12/11/2021

Παράδειγμα - π.γ.π μίξης - φράγματα

π.χ.1

$$\max \; 3x_1 + 2x_2$$

υπό

$$5x_1 + 6x_2 \le 5$$
$$-x_1 + 3x_2 \le 3$$
$$7x_1 - 2x_2 \le 4$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

$\Downarrow$ Δυϊκό

$$\min \; 5y_1 + 3y_2 + 4y_3$$

υπό

$$5y_1 - 1y_2 + 7y_3 \ge 3$$
$$6y_1 + 3y_2 - 2y_3 \ge 2$$
$$y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

(Το δυϊκό φτιάχτηκε στην προσπάθεια να βάλουμε φράγμα στο αρχικό)

π.χ.2

$3x_1 + 5x_2 \le \;?$ (Ψάχνω άνω φράγμα)

οι περιορισμοί μου

- $(x_1 \le 4) \times 3 \Rightarrow 3x_1 \le 12$
  $(2x_2 \le 12) \times \frac{5}{2} \Rightarrow 5x_2 \le 30$
  $3x_1 + 5x_2 \le 42$ → Η τιμή της αντικ. συνάρτησης πρέπει να είναι ≤ 42

ή

- $(2x_2 \le 12) \times \frac{3}{2} \Rightarrow 3x_2 \le 18$
  $(3x_1 + 2x_2 \le 18) \times 1 \Rightarrow 3x_1 + 2x_2 \le 18$
  $3x_1 + 5x_2 \le 36$ → καλύτερο φράγμα

ή

- $(x_1 \le 4) \times 1 \Rightarrow x_1 \le 4$
  $(2x_2 \le 12) \times 2 \Rightarrow 4x_2 \le 24$
  $(3x_1 + 2x_2 \le 18) \times 1 \Rightarrow 4x_1 + 6x_2 \le 46$

$3x_1 + 5x_2 \le 4x_1 + 6x_2 \le 46$ → χειρότερο φράγμα

Όταν έχουμε φράγματα, το μικρότερο είναι το καλύτερο (που έτσι πιο κοντά στην τιμή της βέλτιστης λύσης)

- $\min \; 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$

υπό

$$\begin{aligned} y_1 \quad\quad\quad + 3y_3 &\geq 3 \\ 2y_2 + 2y_3 &\geq 5 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

(Το δυϊκό είναι το πρόβλημα που μου δίνει το βέλτιστο φράγμα για την αντικειμενική συνάρτηση του πρωτεύοντος)

Φραγματική ερμηνεία δυϊκού

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i\right) \times y_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i\right)x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \leftarrow \text{φράγμα}$$

Για να είναι το $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ άνω φράγμα θα πρέπει:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \geq c_j$$

Θεώρημα: Το δυϊκό του δυϊκού ενός π.γ.π είναι το αρχικό π.γ.π.

$$(\Delta) \quad \min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$\text{υπό} \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \geq c_j, \; j=1,\dots,n$$

$$y_i \geq 0, \; i=1,\dots,m$$

Πρέπει να το φέρουμε σε τυπική μορφή:

$$-\max \sum_{i=1}^{m} (-b_i) y_i$$

υπό $\sum_{i=1}^{m} (-a_{ij}) y_i \leq -c_j \,, j=1,\dots,n$

$y_i \geq 0 , i = 1,2,\dots,m$

Το δυϊκό του (Δ) είναι:

$$-\min \sum_{j=1}^{n} (-c_j) x_j$$

υπό $\sum_{j=1}^{n} (-a_{ij}) x_j \geq -b_i \,, i=1,\dots,m$

$x_j \geq 0 , j=1,\dots,n$

$\Downarrow$

$$-\min - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (-\min = \max)$$

υπό $-\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \,, i=1,2,\dots,m$ (πολ/ζω με -1)

$x_j \geq 0 , j=1,\dots,n$

$\Downarrow$

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

υπό $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \,, i=1,\dots,m$

$x_j \geq 0 , j=1,\dots,n$

Άρα ο δυϊκός του δυϊκού είναι ο αρχικός.

Θεώρημα: Η αντικειμενική συνάρτηση του πρωτεύοντος σε μια εφικτή λύση του είναι μικρότερη ή ίση της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού σε μια εφικτή λύση του

(Π) $\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

υπό $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \ i=1,\dots,m$ (1)

$x_j \ge 0, \ j=1,\dots,n$ (2)

$$\Downarrow$$

(Δ) $\min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$

υπό $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, \ j=1,2,\dots,n$ (3)

$y_i \ge 0, \ i=1,\dots,m$ (4)

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \overset{(3)}{\underset{(2)}{\le}} \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i\right) x_j = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) y_i \overset{(1)}{\underset{(4)}{\le}} \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

π.χ

$\max \ -3x_1 + 2x_2 + x_3$

υπό

$-x_2 + 2x_3 \le 0$

$-3x_1 + 4x_2 + x_3 \le 3$

$x_1, x_2 \ge 0$

$$\Downarrow$$

$\min \ 0y_1 + 3y_2$

υπό

$0y_1 - 3y_2 \ge -3$

$-1y_1 + 4y_2 \ge 2$

$2y_1 + y_2 \ge 1$

$y_1, y_2 \ge 0$

Τυπική μορφή: $-\max \quad -3y_2$

υπό
$$3y_2 \le 3$$
$$y_1 - 4y_2 \le -2$$
$$-2y_1 - y_2 \le -1$$
$$y_1, y_2 \ge 0$$

$$\zeta = 0 - 3x_1 + \boxed{2x_2} + x_3$$
$$w_1 = 0 + 0x_1 + x_2 - 2x_3$$
$$w_2 = 3 + 3x_1 - 4x_2 - x_3$$

$$-\xi = 0 + 0y_1 - \boxed{3y_2}$$
$$z_1 = 3 + 0y_1 - 3y_2$$
$$z_2 = -2 - y_1 + 4y_2$$
$$z_3 - 1 + 2y_1 + y_2$$

$w_i \longleftrightarrow y_i$

περιθώριο πρωτεύοντος στον i-οστό περιορισμό — i-οστή μεταβλητή απόφασης δυϊκού.

$z_j \longleftrightarrow x_j$

περιθώριο δυϊκού στον j-οστό περιορισμό — j-οστή μεταβλητή απόφασης πρωτεύοντος

Ξεκινάω κάνοντας Simplex στο πρωτεύον :

x_2 μπαίνει, η w_2 βγαίνει

↓ ΑΝΑΛΟΓΗ ΟΔΗΓΗΣΗ

z_2 βγαίνει, η y_2 μπαίνει

(Κάνοντας ανάλογη οδήγηση παρατηρώ πάλι για τους συντελεστές ότι ο ένας είναι ο αντιθετοαντίστροφος πίνακος)

$$\zeta = 3/2 - 3/2\,x_1 - 1/2\,w_1 + 1/2\,x_3$$
$$w_1 = 3/4 + 3/4\,x_1 - 1/4\,w_2 - 9/4\,x_3$$
$$x_2 = 3/4 + 3/4\,x_1 - 1/4\,w_2 - 1/4\,x_3$$

$$-\xi = -3/2 - 3/4\,y_1 - 3/4\,z_2$$
$$z_1 = 3/2 - 3/4\,y_1 - 3/4\,z_2$$
$$y_2 = 1/2 + 1/4\,y_1 + 1/4\,z_2$$
$$z_3 = -1/2 + 9/4\,y_1 + 1/4\,z_2$$

x_3 μπαίνει, w_1 βγαίνει

↓

z_3 βγαίνει, y_1 μπαίνει

$$\zeta = 5/3 - 4/3\,x_1 - 5/9\,w_2 - 2/9\,w_1$$
$$x_3 = 1/3 + 1/3\,x_1 - 1/9\,w_2 - 4/9\,w_1$$
$$x_2 = 2/3 + 2/3\,x_1 - 2/9\,w_2 + 1/9\,w_1$$

$$-\xi = -5/3 - 1/3\,z_3 - 2/3\,z_2$$
$$z_1 = 4/3 - 1/3\,z_3 - 2/3\,z_2$$
$$y_2 = 5/9 + 1/9\,z_3 + 2/9\,z_2$$
$$y_1 = 2/9 + 4/9\,y_1 - 1/9\,z_2$$

Όταν βρώ βέλτιστη λύση για το πρωτεύον, βρίσκω και για το δυϊκό.

Τελικό λεξικό πρωτεύοντος: $(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2) = (0, 1/3, 2/3, 0, 0)$
με $\zeta = 5/3$

Τελικό λεξικό δευτερεύοντος: $(y_1, y_2, z_1, z_2, z_3) =$
$(2/9, 5/9, 4/3, 0, 0)$

με $\xi = 5/3$

Π \ Δ	μη φραγμένο	μη εφικτό	βέλτιστη λύση
μη φραγμένο	X	✓	X
μη εφικτό	✓	✓	X
βέλτιστη λύση	X	X	✓

$$\sum c_j x_j \leq \sum b_i y_i$$

Στο παράδειγμα:
- $(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2) = (0, 1/3, 2/3, 0, 0)$
- $(y_1, y_2, z_1, z_2, z_3) = (2/9, 5/9, 4/3, 0, 0)$

$$\left.\begin{array}{l} * \; x_1 \cdot z_1 = 0 \cdot 4/3 = 0 \\ * \; w_1 \cdot y_1 = 0 \cdot 2/9 = 0 \\ * \; x_2 \cdot z_2 = 1/3 \cdot 0 = 0 \\ * \; w_2 \cdot y_2 = 0 \cdot 5/9 = 0 \end{array}\right\} \sim \text{χαλαρότητα}$$

Δυϊκή Simplex

$\zeta = 0 \quad -2x_1$

$-\xi = 0 + 3y_1$

Η y_2 μπαίνει, η z_2 βγαίνει

$\Updownarrow$

Η w_2 βγαίνει, η x_2 μπαίνει

(Όταν εφαρμόζω δυϊκή Simplex δεν διαλέγω πρώτα ποια θα μπει στη βάση αλλά ποια θα βγει και εδώ θα είναι μια από τις 2 αρνητικές)

Κανόνες δυϊκής Simplex

1. Επιλέγω να βγει από τη βάση μια μεταβλητή με αρνητικό σταθερό όρο
2. Για να επιλέξω ποια θα μπει στη βάση, υπολογίζω τους λόγους των αντίθετων από τους συντελεστές στην αντικειμενική συνάρτηση προς τους θετικούς συντελεστές στον περιορισμό της μεταβλητής που βγαίνει από τη βάση.

(Για να ξεκινήσω τη δυϊκή Simplex θα πρέπει οι συντελεστές στην αντικειμενική συνάρτηση να είναι ≤ 0)

→ Το (Π) είναι μη φραγμένο => (Δ) μη εφικτό

στήλη με στοιχεία ≥ 0 — γραμμή με στοιχεία ≤ 0