

Επιχειρησιακή Έρευνα

Αθανασία Μάνου

Διαπανεπιστημιακό Διατμηματικό
Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών
Μαθηματικά της Αγοράς και της Παραγωγής (ΜΑΠ)

- Επιχειρησιακή Έρευνα=
 - Μαθηματικά μοντέλα μελέτης - βελτιστ. διαδικασιών,
 - Μαθηματικές μέθοδοι βέλτιστης λήψης αποφάσεων.

Κλάδοι της Επιχειρησιακής Έρευνας

- Γραμμικός Προγραμματισμός.
- Μη-Γραμμικός Προγραμματισμός.
- Ακέραιος Προγραμματισμός - Συνδυαστική Βελτιστοποίηση.
- Δυναμικός Προγραμματισμός.
- Θεωρία Παιγνίων.
- Θεωρία Ελέγχου Αποθεμάτων.
- Θεωρία Ουρών Αναμονής.
- ...

Περιεχόμενα του μαθήματος

Ενότητα 1

- Κατηγορίες προβλημάτων βελτιστοποίησης.
- Μοντελοποίηση προβλημάτων βελτιστοποίησης.
- Κλασικά προβλήματα βελτιστοποίησης.

Ενότητα 2

- Επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης στον ΗΥ.

Ενότητες 3 και 4

- Συνοπτική θεωρία Γραμμικού Προγραμματισμού.

Ενότητα 5

- Συνοπτική θεωρία Μη-Γραμμικού Προγραμματισμού.

Ενότητα 6

- Εισαγωγή στον Δυναμικό Προγραμματισμό.
- Επίλυση προβλημάτων Δυναμικού Προγραμματισμού.

Βασικές πηγές του μαθήματος

- Vanderbei, R.J. (2014) Linear Programming: Foundations and Extensions, 4th Edition. Springer.
- Hillier, F.S. and Lieberman, G.J. (2015) Introduction to Operations Research, 10th Edition. McGraw Hill.
- Fourer, R., Gay, D.M. and Kernighan, B.W. (2003) AMPL: A Modeling Language for Mathematical Programming, 2nd Edition. Duxbury Thomson.
- Taha, H.A. (2017) Operations Research: An Introduction, 10th Edition. Pearson.

Ενότητα 1: Εισαγωγή

Γενικό πρόβλημα μαθηματικού προγραμματισμού

- $x_j, j = 1, 2, \dots, n$: μεταβλητές απόφασης.
- ζ : η αντικειμενική συνάρτηση.
- Αντικειμενική συνάρτηση:

$$\zeta = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

- Τυπικός γραμμικός περιορισμός:

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \eta \quad \text{ή} \quad \eta \geq b.$$

- Τυπικός περιορισμός μεταβλητών:

$$x_j \in A_j.$$

Παράδειγμα π.μ.π.

- Μία εταιρεία παράγει 2 προϊόντα: P_1 και P_2 .
- Η εταιρεία έχει τη δυνατότητα να φτιάξει μέχρι 250 κιλά από το P_1 και μέχρι 320 κιλά από το P_2 .
- Για την παραγωγή αυτών των προϊόντων απαιτείται μια πρώτη ύλη. Συγκεκριμένα, για την παραγωγή ενός κιλού προϊόντος P_1 χρειάζονται 0.7 κιλά πρώτης ύλης, ενώ για την παραγωγή ενός κιλού προϊόντος P_2 χρειάζονται 0.4 κιλά πρώτης ύλης.
- Η διαθέσιμη ποσότητα πρώτης ύλης είναι 200 κιλά.
- Η εταιρεία γνωρίζει ότι αν φτιάξει x_1 κιλά από το P_1 , θα έχει κέρδος $x_1(300 - x_1)$ Ευρώ από την πώληση όλης αυτής της ποσότητας. Επίσης, αν φτιάξει x_2 κιλά από το P_2 , θα έχει κέρδος $x_2(1000 - 3x_2)$ Ευρώ από την πώληση όλης αυτής της ποσότητας.
- Η εταιρεία θέλει να βρει τις ποσότητες (σε κιλά) που πρέπει να παραχθούν από κάθε προϊόν ώστε να μεγιστοποιηθεί το κέρδος.

Παράδειγμα π.μ.π.

- x_1 : ποσότητα προϊόντος P_1 που θα παραχθεί.
 x_2 : ποσότητα προϊόντος P_2 που θα παραχθεί.
- Π.μ.π.:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1(300 - x_1) + x_2(1000 - 3x_2) \\ \text{υπό} \quad & x_1 \leq 250 \\ & x_2 \leq 320 \\ & 0.7x_1 + 0.4x_2 \leq 200 \\ & x_j \geq 0, \qquad \qquad \qquad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Γενικό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού

- $x_j, j = 1, 2, \dots, n$: μεταβλητές απόφασης.
- ζ : η αντικειμενική συνάρτηση.
- Γραμμική αντικειμενική συνάρτηση:

$$\zeta = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n.$$

- Τυπικός γραμμικός περιορισμός:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq \acute{\eta} = \acute{\eta} \geq b.$$

- Τυπικός περιορισμός μεταβλητών:

$$x_j \geq 0 \acute{\eta} \leq 0 \acute{\eta} \in \mathbb{R}.$$

Παράδειγμα π.γ.π.

- Ένας οργανισμός τρέφεται με 2 είδη τροφών, T_1 και T_2 .
- Από αυτές τις τροφές παίρνει 3 θρεπτικά συστατικά, Θ_1 , Θ_2 και Θ_3 .
- Ο οργανισμός πρέπει να καταναλώνει καθημερινά τουλάχιστον 12 μονάδες από το Θ_1 , τουλάχιστον 15 μονάδες από το Θ_2 και το πολύ 12 μονάδες από το Θ_3 .
- Κάθε γραμμάριο της τροφής T_j περιέχει a_{ij} μονάδες του θρεπτικού συστατικού Θ_i , $j = 1, 2$, $i = 1, 2, 3$. Ο πίνακας δίνει τις τιμές των a_{ij} .

	a_{ij}	
	T_1	T_2
Θ_1	12	6
Θ_2	3	5
Θ_3	2	3

- Κάθε γραμμάριο τροφής T_1 κοστίζει 5 Ευρώ και κάθε γραμμάριο τροφής T_2 κοστίζει 4 Ευρώ.
- Θέλουμε να βρούμε πόση ποσότητα πρέπει να φάει από κάθε τροφή ώστε να πάρει τις ποσότητες που πρέπει από κάθε θρεπτικό συστατικό και να περιορίσει το συνολικό κόστος.

Παράδειγμα π.γ.π.

- x_1 : ποσότητα τροφής T_1 .
 x_2 : ποσότητα τροφής T_2 .
- Π.γ.π.:

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{υπό} \quad & 12x_1 + 6x_2 \geq 12 \\ & 3x_1 + 5x_2 \geq 15 \\ & 3x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Προϋποθέσεις γραμμικού προγραμματισμού

- **Αναλογικότητα:** Η συνεισφορά μιας μεταβλητής στην αντικειμενική και στους περιορισμούς είναι ανάλογη της τιμής της.
- **Προσθετικότητα:** Η συνεισφορά μιας μεταβλητής στην αντικειμενική και στους περιορισμούς δεν εξαρτάται από άλλες μεταβλητές.
Η συνολική συνεισφορά των μεταβλητών αποφάσεων ισούται με το άθροισμα των επιμέρους συνεισφορών τους.
- **Διαιρετότητα:** Κάθε μεταβλητή παίρνει πραγματικές τιμές.
- **Βεβαιότητα - Ντετερμινισμός:** Οι παράμετροι είναι απόλυτα γνωστές. Δεν υπεισέρχεται τυχαιότητα.

Κεντρική θέση του Γραμμικού Προγραμματισμού

- Πληθώρα εφαρμογών.
- Κομψή και πλήρης μαθηματική θεωρία.
- Ύπαρξη αποτελεσματικών αλγορίθμων.
- Υπόβαθρο για τον ακέραιο προγραμματισμό.
- Υπόβαθρο για το μη-γραμμικό προγραμματισμό.

Κλασικά προβλήματα

- Το πρόβλημα της μίξης των υλικών.
- Το πρόβλημα της διαίτας.
- Το πρόβλημα της μεταφοράς.
- Προγραμματισμός παραγωγής.
- Το πρόβλημα της αποτίμησης των υλικών.

Το πρόβλημα της μίξης των υλικών

- n τύποι προϊόντων προς παραγωγή.
- m τύποι πρώτων υλών.
- a_{ij} : ποσότητα από την πρώτη ύλη i που απαιτείται για την παραγωγή μιας μονάδας προϊόντος τύπου j .
- b_i : διαθέσιμη ποσότητα πρώτης ύλης i .
- c_j : καθαρό κέρδος από την πώληση μιας μονάδας προϊόντος τύπου j .
- Στόχος: Μεγιστοποίηση συνολικού καθαρού κέρδους από την πώληση των προϊόντων.

Το πρόβλημα της μίξης - Μοντελοποίηση

- x_j : ποσότητα προϊόντος j που θα παραχθεί.
- Π.γ.π.:

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{υπό} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{array}$$

Το πρόβλημα της δίαιτας

- n τύποι φαγητών προς κατανάλωση.
- m είδη θρεπτικών συστατικών.
- a_{ij} : η ποσότητα θρεπτικού συστατικού i που περιέχεται σε μια μερίδα φαγητού j .
- b_i : η ελάχιστη ημερήσια ποσότητα θρεπτικού συστατικού i που επιβάλλεται να προσληφθεί.
- d_i : η μέγιστη ημερήσια ποσότητα θρεπτικού συστατικού i που επιτρέπεται να προσληφθεί.
- c_j : κόστος μιας μερίδας φαγητού j .
- Στόχος: Καθορισμός της δίαιτας ελάχιστου κόστους που σέβεται τους διατροφικούς περιορισμούς.

Το πρόβλημα της διαίτας - Μοντελοποίηση

- x_j : μερίδες φαγητού j που θα αγοραστούν.
- Π.γ.π.:

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{υπό} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq d_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{array}$$

Το πρόβλημα της μεταφοράς

- m σημεία παραγωγής, n σημεία κατανάλωσης.
- s_i : η προσφορά του σημείου i .
- d_j : η ζήτηση του σημείου j .
- c_{ij} : κόστος μεταφοράς μιας μονάδας προϊόντος από το i στο j .
- Στόχος: Ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους μεταφοράς από τα σημεία παραγωγής στα σημεία κατανάλωσης.

Το πρόβλημα της μεταφοράς - Μοντελοποίηση

- x_{ij} : ποσότητα προς μεταφορά από το i στο j .
- Π.γ.π.:

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \text{υπό} & \sum_{i=1}^m x_{ij} \geq d_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ & \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq s_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{array}$$

Προγραμματισμός παραγωγής

- Εταιρεία προγραμματίζει την παραγωγή προϊόντος.
- t : Αριθμός περιόδων παραγωγής.
- $i_{initial}$: Αρχικό απόθεμα προϊόντος.
- Στην αρχή κάθε περιόδου, η εταιρεία παράγει νέα προϊόντα και αμέσως μετά ικανοποιεί την τρέχουσα ζήτηση.
- d_n : Ζήτηση προϊόντος την περίοδο n , $n = 1, 2, \dots, t$.
- i_{final} : Τελικό απαιτητό απόθεμα προϊόντος.
- c_n : Κόστος παραγωγής ανά μονάδα προϊόντος την περίοδο n , $n = 1, 2, \dots, t$.
- h_n : Κόστος αποθήκευσης υπερβάλλοντος προϊόντος ανά μονάδα προϊόντος την περίοδο n , $n = 1, 2, \dots, t$.
- Η ζήτηση κάθε περιόδου πρέπει να ικανοποιείται άμεσα (no backlogging).
- Στόχος: Ελαχιστοποίηση κόστους παραγ./αποθήκευσης.

Προγραμματισμός παραγωγής - Μοντελοποίηση

- x_n : ποσότητα παραγωγής προϊόντος την περίοδο n , $n = 1, 2, \dots, t$.
- y_n : απόθεμα προϊόντος την περίοδο n , $n = 1, 2, \dots, t$ (αμέσως μετά την ικανοποίηση της ζήτησης).
- Π.γ.π.:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{n=1}^t (c_n x_n + h_n y_n) \\ \text{υπό} \quad & i_{\text{initial}} + x_1 = d_1 + y_1 \\ & y_{n-1} + x_n = d_n + y_n, \quad n = 2, 3, \dots, t \\ & y_t = i_{\text{final}} \\ & x_n, y_n \geq 0, \quad n = 1, 2, \dots, t. \end{aligned}$$