Αναπλήρωση: 19 - 12 - 22

παράδειγμα Να λυθεί το πρόβλημα ελέγχου αποθεμάτων με $N=4$, $d_t=3$

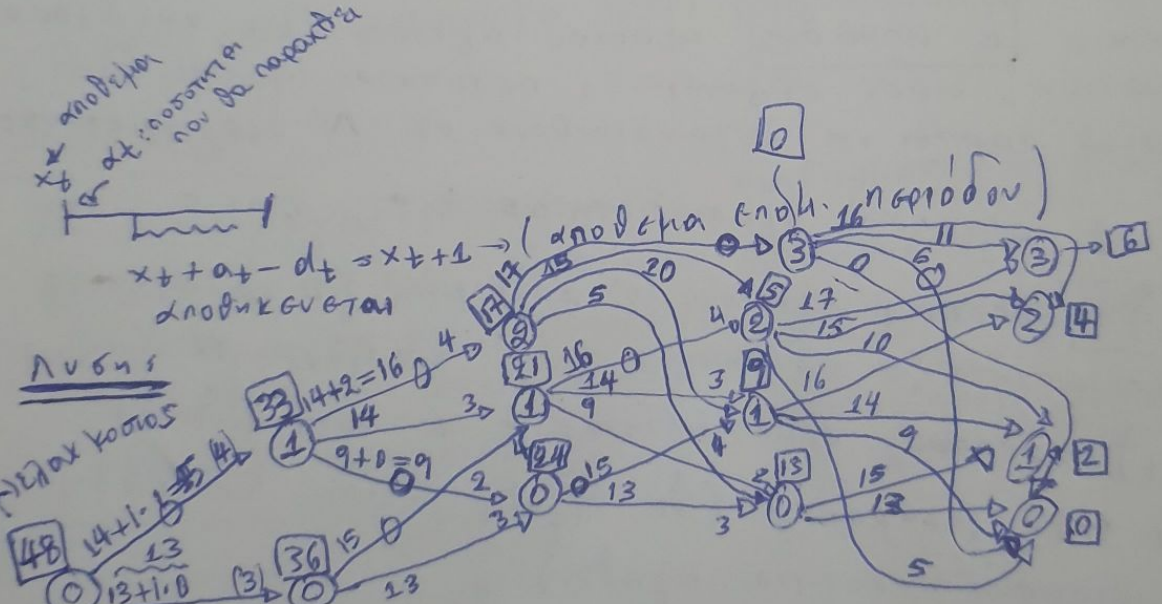
$h_t = 1$, $t = 1,2,3,4$ (κοστος παραγωγής + κοστος αποθήκευσης) → (για το απόθεμα που μένει !!)

$M = 3$, $m = 4$ και

a_t	0	1	2	3	4
$K_t(a_t)$	0	5	9	13	14

$t = 1,2,3,4$

$x_1 = 0$ $\quad \hat{c}(x_5) = 2 \cdot x_5$



t = 2

t = 1

$0 \le \alpha_t \le m = 4$

$x_1 + a_1 \ge d_1 \Leftrightarrow$

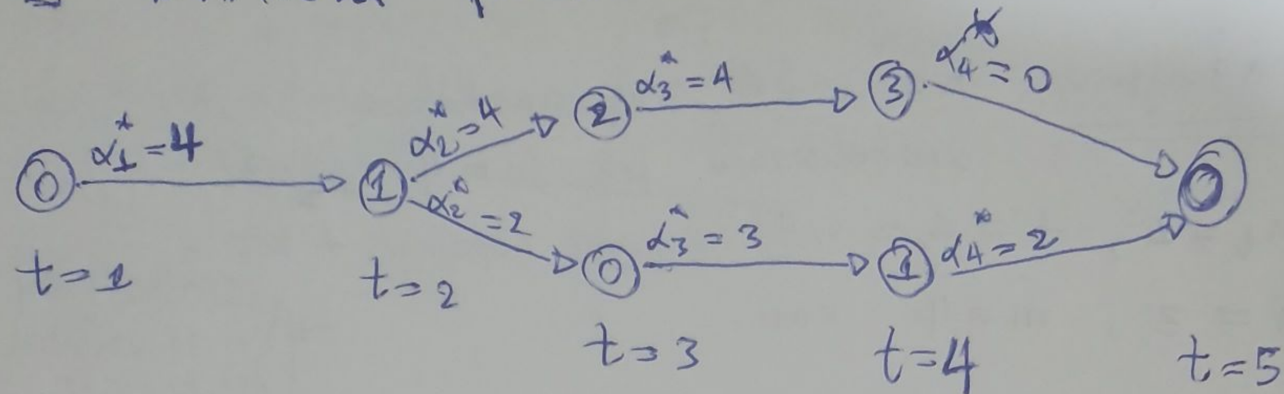
$0 + \alpha_1 \ge 3 \Leftrightarrow a_1 \ge 3$

$\overset{0 + a_1 - 3}{x_1 + a_1 - d_1} \le M = 3 \Leftrightarrow a_1 \le 6$

t = 3 $\quad$ t = 4 $\quad$ t = 5

(αν είχα κέρδος θα ηθελε "–" στο τερματικό κόστος) (ή κέρδος)

2 Βέλτιστα μονοπάτια :



(4, 4, 4, 0) , (4, 2, 3, 2)

(με συνολικό κόστος 48 ελάχιστο δυνατό.)

2.4 προβλημα κατανομής πόρων / φόρτωσης φορτίου

υπάρχουν $\boxed{b \text{ μονάδες}}$ κάποιου αγαθού (πχ κεφάλαιο χρημάτων, ώρες εργασίας, ποσότητα πρώτης ύλης) οι οποίες πρέπει να κατανεμηθούν σε N δραστηριότητες

Έστω a_t = ένταση δραστηριότητας t, $t=1,2,\dots,N$

$\boxed{\Pi_t(a_t) \equiv}$ ποσότητα αγαθού που απαιτείται για να κάνουμε τη δραστηριότητα t με ένταση a_t, $t=1,2,\dots,N$

$R_t(a_t)$ = απόδοση δραστηριότητας t αν αυτή γίνει με ένταση a_t (κέρδος) (θα θέλαμε μέγιστη ένταση)
(περιορισμένη ποσότητα αγαθού)

εύρεση της βέλτιστης κατανομής του b στις διάφορες δραστηριότητες δηλ. αυτή που επιτυγχάνει τη μέγιστη συνολική απόδοση

παράδειγμα : Φορτηγό με συγκεκριμένη χωρητικότητα b
πχ $b = 40m^3$ πρέπει να γεμίσω με κούτες
3 ειδών ώστε να μεγιστοποιήσω την συνολική αξία
που θα μεταφέρω

είδος (t)	όγκος (v_t)	αξία (r_t)
1	3	4
2	5	7
3	8	10

(τι ποσότητα θα πάρω από το αντίστοιχο είδος κουτιάς)

$\alpha_t \equiv$ (ένταση που κάνω την δραστηριότητα)
$\equiv$ # κουτιών είδους t

$\Pi_t(a_t) = V_t \cdot a_t$ και $R_t(a_t) = r_t \cdot a_t$
(κάθε στάδιο αποφασίζω πόσες κούτες από το είδος θα πάρω)

Παράδειγμα

Αν έχω συγκεκριμένες ώρες διαβάσματος $b = 12$ και πρέπει να τις κατανείμω στο διάβασμα 3 μαθημάτων ώστε να μεγιστοποιήσω τον συνολικό βαθμό που θα πάρω και ισχύει ότι:

ένταση ≡ πόσες ώρες θα διαβάσω

μαθημα t \ ώρες διαβ.	2	3	4	5
1	3	5	6	7
2	6	7	8	10
3	4	5	7	8

Στο στάδιο t αποφασίζω πόσες ώρες θα διαβάσω
$a_t = \#$ ωρών του μαθημ. t

$\boxed{\Pi_t(a_t) = a_t}$ η ένταση της δραστηριότητας ταυτίζεται με την κατανάλωση του αγαθού!!

$R_t(a_t) =$ πίνακας (δίνεται)

Διατύπωση σαν Π.Δ.Π.:

1) Στάδια: στο στάδιο t αποφασίζουμε την ένταση της δραστηριότητας t, $t=1,2,\ldots,N$

2) Κατάσταση: x_t: ποσότητα αγαθού που απομένει διαθέσιμη στην αρχή του σταδίου t

3) Απόφασης: α_t: ένταση δραστηριότητας t

$0 \leq \Pi_t(\alpha_t) \leq x_t$

άρα $D_t(x_t) = \{ \alpha_t : 0 \leq \Pi_t(\alpha_t) \leq x_t \}$

4) Δυναμική συστήματος:

$x_{t+1} = g_t(x_t, \alpha_t) = x_t - \Pi_t(\alpha_t)$

5) Άμεσο κέρδος: $C_t(x_t, \alpha_t) = R_t(\alpha_t)$

6) Τελικό – Τερματικό κέρδος $\hat{c}(x_{N+1}) = 0$ (συνήθως)

Εξισώσεις Βελτιστοποίησης

$$v(t, x_t) = \max_{\alpha_t \in D_t(x_t)} \{ C_t(x_t, \alpha_t) + v(t+1, g_t(x_t, \alpha_t)) \}$$

$t=1,2,\ldots,N$ και $v(N+1, x_{N+1}) = 0$

Εφαρμογή (Το πρόβλημα του σακιδίου)

Ταχυδρόμος θέλει να φορτώσει το σακίδιο του με αντικείμενα 4 κατηγοριών. Ο συνολικός όγκος των σακιδίων είναι 3 μονάδες. Η θρεπτική αξία μιας μονάδας κατηγορίας t είναι w_t και όγκος v_t.

t	v_t	w_t
1	3	7
2	6	16
3	7	19
4	5	15

Θέλουμε να δούμε πόσες μονάδες από κάθε κατηγορία θα μπει στο σακίδιο ώστε να μεγιστοποιηθεί η συνολική αξία.

Λύση

$b = 3$ $\qquad$ a_t = μονάδες που θα πάρω από κατηγορία φορτίου t

$$n_t(a_t) = v_t \cdot a_t \quad , \quad R_t(a_t) = w_t \cdot a_t$$

t	x_t	a_t	$c_t(x_t; a_t)$	x_{t+1}	$v(t, x)$
1	9	0	0	9	$0+19=19$
		1	7	6	$7+16=23$ (*)
		2	14	3	$14+0=14$
		3	21	0	$21+0=21$
2	0	0	0	0	$0+0=0$ (*)
	3	0	0	3	$0+0=0$ (*)
	6	0	0	6	$0+15=15$
		1	16	0	$16+0=16$ (*)
	9	0	0	9	$0+19=19$ (*)
		1	16	3	$16+0=16$
3	0	0	0	0	$0+0=0$
	3	0	0	3	$0+0=0$ (*)
	6	0	0	6	$0+15=19$ (*)
	9	0	0	9	$0+15=15$
		1	19	2	$19+0=19$ (*)

t					
4	0	0	0	0	0+0=0 (*)
	2	0	0	2	0+0=0 (*)
	3	0	0	3	0+0=0 (*)
	6	0 1	0 15	6 1	0+0=0 15+0=15 (*)
	9	0 1	0 15	9 4	0+0=0 15+0=15 (*)
5 ← τερματικό στάδιο	0				0
	1				0
	2				0
	3				0
	4				0
	6				0
	9				0

$$9 \xrightarrow{\alpha_1^* = 1} 6 \xrightarrow{\alpha_2^* = 1} 0 \xrightarrow{\alpha_3^* = 0} 0 \xrightarrow{\alpha_4^* = 0} 0$$

$t=1$ $t=2$ $t=3$ $t=4$ $t=5$

1 μον. από το 1ο προϊόν
1 μον από το 2ο } μέγιστη απόδοση = 23

Αναπλήρωση 22-12-22

Άσκηση 1 — πρόβλημα προγραμματισμού παραγωγής για 4 περιόδους

περίοδος (t)	ζήτηση (d_t)	κόστος παραγωγής ανά μονάδα	κόστος αποθήκευσης ανά μονάδα
1	3	50	20
2	3	50	25
3	4	70	15
4	1	70	15

Δυναμικότητα παραγωγής: 3
χωρητικότητα αποθήκης: 3
Το αρχικό απόθεμα (για $t=1$) είναι 2 μονάδες
θέλουμε στο τέλος του χρονικού ορίζοντα να υπάρχει απόθεμα 1 μονάδα.
Αν σε κάποια περίοδο γίνει παραγωγή θα υπάρχει αρχικό κόστος 200 χρ. μονάδων

Δηλ $K_1(2) = 200 + 2 \cdot 50 = 300$

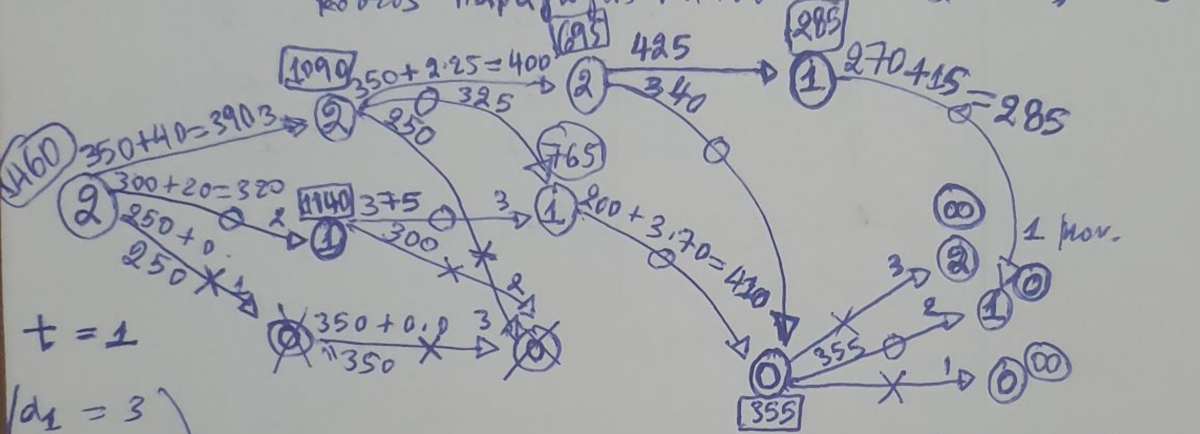
$K_1(0) = 0$

<u>Λυση</u>: έχουμε πρόβλημα ελέγχου αποθεμάτων (παραγωγής-αποθήκευσης) με $m=3$, $M=3$, $N=4$ $(t=1,2,3,4,5)$ d_t, h_t όπως δίνονται

$$k_t(a_t) = \begin{cases} 0, & a_t = 0 \\ 200 + b_t \cdot a_t, & a_t > 0 \end{cases}$$

$x_1 = 2$ Τελικό κόστος $\hat{c}(x_5) = \begin{cases} \infty, & x_5 \neq 1 \\ 0, & x_5 = 1 \end{cases}$

κόστος παραγωγής + αποθ.



$t=1$: $d_1 = 3$, $b_1 = 50$, $h_1 = 20$

$t=2$: $d_2 = 3$, $b_2 = 50$, $h_2 = 25$

$t=3$: $d_3 = 4$, $b_3 = 70$, $h_3 = 15$

$t=4$: $d_4 = 1$, $b_4 = 70$, $h_4 = 15$

1) (σβήνω την κατ. 0 (δεν έχω δυνατή απόφαση))
(και σβήνω και όλες τις προηγ. που οδηγούν στην 0)
(ή βάζω κόστος άπειρο στην κατ. 0)

2) ή αφήνω μόνο το βέλος που οδηγεί στην 1

$\boxed{\text{Το ελαχ κόστος είναι: } 1.460}$

$$2 \xrightarrow{a_1^* = 2} 1 \xrightarrow{a_2^* = 3} 1 \xrightarrow{a_3^* = 3} 0 \xrightarrow{a_4^* = 2}$$

$t=1$ $t=2$ $t=3$ $t=5$

Παράδειγμα 2 Θέλουμε να στείλουμε **5** γιατρούς σε 3 περιοχές. Σε κάθε περιοχή θέλουμε να πάνε από 1 έως 3 γιατροί.
Η ωφέλεια που έχουμε αν σταλούν οι γιατροί στην περιοχή t είναι

$t \backslash \alpha$	1	2	3
1	24	40	48
2	20	30	36
3	27	42	50

Πώς θα κατανεμηθούν οι γιατροί ώστε να μεγιστοποιηθεί η ωφέλεια;

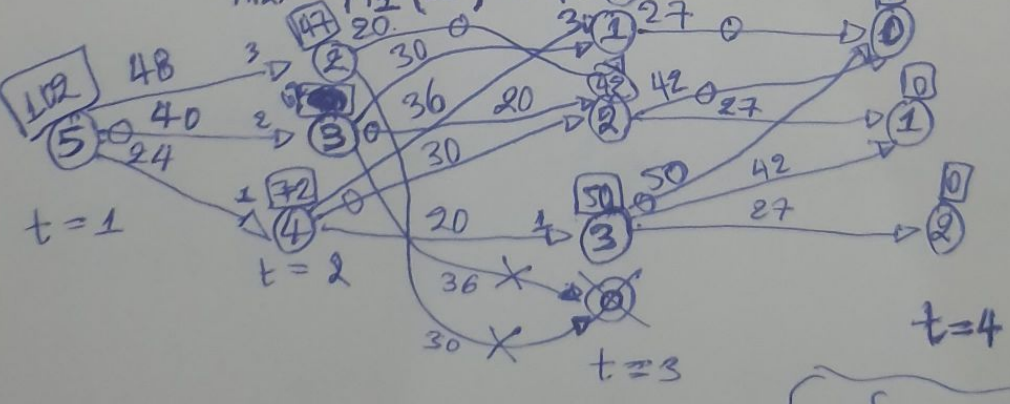
Λύση: Είναι πρόβλημα κατανομής πόρων με $N=3$

$b=5$ $\quad \alpha_t = \#$ γιατρών που θα πάνε στην περιοχή t

$n_t(\alpha_t) = \alpha_t$

$R_t(\alpha_t) =$ όπως δίνεται από τον πίνακα

π.χ. $R_1(2) = 40$



→ εδώ η ποσότητα του πόρου που καταναλώνει είναι το ίδιο το α_t

(τελικό κέρδος $= 0$)

Μέγιστη ωφέλεια = 102

$\underset{t=1}{(5)} \xrightarrow{\alpha_1^* = 2} \underset{t=2}{(3)} \xrightarrow{\alpha_2^* = 1} \underset{t=3}{(2)} \xrightarrow{\alpha_3^* = 2} \underset{t=4}{(0)}$