0 \\ \hline
x_2 & = & 2 & +\frac{1}{2}w_1 & +\frac{1}{2}x_1 & -\frac{1}{2}x_0 \\
w_2 & = & 1 & -\frac{1}{2}w_1 & -\frac{3}{2}x_1 & +\frac{3}{2}x_0
\end{array}$$

Είναι βέλτιστο, άρα η φάση I τελείωσε
$\zeta = 0 \Rightarrow$ το αρχικό έχει εφικτή λύση

$$(x_1, x_2, w_1, w_2) = (0, 2, 0, 1)$$

Η αντικειμενική συνάρτηση του αρχικού θα γίνει

$$\zeta = 2x_1 + x_2 = 2x_1 + 2 + \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}x_1$$
$$= 2 + \frac{1}{2}w_1 + \frac{5}{2}x_1$$

Στη φάση II ξεκινάμε από το λεξικό

$$\zeta = 2 + \frac{1}{2}w_1 + \boxed{\frac{5}{2}}x_1$$

$$x_2 = 2 + \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}x_1$$

$$\boxed{w_2} = 1 - \frac{1}{2}w_1 - \frac{3}{2}x_1$$

Το λεξικό δεν είναι βέλτιστο.

Η x_1 θα μπει στη βάση.

Η w_2 θα βγει από τη βάση

Το νέο λεξικό είναι

$$\zeta = \frac{11}{3} - \frac{1}{3}w_1 - \frac{5}{3}w_2$$

$$x_2 = \frac{7}{3} + \frac{1}{3}w_1 - \frac{1}{3}w_2$$

$$x_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}w_1 - \frac{2}{3}w_2$$

Το λεξικό είναι βέλτιστο. Η βέλτιστη λύση είναι $(x_1, x_2, w_1, w_2) = (\frac{2}{3}, \frac{7}{3}, 0, 0)$ με $\zeta^* = \frac{11}{3}$.

Ασκηση 4

(1) Τα δυνατά βήματα είναι

μπαινει x_2 , βγαινει x_6
» x_2 , » x_4
μπαινει x_5 , βγαινει x_4
μπαινει x_5 , βγαινει x_1

(2) ▪ κανόνας μέγιστου συντελεστη:

Η x_5 έχει μέγιστο συντελεστή στην αντικ. συνάρτηση
Αρα μπαινει x_5 , βγαινει x_4
ή
μπαινει x_5 , βγαινει x_1

▪ κανόνας 1ου θετικού συντελεστη.

Η 1η μεταβλητή με θετικό συντελεστή στην αντικειμενική συνάρτηση είναι η x_2.
Αρα. μπαινει x_2 , βγαινει x_6
ή
μπαινει x_2 , βγαινει x_4

▪ κανόνας μικρότερου δείκτη (Bland):

μπαινει x_2 , βγαινει x_4

▪ κανόνας μεγιστης άμεσης αύξησης.

μπαινει	βγαινει	αύξηση
x_2	x_6	$2 \cdot \frac{4}{2} = 4$
x_2	x_4	$2 \cdot \frac{2}{1} = 4$
x_5	x_4	$3 \cdot \frac{2}{1} = 6$
x_5	x_1	$3 \frac{6}{3} = 6$

Αρα μπαινει x_5 , βγαινει x_4
ή
μπαινει x_5 , βγαινει x_1

Ασκηση 5

Παρατηρούμε ότι το πρόβλημα δεν είναι σε τυπική μορφή

Θέτουμε $x_3' = -x_3$ $\quad x_3' \geq 0$

Έχουμε

$$\max \ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3'$$

υπό

$$2x_1 - x_2 + 3x_3' \geq -5$$
$$-x_1 - x_2 - 5x_3' \leq 2$$
$$-x_1 + x_2 + x_3' \leq 7$$
$$x_1, x_2, x_3' \geq 0$$

Κάνουμε τον 1ο περιορισμό ανίσωση τύπου $\leq$

Έχουμε

$$\max \ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3'$$

υπό

$$-2x_1 + x_2 - 3x_3' \leq 5$$
$$-x_1 - x_2 - 5x_3' \leq 2$$
$$-x_1 + x_2 + x_3' \leq 7$$
$$x_1, x_2, x_3' \geq 0$$

Τώρα το πρόβλημα είναι σε τυπική μορφή

Αρχικό λεξικό

$$\begin{array}{l} \zeta = 0 + 3x_1 - 2x_2 + 3x_3' \\ \hline w_1 = 5 + 2x_1 - x_2 + 3x_3' \\ w_2 = 2 + x_1 + x_2 + 5x_3' \\ w_3 = 7 + x_1 - x_2 - x_3' \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές της x_1 στην αντικειμενική συνάρτηση και τους περιορισμούς είναι θετικοί. Άρα το πρόβλημα είναι μη φραγμένο.

Άσκηση 6

$$\max \quad 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4$$

$$\begin{aligned}
\text{υπο} \quad & 0.5x_1 - 5.5x_2 - 2.5x_3 + 9x_4 \le 0 \\
& 0.5x_1 - 1.5x_2 - 0.5x_3 + x_4 \le 0 \\
& x_1 \le 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0
\end{aligned}$$

Το αρχικό λεξικό είναι

$$\begin{aligned}
\zeta &= 0 + 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4 \\
\hline
w_1 &= 0 - 0{,}5x_1 + 5{,}5x_2 + 2.5x_3 - 9x_4 \\
w_2 &= 0 - 0.5x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 - x_4 \\
w_3 &= 1 - x_1
\end{aligned}$$

Η λύση δεν είναι βέλτιστη και είναι εκφυλισμένη

Εισάγουμε διαταραχές $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με

θετικοί αριθμοί
που ικανοποιούν $>> \varepsilon_1 >> \varepsilon_2 > 0$

$$\begin{aligned}
\zeta &= 0 \qquad\qquad\quad + 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4 \\
\hline
w_1 &= 0 + \varepsilon_1 \qquad - 0{,}5x_1 + 5{,}5x_2 + 2{,}5x_3 - 9x_4 \\
w_2 &= 0 \qquad + \varepsilon_2 - 0.5x_1 + 1{,}5x_2 + 0{,}5x_3 - x_4 \\
w_3 &= 1 \qquad\qquad - x_1
\end{aligned}$$

Η x_1 μπαίνει στη βάση $(10 > 0)$

Η w_2 βγαίνει από τη βάση $\left(\min\left\{\frac{\varepsilon_1}{0.5}, \frac{\varepsilon_2}{0.5}, 1\right\} = \frac{\varepsilon_2}{0.5}\right)$

Το επόμενο λεξικό είναι

Scanned with CamScanner

$$J = 0 \quad +20\varepsilon_2 \quad -90w_2 \quad -17x_2 + x_3 \quad -44x_4$$

$$w_1 = 0 + \varepsilon_1 \quad -\varepsilon_2 \quad +w_2 \quad +4x_2 \quad +2x_3 \quad -8x_4$$

$$x_1 = 0 \quad +2\varepsilon_2 \quad -2w_2 \quad +3x_2 \quad +x_3 \quad -2x_4$$

$$w_3 = 1 \quad -2\varepsilon_2 \quad +2w_2 \quad -3x_2 \quad -x_3 + 2x_4$$

Το λεξικό δεν είναι βέλτιστο

Η x_3 μπαίνει στη βάση $(1>0)$

Η w_3 βγαίνει από τη βάση.

Επόμενο λεξικό

$$J = 1 \quad +18\varepsilon_2 \quad -18w_2 \quad -20x_2 \quad -w_3 \quad -42x_4$$

$$w_1 = 2 + \varepsilon_1 \quad -5\varepsilon_2 \quad +5w_2 \quad -2x_2 \quad -2w_3 \quad -4x_4$$

$$x_1 = 1 \quad -w_3$$

$$x_3 = 1 \quad -2\varepsilon_2 \quad +2w_2 \quad -3x_2 \quad -w_3 \quad +2x_4$$

Η λύση είναι βέλτιστη.

βελ $(x_1, x_2, x_3, x_4, w_1, w_2, w_3) =$

$$(1, 0, 1-2\varepsilon_2, 0, 2+\varepsilon_1-5\varepsilon_2, 0, 0)$$

με $J = 1 + 18\varepsilon_2$

Θέτουμε $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$

και παίρνουμε τη λύση

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, w_1^*, w_2^*, w_3^*) = (1, 0, 1, 0, 2, 0, 0)$$

με $J^* = 1$