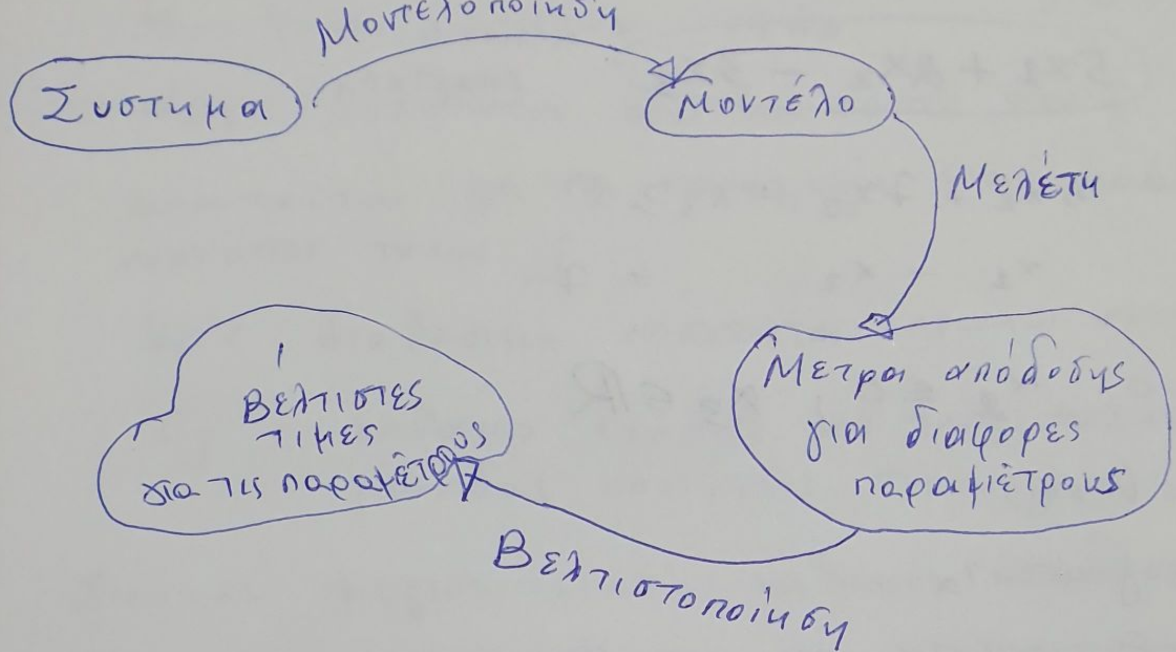
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ: 06-10-22



Γενικό πρόβλημα

x_j, $j = 1, 2, \dots, n$ μεταβλ. απόφασης

J : αντικειμενική συνάρτηση $J = f(x_1, \dots, x_n)$

Τυπικός περιορισμός

$g(x_1, \dots, x_n) \le$ ή $=$ ή $\ge b$

Τυπικός περιορισμός μεταβλητών

$x_j \in A_j$

πχ. $\max \left(x_1^3 + 5x_1x_2 + x_3^5 \right)$

υπό

$2x_1 + 5x_2 + 7x_3 \le 20$

$5x_1x_3 - x_2^2 \ge 5$

$x_1 \ge 0, \; x_2 \in \mathbb{R}, \; x_3 \le 0$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ (Π.Γ.Π)

μετ. απόφασης x_1, x_2, x_3

αντικειμ. συνάρτηση

$$\min \quad 5x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

υπό
$$5x_1 + 7x_2 + x_3 \geq 5$$
$$x_1 - x_2 = 7$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \leq 0, \quad x_3 \in \mathbb{R}$$

προϋποθέσεις

- Αναλογικότητα
- προσθετικότητα πχ όχι $5x_1 x_2$
- Διαιρετότητα πχ όχι $x_1 \in \{1, 2\}$ ή $x_2 \in \mathbb{N}$
- Βεβαιότητα - Ντετερμινισμός

- πληθώρα εφαρμογών
- κομψή θεωρία
- Υπαρξη αποτελεσματικών αλγορίθμων (Simplex)

ΚΛΑΣΣΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Το πρόβλημα μίξης υλικών
αποθήκευσης υλικών
μεταφοράς
δίαιτας
προγραμματισμού παραγωγής

Το προβλημα μιξης υλικων

n — τυποι προϊοντων προς παραγωγή
m — τυποι πρωτων υλών

α_{ij} : ποσότητα απο την πρωτη υλη i που αποιτειται για την παραγωγή μιας μονάδας προϊοντος τυπου j

b_i : διαθεσιμη ποσοτητα πρωτης υλης i

c_j : καθαρο κερδος απο την πωληση μιας μοναδας προϊοντος τυπου j

Στόχος μεγιστοποιηση καθαρου κερδους

x_j : Ποσοτητα απο το προϊον τυπου j που θα παραχθεί. $j = 1, 2, \ldots n$

Συνολικό κέρδος

$$\max \quad c_1 \cdot x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \ldots + c_n \cdot x_n$$

(Η συνολική ποσοτητα πρωτης υλης 1 που θα χρησιμοποιησω $\leq b_1$)

$$\alpha_{11} \cdot x_1 + \alpha_{12} x_2 + \alpha_{13} x_3 + \ldots + \alpha_{1n} x_n \leq b_1$$

$$\alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \ldots + \alpha_{2n} x_n \leq b_2$$

$$\vdots$$

$$\alpha_{m1} x_1 + \ldots + \ldots + \alpha_{mn} x_n \leq b_m$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

ή $\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

υπο $\sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \alpha_{ij} \leq b_i \quad \forall i = 1,2,\dots,m$

$x_j \geq 0 \quad \forall j = 1,2,\dots,n$

Το προβλημα της αποτιμησης των υλικών

n τυποι προϊοντων προς παραγωγή

m τυποι πρωτων υλων

- α_{ij} : ποσοτητα απο την πρωτη υλη i που αποιτειται για την παραγωγή μιας μοναδας τυπου j
- b_i : διαθεσιμη ποσοτητα πρωτης υλης i
- c_j : καθαρό κέρδος απο την πωληση μιας μονάδας προϊοντος τυπου j
- Στόχος : καθορισμός τιμών ανα μοναδα πρωτης υλης ωστε να ελαχ. η συνολική αξία των πρώτων υλων

y_i : τιμή πρωτης υλης i ανα μονάδα $i = 1,2,\dots,m$

$\min \; b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m$ ← συνολική αξία

υπο $\alpha_{11} y_1 + \alpha_{21} y_2 + \dots + \alpha_{m1} y_m \geq c_1$

$\alpha_{12} y_1 + \alpha_{22} y_2 + \dots + \alpha_{m2} y_m \geq c_2$

$\vdots$

$\alpha_{1n} y_1 + \alpha_{2n} y_2 + \dots + \alpha_{mn} y_m \geq c_n$

Για καθε προϊον j θα πρέπει το κέρδος που εχουμε απο μοναδα αν το πουλησουμε $\leq$ κερδος απο πρωτες υλες και $y_1, y_2, \ldots, y_m \geq 0$

$$\min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$\text{υπο} \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \quad \forall j = 1, \ldots, n$$

$$y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

m περιορισμοι, n μετ. αποφασης } n περιορισμοί, m μετ. απόφασης

(δυϊκά προβλήματα)

Το προβλημα της διαιτας

n – τυποι φαγητων προς καταναλωση

m – ειδη θρεπτικων συστατικών

a_{ij}, η ποσότητα θρεπτικού συστατικού i που περιέχεται σε μερίδα φαγητου j

b_i, ελαχ. ημερησια ποσοτ. συστατικου i που θα προσληφθει

d_i: ~~...~~ μεγιστη ημερησια ποσοτητα συστατικου i

c_j, κοστος μιας μεριδας φαγητου j

Στοχος καθορισμός διαιτας ελαχίστου κοστους

x_j = ποσοτητα φαγητου τυπου j που θα αγορασω $j = 1, \dots, n$

$$\min \quad c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

$$
\begin{aligned}
\text{υπο} \quad & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \leq d_1 \\
& a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \geq b_1 \\
& a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \leq d_2 \\
& a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \geq b_2 \\
& \vdots \\
& a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \leq d_m \\
& a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \geq b_m \\
& x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0
\end{aligned}
$$

$$\min \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$
\begin{aligned}
\text{υπο} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq d_i \qquad i = 1, 2, \dots, m \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \qquad i = 1, 2, \dots, m \\
& x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n
\end{aligned}
$$

Το προβλημα της Μεταφοράς

m σημεια παραγωγής, n σημεία κατανάλωσης

s_i : Η προσφορά του σημείου i

d_i : Η ζητηση του σημείου j

c_{ij} κοστος μεταφορας προϊοντος απο το i στο j

Στοχος: Ελαχ. του συνολικού κοστους μεταφορας

x_{ij} : ποσότητα προϊοντος που θα μεταφερθεί απο την μονάδα παραγωγής i στην μονάδα κατανάλωσης j

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

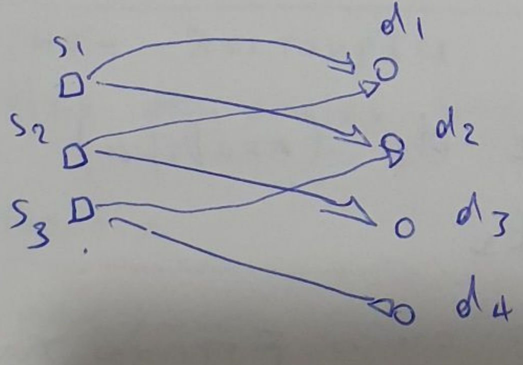
να ικανοποιείται η ζητηση καθε j

υπο
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq d_j, \quad j = 1,2,\dots,n$$

Η συνολική ποσότητα που φευγει απο το i να μην ξεπερνά την προσφορά

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq s_i \quad \forall i = 1,2,\dots,m$$

και $x_{ij} \geq 0 \ \forall i,j$



Προγραμματισμός **Παραγωγής**:

Εταιρεία προγραμματίζει παραγωγή προϊόντος

t: αριθμός περιόδων παραγωγής

$i_{initial}$ αρχικό απόθεμα προϊόντος

Στην αρχή κάθε περιόδου η εταιρεια παράγει νέα προϊόντα και αμέσως μετά ικανοποιεί την τρέχουσα ζήτηση

d_n: ζήτηση προϊόντος την περίοδο $n=1,2,\dots,t$

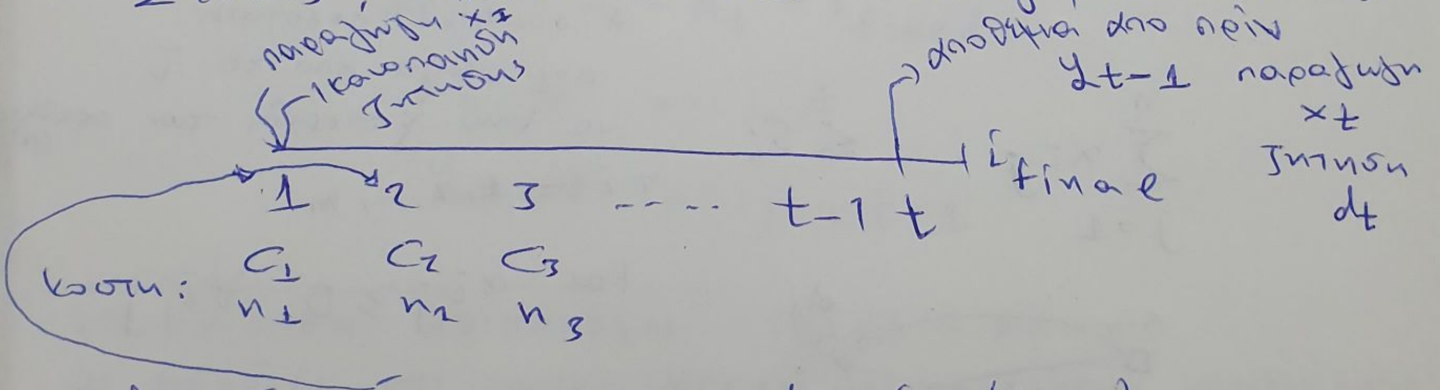
i_{final}: Τελικό απαιτητό απόθεμα προϊόντος

c_n: κόστος παραγωγής ανά μονάδα την περίοδο n

h_n κόστος αποθήκευσης προϊόντος την περίοδο $n=1,2,\dots,t$

Η ζήτηση ικανοποιείται άμεσα

Στόχος: Ελαχ. κόστους παραγ./αποθήκευσης



αποθηκευτη: $i_{initial} + x_1 - d_1$ (απόθεμα)

↳ y_1

y_1: το απόθεμα με το οποίο ξεκινάω την περίοδο 2

$y_1 + x_2 - d_2 = y_2$ απόθεμα y_2 στην αρχή της 3 περιόδου

$y_2 + x_3 - d_3 = y_3$ απόθεμα y_3 στην αρχή της 4ης περιόδου κοστος 1ης περιοδου : $\underbrace{c_1 x_1}_{\text{κοστος παραγωγής}} + \underbrace{h_1 y_1}_{\text{κοστος αποθήκευσης}}$

ομοια για 2η $c_2 x_2 + h_2 y_2$ ... κλπ

Μεταβλ. απόφασης : x_n : ποσότητα παραγωγής την περιοδο n $\forall n = 1, 2, \dots, t$

y_n : ποσότητα που θα αποθηκευθεί την περίοδο n

$$\min \sum_{n=1}^{t} (c_n x_n + h_n y_n)$$

υπο

$$i_{initial} + x_1 - d_1 = y_1$$

$$y_{n-1} + x_n - d_n = y_n \quad \forall n = 2, 3, \dots, t-1$$

$$y_{t-1} + x_t - d_t = i_{final}$$

$$x_n \geq 0 \quad n = 1, 2, \dots, t$$

$$y_n \geq 0 \quad n = 1, \dots, t-1$$

Επιχείρηση λειτουργεί 8:00 – 20:00

οι βάρδιες στις οποίες μπορεί να προσλάβει υπαλλήλους είναι :

	Βαρδια	ημ/σθιο
1.	8:00 – 16:00	60 €
2.	8:00 – 12:00	35 €
3.	10:00 – 16:00	50 €
4.	12:00 – 20:00	65 €
5.	16:00 – 20:00	40 €

ο αριθμός υπαλλήλων που απαιτείται ανα χρονικό διαστημα ειναι :

ωρες	# υπαλλήλων
8:00 – 11:00	8
11:00 – 14:00	10
14:00 – 18:00	11
18:00 – 20:00	7

Ερωτημα : πόσοι υπάλληλοι πρέπει να προσληφθούν σε καθε βαρδια ώστε να υπάρχει πάντα ο απαραίτητος αριθμος υπαλλήλων και να ελαχιστοποιηθεί ο χρονος.

Μετ. απόφασης : x_j αριθμός υπαλλήλων στην βαρδια j, $j = 1,2,3,4,5$

$$\min \; 60x_1 + 35x_2 + 50x_3 + 65x_4 + 40x_5$$

υπο

$$\cancel{x_1 + x_2 + x_3 \geq 8}$$

$$x_1 + x_2 \geq 8 \quad (8:00 - 10:00)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 8 \quad (10:00 - 11:00)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 10 \quad (11 - 12)$$

$$x_1 + x_3 + x_4 \geq 10$$

$$x_1 + x_3 + x_4 \geq 11 \quad (14:00 - 16:00)$$

$$x_4 + x_5 \geq 11 \quad (16:00 - 18:00)$$

$$x_4 + x_5 \geq 7 \quad (18:00 - 20:00)$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i = 1,\dots,5$$