29/10/2021

Τυπική μορφή π.γ.π

max $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

υπό $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2$

$\vdots$

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m$

$x_1, x_2, \dots, x_n \ge 0$

- Αν έχω πρόβλημα ελαχιστοποίησης τότε αντί για min j θέτω -max -j
- Αν κάποιος περιορισμός είναι $\ge$ και θέλω $\le$ τότε πολλαπλασιάζω με -1
- Αν έχω ισότητα, π.χ. $5x_1 + 3x_2 = 7$, τότε:

$$\left.\begin{array}{l} 5x_1 + 3x_2 \le 7 \\ 5x_1 + 3x_2 \ge 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 5x_1 + 3x_2 \le 7 \\ -5x_1 - 3x_2 \le -7 \end{array}$$

Παράδειγμα: min $x_1 - 2x_2 + 4x_3$

υπό $x_1 - 3x_2 \le 10$

$x_1 - x_2 - 2x_3 \ge 3$

$(0x_2)\quad - x_3 = 2$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \le 0$, $x_3 \in \mathbb{R}$

Ξεκινάω με τις μεταβλητές απόφασης

$x_2 = -x_2' \to x_2' \ge 0$

$x_3 = x_3' - x_3'' \to x_3', x_3'' \ge 0$

Άρα: min $x_1 - 2x_2' + 4x_3' - 4x_3''$

υπό $x_1 + 3x_2' \le 10$

$x_1 + x_2' - 2x_3' + 2x_3'' \ge 3$

$x_1 - x_3' + x_3'' = 2$

$x_1, x_2', x_3', x_3'' \ge 0$

Μετά κάνω το min-max και "φτιάχνω" τους περιορισμούς.

$$-\max \; -x_1 + 2x_2' - 4x_3' + 4x_3''$$

$$\begin{aligned}
\text{υπό} \quad & x_1 + 3x_2' \le 10 \\
& -x_1 - x_2' + 2x_3' - 2x_3'' \le -3 \\
& x_1 - x_3' + x_3'' \le 2 \\
& -x_1 + x_3' - x_3'' \le -2 \\
& x_1, x_2', x_3', x_3'' \ge 0
\end{aligned}$$

→ Πάντα πριν ξεκινήσουμε την Simplex το πρόβλημά μας πρέπει να είναι σε τυπική μορφή π.γ.π

→ Για να το μετατρέψουμε σε Simplex προσθέτουμε σε κάθε ανισότητα μια περιθώρια μεταβλητή. Στη συνέχεια, το κάνουμε ισότητα και κάθε ισότητα τη λύνουμε ως προς την περιθώρια μεταβλητή.

$$\left.\begin{aligned}
-\max \quad & -x_1 - 2x_2' - 4x_3' + 4x_3'' \\
\text{υπό} \quad & w_1 = 10 - x_1 - 3x_2' \\
& w_2 = -3 + x_1 + x_2' - 2x_3' + 2x_3'' \\
& w_3 = 2 - x_1 + x_3' - x_3'' \\
& w_4 = -2 + x_1 - x_3' + x_3'' \\
& x_1, x_2', x_3', x_3'', w_1, w_2, w_3, w_4 \ge 0
\end{aligned}\right\}$$

Μορφή λεξικού Simplex (λεξικό επειδή οι w_1, w_2, w_3, w_4 εκφράζονται ως προς τις x_1, x_2', x_3', x_3'')

$$\begin{aligned}
\zeta &= 0 - x_1 - 2x_2' - 4x_3' + 4x_3'' \\
\hline
w_1 &= 10 - x_1 - 3x_2' \\
w_2 &= -3 + x_1 + x_2' - 2x_3' + 2x_3'' \\
w_3 &= 2 - x_1 + x_3' - x_3'' \\
w_4 &= -2 + x_1 - x_3' + x_3''
\end{aligned}$$

Γράφω τη μια κάτω από την άλλη

παράδειγμα 2: Να τεθεί το π.γ.π σε λεξικό Simplex

$$\max\ 5x_1 - 4x_2$$
υπό
$$x_1 - x_2 \le 6$$
$$3x_1 - 2x_2 \le 24$$
$$-2x_1 + 3x_2 \le 9$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$\max\ 5x_1 - 4x_2$$
υπό
$$w_1 = 6 - x_1 + x_2$$
$$w_2 = 24 - 3x_1 + 2x_2$$
$$w_3 = 9 + 2x_1 - 3x_2$$
$$x_1, x_2, w_1, w_2, w_3 \ge 0$$

$$\zeta = 0 + 5x_1 - 4x_2$$
$$w_1 = 6 - x_1 + x_2$$
$$w_2 = 24 - 3x_1 + 2x_2$$
$$w_3 = 9 + 2x_1 - 3x_2$$

x_1, x_2: μη βασικές μεταβλητές
w_1, w_2, w_3: βασικές μεταβλητές

Λύσεις

Για $x_1 = 0$, $x_2 = 0$: $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 6, 24, 9)$ ← Βασική λύση

Για $x_1 = 1$, $x_2 = 1$: $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (1, 1, 6, 23, 8)$ ← όχι βασική λύση

Για $x_1 = -1$, $x_2 = -1$: $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (-1, -1, 6, 25, 10)$ ← όχι εφικτή λύση αφού $x_1, x_2 \le 0$

Βέλτιστη λύση = μια εφικτή λύση που μεγιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση

Στο παραπάνω παράδειγμα έχουμε:
Βασική εφικτή λύση (βελ)
$(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 6, 24, 9)$ με $\zeta = 0$
(Θέλω να δω αν είναι βέλτιστη)

Όσο $x_2 \uparrow$ τότε $\zeta \downarrow$ αφού έχει αρνητικό πρόσημο. Θέλω να αυξήσω την x_1 που έχει θετικό συντελεστή, το θέμα είναι πόσο μπορώ να την αυξήσω

Γ_1 $\quad \zeta = 0 + 5x_1 - 4x_2$

Γ_2 $\quad w_1 = 6 - x_1 + x_2$ $\downarrow$ για x_1 και μηδεν. για $x_1 = 6$

Γ_3 $\quad w_2 = 24 - 3x_1 + 2x_2$ $\downarrow$ για x_1 και μηδεν. για $x_1 = 8$

Γ_4 $\quad w_3 = 9 + 2x_1 - 3x_2$ $\uparrow$ για x_1

Μπορώ να αυξήσω την x_1 κατά 6 μονάδες, άρα η w_1 θα γίνει μη βασική

Το νέο λεξικό που θα πάρω:

Γ_1' $\quad \zeta = 30 - 5w_1 + 1x_2$

Γ_2' $\quad x_1 = 6 - 1w_1 + 1x_2$ $\quad \uparrow x_2$

Γ_3' $\quad w_2 = 6 + 3w_1 \boxed{-1x_2}$ $\quad \downarrow x_2$ μηδεν για $x_2 = 6$

Γ_4' $\quad w_3 = 21 - 2w_1 - 1x_2$ $\quad \downarrow x_2$ μηδεν για $x_2 = 21$

1ος τρόπος: Επίλυση της γραμμής του οδηγού ως προς x_1 και αντικατάσταση στα υπόλοιπα

$\Gamma_2 \Rightarrow x_1 = 6 - w_1 + x_2 \quad (\Gamma_2')$

$\Gamma_1' \Rightarrow \zeta = 0 + 5(6 - w_1 + x_2) - 4x_2 = 30 - 5w_1 + 1x_2$

$\Gamma_3' \Rightarrow w_2 = 24 - 3(6 - w_1 + x_2) + 2x_2$

$\Rightarrow w_2 = 6 + 3w_1 - 1x_2$

$\Gamma_4' \Rightarrow w_3 = 9 + 2(6 - w_1 + x_2) - 3x_2$

$\Rightarrow w_3 = 21 - 2w_1 - x_2$

Βασική εφικτή λύση με νέο λεξικό:

β.ε.λ $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (6, 0, 0, 6, 21)$

με $\zeta = 30$ ← καλύτερη από την προηγούμενη που $\zeta = 0$

2ος τρόπος: Γραμμοπράξεις

① Λύνω τη γραμμή του οδηγού ως προς x_1

$Γ2 \Rightarrow x_1 = 6 - w_1 + x_2$

② Για την Γ1'

$Γ1' = Γ1 + 5Γ2$ (θέλω να εξαφανιστεί το x_1)

νέα παλιά γραμμή οδηγού

$J + 5w_1 = 0 + 5*6 + 5\cancel{x_1} - 5\cancel{x_1} - 4x_2 + 5x_2$

$J = 30 - 5w_1 + 1x_2$ -> η Γ1'

③ $Γ3' = Γ3 - 3Γ2$

$Γ3' \Rightarrow w_2 - 3w_1 = 24 - 3*6 - 3x_1 + 3x_1 + 2x_2 - 3x_2$

$w_2 = 6 + 3w_1 - 1x_2$

④ $Γ4' = Γ4 + 2Γ2$

$Γ4' \Rightarrow w_3 + 2w_1 = 9 + 2*6 + 2\cancel{x_1} - 2\cancel{x_1} - 3x_2 + 2x_2$

$w_3 = 21 - 2w_1 - 1x_2$

* Για να δω ξανά αν είναι βέλτιστο κοιτάω τους συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης. Εδώ πάλι αφού x_2 έχει θετικό πρόσημο πρέπει να δούμε ποια μεταβλητή θα μπει στη βάση.

3ος τρόπος: Διαδικασία Οδήγησης

Ο οδηγός είναι το a

$$\begin{pmatrix} b & \boxed{a} \\ d & c \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -b/a & 1/a \\ d - bc/a & c/a \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
J &= 30 - 5w_1 + 1x_2 \\
x_1 &= 6 - 1w_1 + 1x_2 \\
w_2 &= 6 + 3w_1 - 1x_2 \\
w_3 &= 21 - 2w_1 - 1x_2
\end{aligned}$$

- τώπου c : τα στοιχεία στη στήλη του οδηγού
- τώπου b : τα στοιχεία στη γραμμή του οδηγού
- τώπου d : εκτός γραμμής και στήλης οδηγού

Πρόβλημα 1: Απουσία αρχικής β.εφ

$\max\ -3x_1 + 4x_2 \quad \rightarrow \quad \max\ -x_0$

υπό
$$-x_0 - 4x_1 - 2x_2 \leq -8$$
$$-x_0 - 2x_1 \leq -2$$
$$-x_0 + 3x_1 + 2x_2 \leq 10$$
$$-x_0 - x_1 + 3x_2 \leq 1$$
$$-x_0 - 3x_2 \leq -2$$

$(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5) = (0, 0, -8, -2, 10, 1, -2)$

ΔΕΝ είναι εφικτή

x_0: μια νέα βοηθητική μεταβλητή, χαλαρώνω όλους τους περιορισμούς. Ψάχνω $\min x_0$, δηλαδή το ελάχιστο που πρέπει να μειώσω τους περιορισμούς.

- Το πρόβλημα βρίσκει πόσο είναι το λιγότερο που πρέπει να χαλαρώσω τους περιορισμούς για να είναι η εφικτή περιοχή μη κενή
(Αν $x_0 = 0$ τότε σημαίνει ότι το αρχικό πρόβλημά μου ήταν εφικτό)

- Βρήκαμε $\zeta = 0 \Rightarrow$ το αρχικό πρόβλημα είχε εφικτές λύσεις. Η λύση της Φάσης Ι είναι:
$(x_0, x_1, x_2, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5) =$
$$\Big(0, \underbrace{\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, 0, \frac{4}{3}, \frac{11}{3}, \frac{2}{3}, 0}_{\text{Η αρχική βελ (χωρίς } x_0 \text{ δηλαδή)}}\Big)$$

Ξαναπάω στο αρχικό πρόβλημα::

$J = -3x_1 + 4x_2$ και βάζω x_1, x_2 αυτά που βρήκα αφού είναι βασικές. Άρα:

$$J = -3\left(\frac{5}{3} + \frac{1}{4}w_1 - \frac{1}{6}w_5\right) + 4\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}w_5\right)$$

$$J = -\frac{7}{3} + \frac{3}{4}w_1 + \frac{11}{6}w_5$$

→ Επομένως η αντικειμενική μας συνάρτηση τώρα θα είναι η $J = -\frac{7}{3} + \frac{3}{4}w_1 + \frac{11}{6}w_5$ και πηγαίνουμε στην φάση II

όπου λύνουμε κανονικά το παραπάνω πρόβλημα με Simplex

Αν το λύσουμε βρίσκουμε ότι:

$(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5) = \left(\frac{11}{7}, \frac{6}{7}, 0, \frac{8}{7}, \frac{25}{7}, 0, \frac{4}{7}\right)$

με $J^* = \frac{9}{7}$