Επιχειρησιακή Έρευνα
Ενότητα 4
Δυϊκή Θεωρία Γραμμικού Προγραμματισμού

Αθανασία Μάνου

Διαπανεπιστημιακό Διατμηματικό
Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών
Μαθηματικά της Αγοράς και της Παραγωγής (ΜΑΠ)

Το πρόβλημα της μίξης των υλικών

- n τύποι προϊόντων προς παραγωγή.
- m τύποι πρώτων υλών.
- a_{ij}: ποσότητα από την πρώτη ύλη i που απαιτείται για την παραγωγή μιας μονάδας προϊόντος τύπου j.
- b_i: διαθέσιμη ποσότητα πρώτης ύλης i.
- c_j: καθαρό κέρδος από την πώληση μιας μονάδας προϊόντος τύπου j.
- Στόχος είναι η μεγιστοποίηση του συνολικού καθαρού κέρδους από την πώληση των προϊόντων.

Το πρόβλημα της μίξης - Μοντελοποίηση

- x_j: ποσότητα προϊόντος j που θα παραχθεί.
- Το πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού:

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{υπό} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, & i = 1, 2, \ldots, m \\ & x_j \ge 0, & j = 1, 2, \ldots, n. \end{array}$$

Το πρόβλημα της αποτίμησης των υλικών

- n τύποι προϊόντων προς παραγωγή.
- m τύποι πρώτων υλών.
- a_{ij}: ποσότητα από την πρώτη ύλη i που απαιτείται για την παραγωγή μιας μονάδας προϊόντος τύπου j.
- b_i: διαθέσιμη ποσότητα πρώτης ύλης i.
- c_j: καθαρό κέρδος από την πώληση μιας μονάδας προϊόντος τύπου j.
- Στόχος είναι ο καθορισμός τιμών ανά μονάδα πρώτης ύλης ώστε να ελαχιστοποιείται η συνολική αξία των πρώτων υλών στην οποία είναι πρόθυμη η επιχείρηση να τις πουλήσει αντί να παραγάγει προϊόντα.

- y_i: τιμή ανά μονάδα πρώτης ύλης i που θα πωληθεί.
- Το πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού:

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & \\ \text{υπό} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, & j = 1, 2, \ldots, n \\ & y_i \geq 0, & i = 1, 2, \ldots, m. \end{array}$$

Δυϊκότητα

- Για κάθε π.γ.π.

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{υπό} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, & i = 1, 2, \ldots, m \\ & x_j \ge 0, & j = 1, 2, \ldots, n. \end{array}$$

ορίζεται το δυϊκό του π.γ.π.

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & \\ \text{υπό} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, & j = 1, 2, \ldots, n \\ & y_i \ge 0, & i = 1, 2, \ldots, m. \end{array}$$

Παράδειγμα

- Εργοστάσιο κατεργασίας μεταλευμάτων παράγει δυο κράματα
  - Ορείχαλκο με τιμή 3 ευρώ ανά μονάδα
  - Μπρούντζο με τιμή 5 ευρώ ανά μονάδα.
- Για μια μονάδα κράματος απαιτούνται
  - 1 μονάδα ψευδαργύρου, 3 μονάδες χαλκού για ορείχαλκο
  - 2 μονάδες κασσίτερου, 2 μονάδες χαλκού για μπρούντζο.
- Το εργοστάσιο έχει
  - 4 μονάδες ψευδαργύρου,
  - 12 μονάδες κασσίτερου,
  - 18 μονάδες χαλκού.
- Βέλτιστο σχέδιο μίξης;
- Βέλτιστη αποτίμηση υλικών;

Παράδειγμα - Π.γ.π. μίξης

- Μεταβλητές απόφασης:
  x_1: Μονάδες ορείχαλκου που θα παραχθούν,
  x_2: Μονάδες μπρούντζου που θα παραχθούν.
- Π.γ.π.:

$$\begin{array}{lcccccc} \max & 3x_1 & + & 5x_2 & & \\ \text{υπό} & x_1 & & & \leq & 4 \\ & & & 2x_2 & \leq & 12 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

Παράδειγμα - Π.γ.π. αποτίμησης

- Μεταβλητές απόφασης:
  y_1: Τιμή ανά μονάδα ψευδαργύρου,
  y_2: Τιμή ανά μονάδα κασσιτέρου,
  y_3: Τιμή ανά μονάδα χαλκού.
- Π.γ.π.:

$$\begin{array}{lccccccc}
\min & 4y_1 & + & 12y_2 & + & 18y_3 & & \\
\text{υπό} & y_1 & & & + & 3y_3 & \geq & 3 \\
& & & 2y_2 & + & 2y_3 & \geq & 5 \\
& & & & & y_1, y_2, y_3 & \geq & 0.
\end{array}$$

Παράδειγμα - Π.γ.π. μίξης και αποτίμησης

- Το δυϊκό του π.γ.π.

$$\begin{array}{lcccccc}
\max & 3x_1 & + & 5x_2 & & \\
\text{υπό} & x_1 & & & \leq & 4 \\
 & & & 2x_2 & \leq & 12 \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0.
\end{array}$$

είναι το

$$\begin{array}{lcccccccc}
\min & 4y_1 & + & 12y_2 & + & 18y_3 & & \\
\text{υπό} & y_1 & & & + & 3y_3 & \geq & 3 \\
 & & & 2y_2 & + & 2y_3 & \geq & 5 \\
 & & & & & y_1, y_2, y_3 & \geq & 0.
\end{array}$$

- Το δυϊκό προέκυψε με φυσικό τρόπο από συζυγές οικονομικό πρόβλημα.

Παράδειγμα - Π.γ.π. μίξης - Φράγματα

- Έστω το π.γ.π. μίξης

$$
\begin{array}{llcllll}
\max & 3x_1 & + & 5x_2 & & \\
\text{υπό} & x_1 & & & \leq & 4 \\
 & & & 2x_2 & \leq & 12 \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0.
\end{array}
$$

- Πώς μπορώ να πάρω φράγματα για τη βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής;

Παράδειγμα - Π.γ.π. μίξης - Φράγματα

- Έστω το π.γ.π. μίξης

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & 3x_1 & + & 5x_2 & & \\ \text{υπό} & x_1 & & & \leq & 4 \\ & & & 2x_2 & \leq & 12 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

- Πώς μπορώ να πάρω φράγματα για τη βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής;
  Θεώρηση γραμμικών συνδυασμών των περιορισμών.
  Π.χ.

$$\begin{array}{ccrcrclccc} & (& x_1 & & & \leq & 4 &) & \times & 3 \\ + & (& & & 2x_2 & \leq & 12 &) & \times & 5/2 \\ \hline & & 3x_1 & + & 5x_2 & \leq & 42. & & & \end{array}$$

Παράδειγμα - Π.γ.π. μίξης - Φράγματα

- Π.γ.π:

$$
\begin{array}{lcccccc}
\max & 3x_1 & + & 5x_2 & & \\
\text{υπό} & x_1 & & & \leq & 4 \\
 & & & 2x_2 & \leq & 12 \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0.
\end{array}
$$

- Άλλος γραμμικός συνδυασμός περιορισμών - φράγμα:

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & (& x_1 & & & \leq & 4 &) & \times & 3/2 \\
+ & (& & & 2x_2 & \leq & 12 &) & \times & 2 \\
+ & (& 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 &) & \times & 1/2 \\
\hline
 & & 3x_1 & + & 5x_2 & \leq & 39. & & &
\end{array}
$$

- Καλύτερο φράγμα από το προηγούμενο.
  Μπορούμε και καλύτερα;

Παράδειγμα - Π.γ.π. μίξης - Φράγματα

- Π.γ.π:

$$\begin{array}{lcccccc} \max & 3x_1 & + & 5x_2 & & \\ \text{υπό} & x_1 & & & \leq & 4 \\ & & & 2x_2 & \leq & 12 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

- Γενικός γραμμικός συνδυασμός περιορισμών:

$$\begin{array}{cccccc} (& x_1 & & & \leq & 4) \times y_1 \\ + \; (& & & 2x_2 & \leq & 12) \times y_2 \\ + \; (& 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18) \times y_3 \\ \hline & (y_1 + 3y_3)x_1 & + & (2y_2 + 2y_3)x_2 & \leq & 4y_1 + 12y_2 + 18y_3. \end{array}$$

- Δίνει φράγμα για την αντικειμενική μόνο αν $3 \leq y_1 + 3y_3$, $5 \leq 2y_2 + 2y_3$ και $y_1, y_2, y_3 \geq 0$.

Παράδειγμα - Π.γ.π. μίξης - Φράγματα

- Π.γ.π:

$$\begin{array}{lcccccc} \max & 3x_1 & + & 5x_2 & & \\ \text{υπό} & x_1 & & & \leq & 4 \\ & & & 2x_2 & \leq & 12 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

- Γενικό φράγμα - γραμμικός συνδυασμός περιορισμών:

$$4y_1 + 12y_2 + 18y_3,$$

  εφόσον $3 \leq y_1 + 3y_3$, $5 \leq 2y_2 + 2y_3$ και $y_1, y_2, y_3 \geq 0$.
- Βέλτιστο φράγμα - γραμμικός συνδυασμών περιορισμών:

$$\begin{array}{lcccccccc} \min & 4y_1 & + & 12y_2 & + & 18y_3 & & \\ \text{υπό} & y_1 & & & + & 3y_3 & \geq & 3 \\ & & & 2y_2 & + & 2y_3 & \geq & 5 \\ & & & & & y_1, y_2, y_3 & \geq & 0. \end{array}$$

Οικονομική ερμηνεία του δυϊκού

- Ένα π.γ.π. της μορφής

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{υπό} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, & i = 1, 2, \ldots, m \\ & x_j \geq 0, & j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

  μπορεί να θεωρηθεί πρόβλημα κατανομής m πόρων σε n δραστηριότητες.

- Λύση του αρχικού (πρωτεύοντος) π.γ.π:
  Βέλτιστη ένταση ανά δραστηριότητα j.
  Π.χ. Πλήθος προϊόντων τύπου j που θα παραχθούν.
- Λύση του δυϊκού π.γ.π.:
  Μοναδιαία αξία πόρου i.
  Π.χ. Μοναδιαίες αξίες υλικών i.

Φραγματική ερμηνεία του δυϊκού

- Έστω το π.γ.π.

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{υπό} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, & i = 1, 2, \ldots, m \\ & x_j \ge 0, & j = 1, 2, \ldots, n. \end{array}$$

- Αναζητούμε άνω φράγματα για τη βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής.
- Μια ιδέα είναι να θεωρήσουμε γραμμικούς συνδυασμούς των περιορισμών.
- Πολλαπλασιάζοντας τον περιορισμό i με $y_i \ge 0$ (ώστε να μην αλλάξει φορά) και προσθέτοντας παίρνουμε

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le \sum_{i=1}^{m} y_i b_i.$$

Φραγματική ερμηνεία του δυϊκού (συνέχεια)

- Για να δώσει η ανισότητα

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq \sum_{i=1}^{m} y_i b_i$$

φράγμα για την αντικειμενική συνάρτηση πρέπει οι συντελεστές των x_j στο αριστερό μέλος να είναι μεγαλύτεροι από τους αντίστοιχους συντελεστές των x_j στην αντικειμενική, δηλ.

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

Φραγματική ερμηνεία του δυϊκού (συνέχεια)

- Λύνοντας το δυϊκό π.γ.π.

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & \\ \text{υπό} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, & j = 1, 2, \ldots, n \\ & y_i \geq 0, & i = 1, 2, \ldots, m. \end{array}$$

βρίσκουμε το καλύτερο άνω-φράγμα της αντικειμενικής του πρωτεύοντος

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{υπό} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, & i = 1, 2, \ldots, m \\ & x_j \geq 0, & j = 1, 2, \ldots, n. \end{array}$$

που μπορεί να προκύψει από γραμμικούς συνδυασμούς των περιορισμών του.

Θεώρημα

Το δυϊκό του δυϊκού ενός π.γ.π. είναι το αρχικό π.γ.π.

- Το δυϊκό του π.γ.π.

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{υπό} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, & i = 1, 2, \ldots, m \\ & x_j \geq 0, & j = 1, 2, \ldots, n. \end{array}$$

είναι το π.γ.π.

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & \\ \text{υπό} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, & j = 1, 2, \ldots, n \\ & y_i \geq 0, & i = 1, 2, \ldots, m. \end{array}$$

Συμμετρία της δυϊκότητας (συνέχεια)

- Το π.γ.π.

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & \\ \text{υπό} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, & j = 1, 2, \dots, n \\ & y_i \geq 0, & i = 1, 2, \dots, m. \end{array}$$

γράφεται σε τυπική μορφή ως

$$\begin{array}{lll} -\max & \sum_{i=1}^{m} -b_i y_i & \\ \text{υπό} & \sum_{i=1}^{m} -a_{ij} y_i \leq -c_j, & j = 1, 2, \dots, n \\ & y_i \geq 0, & i = 1, 2, \dots, m. \end{array}$$

του οποίου το δυϊκό είναι

$$\begin{array}{lll} -\min & \sum_{j=1}^{n} -c_j x_j & \\ \text{υπό} & \sum_{j=1}^{n} -a_{ij} x_j \geq -b_i, & i = 1, 2, \dots, m \\ & x_j \geq 0, & j = 1, 2, \dots, n. \end{array}$$

Συμμετρία της δυϊκότητας (συνέχεια)

- Το τελευταίο π.γ.π.

$$
\begin{array}{lll}
-\min & \sum_{j=1}^{n} -c_j x_j & \\
\text{υπό} & \sum_{j=1}^{n} -a_{ij} x_j \geq -b_i, & i = 1, 2, \ldots, m \\
 & x_j \geq 0, & j = 1, 2, \ldots, n
\end{array}
$$

γράφεται σε τυπική μορφή ως

$$
\begin{array}{lll}
\max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\
\text{υπό} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, & i = 1, 2, \ldots, m \\
 & x_j \geq 0, & j = 1, 2, \ldots, n
\end{array}
$$

που είναι ακριβώς το αρχικό.

Τυπική μορφή του δυϊκού

- Δοθέντος ενός π.γ.π.

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{υπό} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, & i = 1, 2, \ldots, m \\ & x_j \geq 0, & j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

η τυπική μορφή του δυϊκού του είναι

$$\begin{array}{lll} -\max & \sum_{i=1}^{m} -b_i y_i & \\ \text{υπό} & \sum_{i=1}^{m} -a_{ij} y_i \leq -c_j, & j = 1, 2, \ldots, n \\ & y_i \geq 0, & i = 1, 2, \ldots, m. \end{array}$$

- Λεξικό του δυϊκού = Αρνητικός ανάστροφος του λεξικού του πρωτεύοντος.

Ασθενές Δυϊκό Θεώρημα

Θεώρημα

Η αντικειμενική συνάρτηση του πρωτεύοντος σε μια εφικτή λύση του είναι μικρότερη ή ίση της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού σε μια εφικτή λύση του.

- Άμεσο από την φραγματική ερμηνεία του δυϊκού.

Ασθενές Δυϊκό Θεώρημα - Μαθ. διατύπωση

Θεώρημα

Αν $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *είναι εφικτή λύση του πρωτεύοντος και* $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ *είναι εφικτή λύση του δυϊκού, τότε*

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i.$$

- Έχουμε:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} c_j x_j &\leq \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i\right) x_j = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) y_i \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i.\end{aligned}$$

Μέθοδος Simplex και δυϊκότητα - Παράδειγμα

- Έστω το πρωτεύον π.γ.π. σε τυπική μορφή

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \max & -3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & \\ \text{υπό} & & - & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 0 \\ & -3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & \leq & 3 \\ & & & & & x_1, x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

- Το δυϊκό του σε τυπική μορφή είναι

$$\begin{array}{lrcrcr} -\max & & - & 3y_2 & & \\ \text{υπό} & & & 3y_2 & \leq & 3 \\ & y_1 & - & 4y_2 & \leq & -2 \\ & -2y_1 & - & y_2 & \leq & -1 \\ & & & y_1, y_2 & \geq & 0. \end{array}$$

Μέθοδος Simplex και δυϊκότητα - Παράδειγμα

- Το αρχικό λεξικό του πρωτεύοντος π.γ.π. είναι

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} \zeta & = & 0 & - & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 \\ \hline w_1 & = & 0 & & & + & x_2 & - & 2x_3 \\ w_2 & = & 3 & + & 3x_1 & - & 4x_2 & - & x_3. \end{array}$$

- Το αρχικό λεξικό του δυϊκού π.γ.π. είναι

$$\begin{array}{rcrcrcr} -\xi & = & 0 & & & - & 3y_2 \\ \hline z_1 & = & 3 & & & - & 3y_2 \\ z_2 & = & -2 & - & y_1 & + & 4y_2 \\ z_3 & = & -1 & + & 2y_1 & + & y_2. \end{array}$$

- Πίνακας δυϊκού = Αντίθετος ανάστροφος πρωτεύοντος.
- Η βασική λύση του πρωτεύοντος είναι εφικτή.
  Η βασική λύση του δυϊκού δεν είναι εφικτή.

Μέθοδος Simplex και δυϊκότητα - Παράδειγμα

- Το αρχικό λεξικό του πρωτεύοντος π.γ.π. είναι

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} \zeta & = & 0 & - & 3x_1 & + & \boxed{2x_2} & + & x_3 \\ \hline w_1 & = & 0 & & & + & x_2 & - & 2x_3 \\ \boxed{w_2} & = & 3 & + & 3x_1 & - & 4x_2 & - & x_3 . \end{array}$$

- Το αρχικό λεξικό του δυϊκού π.γ.π. είναι

$$\begin{array}{rcrcrcr} -\xi & = & 0 & & & - & \boxed{3y_2} \\ \hline z_1 & = & 3 & & & - & 3y_2 \\ \boxed{z_2} & = & -2 & - & y_1 & + & 4y_2 \\ z_3 & = & -1 & + & 2y_1 & + & y_2 . \end{array}$$

- Στο πρωτεύον η x_2 μπαίνει στη βάση, η w_2 βγαίνει.
- Εφαρμόζω την ανάλογη οδήγηση στο δυϊκό:
  Η z_2 βγαίνει, η y_2 μπαίνει στη βάση.

Μέθοδος Simplex και δυϊκότητα - Παράδειγμα

- Το 2ο λεξικό του πρωτεύοντος π.γ.π. είναι

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} \zeta & = & 3/2 & - & 3/2x_1 & - & 1/2w_2 & + & \boxed{1/2x_3} \\ \hline \boxed{w_1} & = & 3/4 & + & 3/4x_1 & - & 1/4w_2 & - & 9/4x_3 \\ x_2 & = & 3/4 & + & 3/4x_1 & - & 1/4w_2 & - & 1/4x_3. \end{array}$$

- Το 2ο λεξικό του δυϊκού π.γ.π. είναι

$$\begin{array}{rcrcrcr} -\xi & = & -3/2 & - & \boxed{3/4y_1} & - & 3/4z_2 \\ \hline z_1 & = & 3/2 & - & 3/4y_1 & - & 3/4z_2 \\ y_2 & = & 1/2 & + & 1/4y_1 & + & 1/4z_2 \\ \boxed{z_3} & = & -1/2 & + & 9/4y_1 & + & 1/4z_2. \end{array}$$

- Πίνακας δυϊκού = Αντίθετος ανάστροφος πρωτεύοντος
- Στο πρωτεύον: η x_3 μπαίνει στη βάση, η w_1 βγαίνει.
- Ανάλογη οδήγηση στο δυϊκό: Η z_3 βγαίνει, η y_1 μπαίνει.

Μέθοδος Simplex και δυϊκότητα - Παράδειγμα

- Το 3ο λεξικό του πρωτεύοντος π.γ.π. είναι

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\zeta & = & 5/3 & - & 4/3x_1 & - & 5/9w_2 & - & 2/9w_1 \\
\hline
x_3 & = & 1/3 & + & 1/3x_1 & - & 1/9w_2 & - & 4/9w_1 \\
x_2 & = & 2/3 & + & 2/3x_1 & - & 2/9w_2 & + & 1/9w_1.
\end{array}
$$

- Το 3ο λεξικό του δυϊκού π.γ.π. είναι

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
-\xi & = & -5/3 & - & 1/3z_3 & - & 2/3z_2 \\
\hline
z_1 & = & 4/3 & - & 1/3z_3 & - & 2/3z_2 \\
y_2 & = & 5/9 & + & 1/9z_3 & + & 2/9z_2 \\
y_1 & = & 2/9 & + & 4/9y_1 & - & 1/9z_2.
\end{array}
$$

- Πίνακας δυϊκού = Αντίθετος ανάστροφος πρωτεύοντος
- Στο πρωτεύον η βασική λύση είναι και εφικτή και βέλτιστη.
- Στο δυϊκό η βασική λύση είναι και εφικτή και βέλτιστη.

Μέθοδος Simplex και δυϊκότητα

- Περιθώριες μεταβλητές του πρωτεύοντος σε 1-1 αντιστοιχία με τις αρχικές μεταβλητές του δυϊκού.
- Αρχικές μεταβλητές του πρωτεύοντος σε 1-1 αντιστοιχία με τις περιθώριες μεταβλητές του δυϊκού.
- Ο πίνακας του αρχικού λεξικού του πρωτεύοντος είναι ο αντίθετος ανάστροφος του αρχικού λεξικού του δυϊκού.
- Οδήγηση στο πρωτεύον $\rightarrow$ Αντίστ. οδήγηση στο δυϊκό. Τότε ο πίνακας κάθε λεξικού του πρωτεύοντος είναι ο αντίθετος ανάστροφος του αντίστ. λεξικού του δυϊκού.

Μέθοδος Simplex, δυϊκότητα, βέλτιστες β.ε.λ.

- Το τελικό λεξικό της Simplex του πρωτεύοντος δίνει βέλτιστη β.ε.λ. και για το πρωτεύον και για το δυϊκό.
- Εφικτότητα βασικής λύσης του δυϊκού:
  Η βασική λύση του πρωτεύοντος είναι βέλτιστη $\Rightarrow$
  Συντελεστές αντικειμενικής πρωτεύοντος $\leq 0 \Rightarrow$
  Σταθεροί όροι περιορισμών δυϊκού $\geq 0 \Rightarrow$
  Η βασική λύση του δυϊκού είναι εφικτή.
- Βελτιστότητα βασικής λύσης του δυϊκού:
  Η βασική λύση του πρωτεύοντος είναι εφικτή $\Rightarrow$
  Σταθεροί όροι περιορισμών πρωτεύοντος $\geq 0 \Rightarrow$
  Συντελεστές αντικειμενικής δυϊκού $\leq 0 \Rightarrow$
  Η βασική λύση του δυϊκού είναι βέλτιστη.

- Το τελικό λεξικό της Simplex δίνει βέλτιστη β.ε.λ. και για το πρωτεύον και για το δυϊκό.
- Η βέλτιστη λύση του δυϊκού βρίσκεται διαβάζοντας του συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης του βέλτιστου λεξικού του πρωτεύοντος.
- Οι τιμές των βασικών μεταβλητών του δυϊκού στη βέλτιστη λύση είναι οι αντίθετοι των συντελεστών της αντικειμενικής συνάρτησης του βέλτιστου λεξικού του πρωτεύοντος.
- Η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι η ίδια και για το πρωτεύον και για το δυϊκό.
- Όλα βασίζονται στο ότι σε κάθε βήμα οι πίνακες των λεξικών είναι αντίθετοι ανάστροφοι.

Ισχυρό Δυϊκό Θεώρημα

Θεώρημα

Αν το πρωτεύον π.γ.π. έχει βέλτιστη λύση

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$$

τότε και το δυϊκό έχει άριστη λύση

$$y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)$$

και οι βέλτιστες τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων συμπίπτουν:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*.$$

Σχέση λύσεων πρωτεύοντος και δυϊκού

- Από τις 9 περιπτώσεις ζευγών λύσεων πρωτεύοντος-δυϊκού μόνο 4 είναι δυνατές:
  - Ύπαρξη βέλτιστης λύσης πρωτεύοντος, ύπαρξη βέλτιστης λύσης δυϊκού.
  - Μη-φραγμένο πρωτεύον, μη-εφικτό δυϊκό.
  - Μη-εφικτό πρωτεύον, μη-φραγμενο δυϊκό.
  - Μη-εφικτό πρωτεύον, μη-εφικτό δυϊκό.
- Αλλιώς:
  - Ύπαρξη βέλτιστης λύσης πρωτεύοντος $\Rightarrow$ Ύπαρξη βέλτιστης λύσης δυϊκού, με ίδια τιμή αντικ. συνάρτησης.
  - Μη-φραγμένο πρωτεύον $\Rightarrow$ Μη-εφικτό δυϊκό.
  - Μη-εφικτό πρωτεύον $\Rightarrow$ Μη-φραγμένο ή μη-εφικτό δυϊκό.
- Αποδ: Ασθενές και Ισχυρό Δυϊκά Θεωρήματα.

Αντιστοιχίες μεταβλητών-περιορισμών π και δ

- Έστω το π.γ.π.

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{υπό} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, & i = 1, 2, \ldots, m \\ & x_j \geq 0, & j = 1, 2, \ldots, n. \end{array}$$

και το δυϊκό του π.γ.π.

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & \\ \text{υπό} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, & j = 1, 2, \ldots, n \\ & y_i \geq 0, & i = 1, 2, \ldots, m. \end{array}$$

- Υπάρχει μια αντιστοιχία περιορισμών του αρχικού και μεταβλητών του δυϊκού και μεταβλητών του αρχικόυ και περιορισμών του δυϊκού.

Αντιστοιχίες μεταβλητών-περιορισμών π και δ

- Έστω το π.γ.π.

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{υπό} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, & i = 1, 2, \ldots, m \\ & x_j \geq 0, & j = 1, 2, \ldots, n. \end{array}$$

και το δυϊκό του π.γ.π.

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & \\ \text{υπό} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, & j = 1, 2, \ldots, n \\ & y_i \geq 0, & i = 1, 2, \ldots, m. \end{array}$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \right) \leftrightarrow y_i, \quad \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \right) \leftrightarrow x_j.$$

Αντιστοιχίες αρχικών-περιθωρίων π και δ

- Εισάγωντας περιθώριες το πρωτεύον γίνεται:

$$
\begin{array}{lll}
\max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\
\text{υπό} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + w_i = b_i, & i = 1, 2, \ldots, m \\
 & x_j \geq 0, & j = 1, 2, \ldots, n, \\
 & w_i \geq 0, & i = 1, 2, \ldots, m,
\end{array}
$$

  και το δυϊκό του γίνεται

$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & \\
\text{υπό} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - z_j = c_j, & j = 1, 2, \ldots, n \\
 & y_i \geq 0, & i = 1, 2, \ldots, m, \\
 & z_j \geq 0, & j = 1, 2, \ldots, n.
\end{array}
$$

- Υπάρχει αντιστοιχία αρχικών-περιθώριων μεταβλητών μεταξύ των δυο προβλημάτων: $x_j \leftrightarrow z_j$, $w_i \leftrightarrow y_i$.

Θεώρημα συμπληρωματικής χαλαρότητας

Θεώρημα

Αν το πρωτεύον π.γ.π. έχει βέλτιστη λύση

$$(x^*, w^*) = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, w_1^*, w_2^*, \dots, w_m^*)$$

και το δυϊκό έχει αντίστοιχη βέλτιστη λύση

$$(z^*, y^*) = (z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*, y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$$

τότε

$$\begin{aligned} x_j^* z_j^* &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ w_i^* y_i^* &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Θεώρημα συμπληρωματικής χαλαρότητας - Αποδ.

- Απόδειξη ασθενούς δυϊκού θεωρήματος με περιθώριες:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} c_j x_j &\leq \sum_{j=1}^{n}(c_j + z_j)x_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i\right)x_j \\ &= \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)y_i = \sum_{i=1}^{m}(b_i - w_i)y_i \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i.\end{aligned}$$

- Από ισχυρό δυϊκό θεώρημα $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$, οπότε οι ανισότητες πρέπει να ισχύουν ως ισότητες: $z_j^* x_j^* = 0,\ j = 1, 2, \ldots, n$ και $w_i^* y_i^* = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m$.

Δυϊκή Simplex - Ιδέα

- Η δυϊκή μέθοδος Simplex προκύπτει εφαρμόζοντας τη μέθοδο Simplex στο δυϊκό πρόβλημα και μεταφράζοντας με όρους λεξικών του πρωτεύοντος.
- Η μετάφραση γίνεται με βάση το ότι σε κάθε βήμα ο πίνακας του λεξικού του πρωτεύοντος είναι ο αντίθετος ανάστροφος του πίνακα του λεξικού του δυϊκού.

Δυϊκή Simplex - Παράδειγμα

- Έχουμε το λεξικό του πρωτεύοντος π.γ.π.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
\zeta & = & 0 & - & 2x_1 & - & 4x_2 & & & - & 6x_4 \\
\hline
w_1 & = & -3 & + & x_1 & - & 2x_2 & & & + & x_4 \\
w_2 & = & -5 & - & 2x_1 & + & 3x_2 & & & + & 2x_4 \\
w_3 & = & 8 & - & 2x_1 & - & 3x_2 & - & 3x_3 & - & 2x_4
\end{array}
$$

με δυϊκό π.γ.π.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
-\xi & = & 0 & + & 3y_1 & + & 5y_2 & - & 8y_3 \\
\hline
z_1 & = & 2 & - & y_1 & + & 2y_2 & + & 2y_3 \\
z_2 & = & 4 & + & 2y_1 & - & 3y_2 & + & 3y_3 \\
z_3 & = & 0 & & & & & + & 3y_3 \\
z_4 & = & 6 & - & y_1 & - & 2y_2 & + & 2y_3.
\end{array}
$$

- Simplex στο δυϊκό: η y_2 μπαίνει, η z_2 βγαίνει.
  Στο πρωτεύον: η w_2 βγαίνει, η x_2 μπαίνει.

Δυϊκή Simplex - Παράδειγμα (συνέχεια)

- Έχουμε το 2ο λεξικό του πρωτεύοντος π.γ.π.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
\zeta & = & -20/3 & - & 14/3x_1 & - & 4/3w_2 & & & - & 10/3x_4 \\
\hline
w_1 & = & -19/3 & - & 1/3x_1 & - & 2/3w_2 & & & + & 7/3x_4 \\
x_2 & = & 5/3 & + & 2/3x_1 & + & 1/3w_2 & & & - & 2/3x_4 \\
w_3 & = & 3 & - & 4x_1 & - & w_2 & - & 3x_3 & &
\end{array}
$$

με αντίστοιχο λεξικό του δυϊκού π.γ.π.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
-\xi & = & 20/3 & + & 19/3y_1 & - & 5/3z_2 & - & 3y_3 \\
\hline
z_1 & = & 14/3 & + & 1/3y_1 & - & 2/3z_2 & + & 4y_3 \\
y_2 & = & 4/3 & + & 2/3y_1 & - & 1/3z_2 & + & y_3 \\
z_3 & = & 0 & & & & & + & 3y_3 \\
z_4 & = & 10/3 & - & 7/3y_1 & + & 2/3z_2 & &
\end{array}
$$

- Στο δυϊκό: η y_1 μπαίνει, η z_4 βγαίνει.
  Στο πρωτεύον: η w_1 βγαίνει, η x_4 μπαίνει.

Δυϊκή Simplex - Παράδειγμα (συνέχεια)

- Έχουμε το 3ο λεξικό του πρωτεύοντος π.γ.π.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
\zeta & = & -110/7 & - & 36/7x_1 & - & 16/7w_2 & & & - & 10/7w_1 \\
\hline
x_4 & = & 19/7 & + & 1/7x_1 & + & 2/7w_2 & & & + & 3/7w_1 \\
x_2 & = & -1/7 & + & 4/7x_1 & + & 1/7w_2 & & & - & 2/7w_1 \\
w_3 & = & 3 & - & 4x_1 & - & w_2 & - & 3x_3 & &
\end{array}
$$

με αντίστοιχο λεξικό του δυϊκού π.γ.π.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
-\xi & = & 110/7 & - & 19/7z_4 & + & \boxed{1/7z_2} & - & 3y_3 \\
\hline
\boxed{z_1} & = & 36/7 & - & 1/7z_4 & - & 4/7y_2 & + & 4y_3 \\
y_2 & = & 16/7 & - & 2/7z_4 & - & 1/7y_2 & + & y_3 \\
z_3 & = & 0 & & & & & + & 3y_3 \\
y_1 & = & 10/7 & - & 3/7z_4 & + & 2/7y_2 & &
\end{array}
$$

- Στο δυϊκό: η z_2 μπαίνει, η z_1 βγαίνει.
  Στο πρωτεύον: η x_2 βγαίνει, η x_1 μπαίνει.

Δυϊκή Simplex - Παράδειγμα (συνέχεια)

- Έχουμε το 4ο λεξικό του πρωτεύοντος π.γ.π.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
\zeta & = & -17 & - & 9x_2 & - & w_2 & & & - & 4w_1 \\
\hline
x_4 & = & 11/4 & + & 1/4x_2 & + & 1/4w_2 & & & + & 1/2w_1 \\
x_1 & = & 1/4 & + & 7/4x_2 & - & 1/4w_2 & & & + & 1/2w_1 \\
w_3 & = & 2 & - & 7x_2 & & & - & 3x_3 & - & 2w_1
\end{array}
$$

με αντίστοιχο λεξικό του δυϊκού π.γ.π.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
-\xi & = & 17 & - & 11/4z_4 & - & 1/4z_1 & - & 2y_3 \\
\hline
z_2 & = & 9 & - & 1/4z_4 & - & 7/4z_1 & + & 7y_3 \\
y_2 & = & 1 & - & 1/4z_4 & + & 1/4z_1 & & \\
z_3 & = & 0 & & & & & + & 3y_3 \\
y_1 & = & 4 & - & 1/2z_4 & - & 1/2z_1 & + & 2y_3
\end{array}
$$

- Τα λεξικά αντιστοιχούν σε βέλτιστες β.ε.λ.

Κανόνες οδήγησης - Επιλογή εξερχ. μεταβλητής

- Στο δυϊκό λεξικό διαλέγουμε για εισερχόμενη μεταβλητή, κάποια που έχει θετικό συντελεστή στην αντικειμενική συνάρτηση.

  $$\downarrow$$

  Στο πρωτεύον λεξικό διαλέγουμε για εξερχόμενη μεταβλητή κάποια που έχει αρνητικό σταθερό όρο στο δεξιό σκέλος των περιορισμών.

Κανόνες οδήγησης - Επιλογή εισερχ. μεταβλητής

- Στο δυϊκό λεξικό διαλέγουμε για εξερχόμενη μεταβλητή, αυτή που αντιστοιχεί στο μικρότερο λόγο σταθερού όρου προς την απόλυτη τιμή αρνητικού συντελεστή της εισερχόμενης μεταβλητής του αντίστοιχου περιορισμού.

$$\downarrow$$

Στο πρωτεύον λεξικό διαλέγουμε για εισερχόμενη μεταβλητή, αυτή που αντιστοιχεί στο μικρότερο λόγο αντίθετου συντελεστή της αντικειμενικής συνάρτησης προς το θετικό συντελεστή της εξερχόμενης μεταβλητής του αντίστοιχου περιορισμού.

Simplex και Δυϊκή Simplex

- Αλγόριθμος Simplex:
  - Αρχίζει από βασική εφικτή λύση.
  - Διατηρεί την εφικτότητα σε κάθε επανάληψη.
  - Βελτιώνει την αντικειμενική σε κάθε επανάληψη.
  - Καταλήγει σε βέλτιστη β.ε.λ. ή αποφαίνεται για μη-φραγμένο.
- Δυϊκός αλγόριθμος Simplex:
  - Αρχίζει από βασική "βέλτιστη" λύση (δηλ. οι συντελεστές των μη-βασικών μεταβλητών στην αντικειμενική ≤ 0).
  - Διατηρεί την "βελτιστότητα" σε κάθε επανάληψη.
  - Μειώνει την αντικειμενική $(-\xi)$ σε κάθε επανάληψη.
  - Καταλήγει σε βέλτιστη β.ε.λ. ή αποφαίνεται για μη-εφικτό.