01-12-22

πόρισμα: Έστω το πρόβλημα μη γραμμικού προγραμματισμού

$\max f(\underline{x})$

υπο $g_1(\underline{x}) \le 0$, $g_2(\underline{x}) \le 0$, $\vdots$, $g_p(\underline{x}) \le 0$ } p-περιορισμοί

ΠΚΠ-3

$\underline{x} \ge 0$

αν $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κοίλη και $g_i(\underline{x}): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κυρτές, $i=1,2,\dots,p$

Θεωρούμε ένα πολλαπλ. $\mu_i \ge 0$ για κάθε περιορισμό $g_i(x) \le 0$

και φτιάχνουμε τη συνάρτηση Lagrange

$$L(\underline{x}) = f(x) - \sum_{i=1}^{p} \mu_i g_i(\underline{x})$$

Αν υπάρχουν $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ και $\underline{\mu}^* = (\mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_p^*)$

τέτοια ώστε 1) $\mu_i^* \ge 0$ $i=1,2,\dots,p$

2) $\dfrac{\partial L(x^*)}{\partial x_j} \le 0$, $j=1,2,\dots,n$

3) $x_j^* \cdot \dfrac{\partial L(x^*)}{\partial x_j} = 0$, $j=1,2,\dots,n$

4) $\mu_i^* \cdot g_i(\underline{x}^*) = 0$

$g_i(\underline{x}^*) \le 0$, $i=1,2,\dots,p$

$x_j^* \ge 0$ $j=1,2,\dots,n$

τότε το x^* είναι βέλτιστη λύση.

Ασκηση: να λυθει το Π.Μ.Γ.Π.

$$\max \quad \ln(1+x_1+x_2)$$

υπο

$$x_1+2x_2 \leq 5 \Leftrightarrow x_1+2x_2-5 \leq 0$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

συνθεση κοιλης με γραμμικη

Λυση: Εστω $f(x_1,x_2) = \ln(1+x_1+x_2) \Rightarrow f$ κοιλη

και $g_1(x_1,x_2) = x_1+2x_2-5$

γραμμικη $\Rightarrow g_1$ κυρτη

Αρα εχω προβλημα ΠΚΠ-3

Εστω μ_1 ο πολλ/στης της g_1

Η συναρτηση Lagrange:

$$L(x_1,x_2) = f(x_1,x_2) - \mu_1 \cdot g_1(x_1,x_2)$$

$$\Rightarrow L(x_1,x_2) = \ln(1+x_1+x_2) - \mu_1(x_1+2x_2-5)$$

Συνθηκες KKT:

$\mu_1 \geq 0$ KKT-1

$\frac{1}{x_1+x_2+1} - \mu_1 \leq 0$ KKT-2

$\frac{1}{1+x_1+x_2} - 2\mu_1 \leq 0$ KKT-3

$x_1\left(\frac{1}{x_1+x_2+1} - \mu_1\right) = 0$ KKT-4

$x_2\left(\frac{1}{1+x_1+x_2} - 2\mu_1\right) = 0$ KKT-5

$\mu_1(x_1+2x_2-5) = 0$ KKT-6

$x_1+2x_2-5 \leq 0$ KKT-7

$x_1 \geq 0$ KKT-8

$x_2 \geq 0$ KKT-9

περιπτώσεις: $\mu_1 = 0$ ή $\mu_1 > 0$
$x_1 = 0$ ή $x_1 > 0$
$x_2 = 0$ ή $x_2 > 0$
8 περιπτώσεις

1) $\mu_1 = 0,\ x_1 = 0,\ x_2 = 0$
Η ΚΚΤ-2 δεν ικανοποιείται!
(άρα όχι λύση)

2) $\mu_1 = 0,\ \underline{x_1 > 0},\ x_2 = 0$ $\quad \mu_1 = x_2 = 0$

από ΚΚΤ-4 $\overset{x_1>0}{\Rightarrow}$ $\dfrac{1}{1+x_1+x_2} - \mu_1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{1}{1+x_1} = 0$ άτοπο

3) $\mu_1 = 0,\ x_1 = 0,\ x_2 > 0$
ΚΚΤ5 $\overset{x_2>0}{\Rightarrow}$ $\dfrac{1}{1+x_1+x_2} - 2\cancel{\mu_1} = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{1+x_2} = 0$ άτοπο

4) $\mu_1 = 0\ \ x_1 > 0,\ x_2 > 0$
ΚΚΤ-4 $\overset{x_1>0}{\Rightarrow}$ $\dfrac{1}{1+x_1+x_2} - \mu_1 = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{1+x_2+x_1} = 0$ άτοπο

5) $\underline{\mu_1 > 0},\ x_1 = 0,\ x_2 = 0$
ΚΚΤ-6 $\Rightarrow x_1 + 2x_2 - 5 = 0 \overset{x_1=x_2=0}{\Rightarrow} -5 = 0$ άτοπο

6) $\mu_1 > 0,\ x_1 = 0,\ x_2 > 0$
ΚΚΤ-6 $(\mu_1 > 0)$ $x_1 + 2x_2 - 5 = 0 \Rightarrow 2x_2 - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{5}{2}}$

KKT-5 $\xRightarrow{x_2>0}$ $\frac{1}{1+x_1+x_2} - 2\mu_1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{1+\frac{5}{2}} - 2\mu_1 = 0$

$\Rightarrow \frac{2}{7} = 2\mu_1 \Rightarrow \boxed{\mu_1 = \frac{1}{7}}$

όμως η KKT-2 Δεν ικανοποιείται!
άρα δεν είναι αυτή η λύση.

7) $\mu_1 > 0$, $x_1 > 0$, $x_2 = 0$

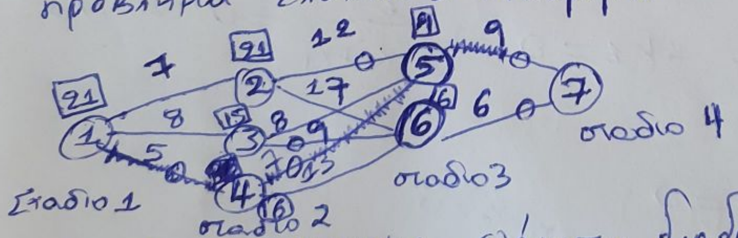
KKT-6 $\Rightarrow$ $x_1 + 2x_2 - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = 5}$

KKT-4 $\Rightarrow$ $\frac{1}{1+x_1+x_2} - \mu_1 = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{6} = \mu_1}$

Ικανοποιούνται όλες οι συνθήκες.
η βέλτιστη λύση θα είναι $x^* = (x_1^*, x_2^*) = (5, 0)$

ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ: ΕΝΟΤΗΤΑ 6

Θεωρούμε προβλήματα που αποτελούνται από στάδια στα οποία παίρνουμε αποφάσεις.
Σε κάθε στάδιο λαμβάνεται μια απόφαση.
πρόβλημα ελαχίστης διαδρομής



Θέλουμε να βρούμε ελάχιστη διαδρομή 1→7
κάθε διαδρομή αποτελείται από 3 βήματα (στάδια)
άρα θα πάρω 3 διαδοχικές αποφάσεις
- Σε κάθε στάδιο ανάλογα με την πόλη στην οποία βρίσκομαι μπορώ να πάρω συγκεκριμένες αποφάσεις.

- Καθε απόφαση έχει συγκεκριμένο κόστος και με οδηγεί σε επόμενη κατάσταση.

Εστω $v(x)$ η ελαχιστη απόσταση απο την πόλη x στην πολη 7. Εμείς ψαχνουμε το $v(1)$.

Στάδιο 3

$v(5) = 9$

$v(6) = 6$

Σταδιο 2

$$v(2) = \min\{\underbrace{12+9=v(5)}_{\text{πολη } 5}, \underbrace{17+v(6)}_{\text{πολη } 6}\}$$

$$= \min\{12+9, 17+6\} = \min\{21, 23\} = 21$$

$$v(3) = \min\{\underbrace{8+v(5)}_{\text{πολη } 5}, \underbrace{9+v(6)}_{\text{πολη } 6}\} = \min\{8+9, 9+6\} = \min\{17, 15\} = 15$$

$$v(4) = \min\{\underbrace{7+v(5)}_{\text{πολη } 5}, \underbrace{13+v(6)}_{\text{πολη } 6}\} = \min\{16, 19\} = 16$$

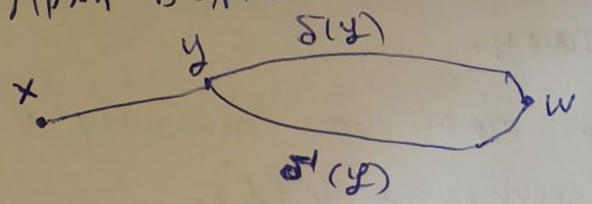
Σταδιο 1

$$v(1) = \min\{\underbrace{7+v(2)}_{\alpha=2}, \underbrace{8+v(3)}_{\alpha=3}, \underbrace{5+v(4)}_{\alpha=4}\} =$$

$$= \min\{28, 23, 21\} = 21$$

Αρα $v(1) = 21$

Αρχή Βελτιστοποίησης Bellman



Αν η $\delta(x) = ((x,y), \delta(y))$ είναι βέλτιστη τότε

το $\delta(y)$ είναι βέλτιστος τρόπος να πάω από την y στην w

αποδ: έστω ότι $\delta'(y)$ καλύτερο από το $\delta(y)$

τότε $((x,y), \delta'(y))$ καλύτερη από την

$((x,y), \delta(y))$. Άτοπο

Συμβολισμοί — ορισμοί:

Σε κάθε πρόβλημα δυναμικού προγραμματισμού έχουμε

1) Στάδια, $N = \#$ σταδίων

$t = 1, 2, \ldots, N$, $\boxed{N+1}$ ↳ τερματικό στάδιο

2) Καταστάσεις: $x(t) = x_t$ κατάσταση στο στάδιο t

S_t = το σύνολο δυνατών καταστάσεων στο στάδιο t

3) Αποφάσεις: α_t δυνατές αποφάσεις στο στάδιο t

$D_t(x_t)$ = σύνολο δυνατών αποφάσεων στην κατάσταση x_t

4) Επόμενη κατάσταση, $g_t(x_t, \alpha_t) = x_{t+1}$

5) Άμεσο κόστος ή (κέρδος) $c_t(x_t, \alpha_t)$

6) Τερματικό κόστος (κέρδος) : $\hat{c}(x_{N+1})$

• Εξισώσεις Βελτιστοποίησης Bellman :

$$v(t, x_t) = \min_{\alpha_t \in D_t(x_t)} / \max \{ c_t(x_t, \alpha_t) + v(t+1, g_t(x_t, \alpha_t)) \}$$

$\forall t = 1, 2, \ldots, N$

Τερματική Συνθήκη : $v(N+1, x_{N+1}) = \hat{c}(x_{N+1})$

Παράδειγμα : Έχουμε τα παρακάτω κιβώτια

κιβώτιο (t)	1	2	3	4	5
Βάρος (B_t)	2	4	3	1	5
Αξία (A_t)	3	7	5	3	7

Έχουμε φορτηγό με ανώτατο όριο βάρους 6 μονάδες ποια κιβώτια θα φορτωθούν ώστε να μεγιστοπ. την αξία;

να διατυπωθεί σαν πδπ και να λυθεί

Διατύπωση σαν π.δ.π.

- Στάδια $N = 5$ $t = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ → τερματικό στάδιο

Στο στάδιο t αποφασίζω αν θα φορτώσω το κιβώτιο t

- καταστάσεις : x_t : διαθέσιμο (υπολειπόμενο) επιτρεπόμενο βάρος στο ~~[illegible]~~ στάδιο t αποφάσεις: $\alpha_t = \begin{cases} 0 & \text{δεν φορτώνω το κιβώτιο } t \\ 1 & \text{φορτώνω το κιβώτιο } t \end{cases}$

$$D_t(x_t) = \begin{cases} \{0, 1\} & x_t \geq B_t \\ \{0\} & , \; x_t < B_t \end{cases}$$

Δυναμική του συστήματος: $x_{t+1} = g_t(x_t, \alpha_t) =$

$$= \begin{cases} x_t & \alpha_t = 0 \\ x_t - B_t & \alpha_t = 1 \end{cases}$$

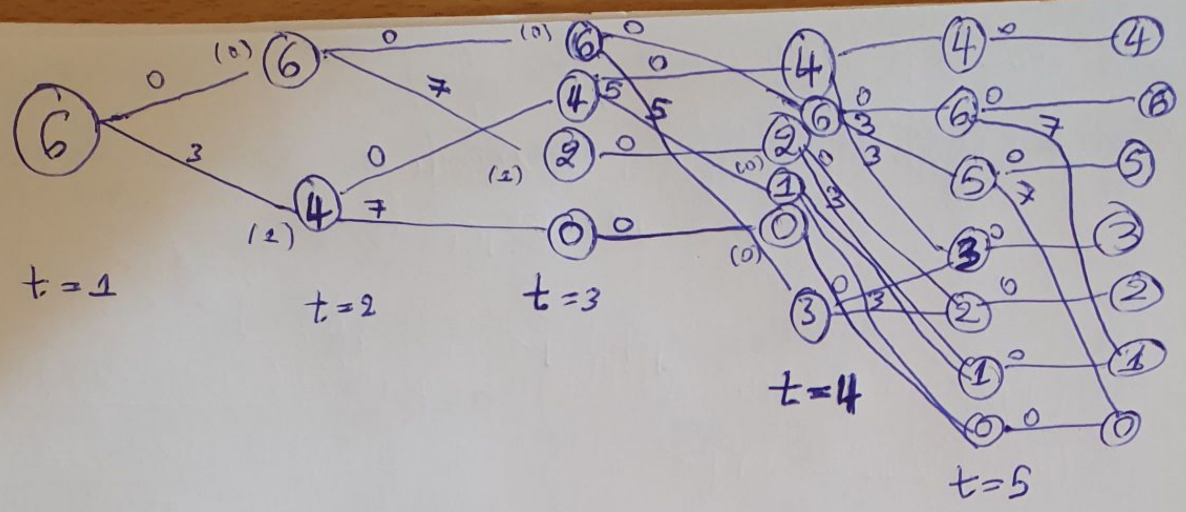
Άμεσο κέρδος $\quad c_t(x_t, \alpha_t) = \begin{cases} 0 & , \; \alpha_t = 0 \\ A_t & , \; \alpha_t = 1 \end{cases}$

Τερματικό κέρδος: $c_6(x_6) = 0$ (δεν υπάρχει)

Εξισώσεις βελτιστοποίησης:

$$v(t, x_t) = \max_{\alpha_t \in D_t(x_t)} \{ c_t(x_t, \alpha_t) + v(t+1, g_t(x_t, \alpha_t)) \}$$

$t = 1, 2, \ldots, 5 \quad$ και $\quad v(6, x_6) = 0$


t=1
t=2
t=3
t=4
t=5