Επιχειρησιακή Έρευνα
Ενότητα 1: Εισαγωγή

Αθανασία Μάνου

Διαπανεπιστημιακό Διατμηματικό
Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών
Μαθηματικά της Αγοράς και της Παραγωγής (ΜΑΠ)

8 Οκτωβρίου 2021

Επιχειρησιακή Έρευνα

- Επιχειρησιακή Έρευνα=
  - Μαθηματικά μοντέλα μελέτης - βελτιστ. διαδικασιών,
  - Μαθηματικές μέθοδοι βέλτιστης λήψης αποφάσεων.

Κλάδοι της Επιχειρησιακής Έρευνας

- Γραμμικός Προγραμματισμός.
- Μη-Γραμμικός Προγραμματισμός.
- Ακέραιος Προγραμματισμός - Συνδυαστική Βελτιστοποίηση.
- Δυναμικός Προγραμματισμός.
- Θεωρία Παιγνίων.
- Θεωρία Ελέγχου Αποθεμάτων.
- Θεωρία Ουρών Αναμονής.
- ...

Περιεχόμενα του μαθήματος

- Κατηγορίες προβλημάτων βελτιστοποίησης.
- Μοντελοποίηση προβλημάτων βελτιστοποίησης.
- Κλασικά προβλήματα βελτιστοποίησης.
- Επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης στον ΗΥ.
- Συνοπτική θεωρία Γραμμικού Προγραμματισμού.
- Συνοπτική θεωρία Μη-Γραμμικού Προγραμματισμού.
- Εισαγωγή στον Δυναμικό Προγραμματισμό.
- Επίλυση προβλημάτων Δυναμικού Προγραμματισμού.

Βασικές πηγές του μαθήματος

- Vanderbei, R.J. (2014) Linear Programming: Foundations and Extensions, 4th Edition. Springer.
- Hillier, F.S. and Lieberman, G.J. (2015) Introduction to Operations Research, 10th Edition. McGraw Hill.
- Fourer, R., Gay, D.M. and Kernighan, B.W. (2003) AMPL: A Modeling Language for Mathematical Programming, 2nd Edition. Duxbury Thomson.
- Taha, H.A. (2017) Operations Research: An Introduction, 10th Edition. Pearson.

Γενικό πρόβλημα μαθηματικού προγραμματισμού

- x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$: μεταβλητές απόφασης.
- ζ: η αντικειμενική συνάρτηση.
- Αντικειμενική συνάρτηση:

$$\zeta = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

- Τυπικός συναρτησιακός περιορισμός:

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq \text{ ή } = \text{ ή } \geq b.$$

- Τυπικός περιορισμός μεταβλητών:

$$x_j \in A_j.$$

Γενικό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού

- x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$: μεταβλητές απόφασης.
- ζ: η αντικειμενική συνάρτηση.
- Γραμμική αντικειμενική συνάρτηση:

$$\zeta = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n.$$

- Τυπικός γραμμικός περιορισμός:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leq \text{ ή } = \text{ ή } \geq b.$$

- Τυπικός περιορισμός μεταβλητών:

$$x_j \geq 0 \text{ ή } \leq 0 \text{ ή } \in \mathbb{R}.$$

Προϋποθέσεις γραμμικού προγραμματισμού

- **Αναλογικότητα:** Η συνεισφορά μιας μεταβλητής στην αντικειμενική και στους περιορισμούς είναι ανάλογη της τιμής της.
- **Προσθετικότητα:** Η συνεισφορά μιας μεταβλητής στην αντικειμενική και στους περιορισμούς δεν εξαρτάται από άλλες μεταβλητές.
  Η συνολική συνεισφορά των μεταβλητών αποφάσεων ισούται με το άθροισμα των επιμέρους συνεισφορών τους.
- **Διαιρετότητα:** Κάθε μεταβλητή παίρνει πραγματικές τιμές.
- **Βεβαιότητα - Ντετερμινισμός:** Οι παράμετροι είναι απόλυτα γνωστές. Δεν υπεισέρχεται τυχαιότητα.

Κεντρική θέση του Γραμμικού Προγραμματισμού

- Πληθώρα εφαρμογών.
- Κομψή και πλήρης μαθηματική θεωρία.
- Ύπαρξη αποτελεσματικών αλγορίθμων.
- Υπόβαθρο για τον ακέραιο προγραμματισμό.
- Υπόβαθρο για το μη-γραμμικό προγραμματισμό.

Κλασική βελτιστ. / Γραμμικός Προγραμματισμός

- Κλασική βελτιστοποίηση με απειροστικό λογισμό:
  - Μια μεταβλητή,
  - Μη-γραμμική αντικειμενική συνάρτηση,
  - Περιορισμός της μεταβλητής σε διάστημα.
- Γραμμικός προγραμματισμός:
  - Μεγάλο πλήθος μεταβλητών,
  - Γραμμική αντικειμενική συνάρτηση,
  - Μεγάλο πλήθος γραμμικών περιορισμών.

Κλασικά προβλήματα

- Το πρόβλημα της μίξης των υλικών.
- Το πρόβλημα της αποτίμησης των υλικών.
- Το πρόβλημα της δίαιτας.
- Το πρόβλημα της μεταφοράς.
- Προγραμματισμός παραγωγής.

Το πρόβλημα της μίξης των υλικών

- n τύποι προϊόντων προς παραγωγή.
- m τύποι πρώτων υλών.
- a_{ij}: ποσότητα από την πρώτη ύλη i που απαιτείται για την παραγωγή μιας μονάδας προϊόντος τύπου j.
- b_i: διαθέσιμη ποσότητα πρώτης ύλης i.
- c_j: καθαρό κέρδος από την πώληση μιας μονάδας προϊόντος τύπου j.
- Στόχος: Μεγιστοποίηση συνολικού καθαρού κέρδους από την πώληση των προϊόντων.

Το πρόβλημα της μίξης - Μοντελοποίηση

- x_j: ποσότητα προϊόντος j που θα παραχθεί.
- Π.γ.π.:

$$
\begin{array}{lll}
\max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\
\text{υπό} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, & i = 1, 2, \ldots, m \\
 & x_j \geq 0, & j = 1, 2, \ldots, n.
\end{array}
$$

Το πρόβλημα της αποτίμησης των υλικών

- n τύποι προϊόντων προς παραγωγή.
- m τύποι πρώτων υλών.
- a_{ij}: ποσότητα από την πρώτη ύλη i που απαιτείται για την παραγωγή μιας μονάδας προϊόντος τύπου j.
- b_i: διαθέσιμη ποσότητα πρώτης ύλης i.
- c_j: καθαρό κέρδος από την πώληση μιας μονάδας προϊόντος τύπου j.
- Στόχος: Καθορισμός τιμών ανά μονάδα πρώτης ύλης ώστε να ελαχιστοποιείται η συνολική αξία των πρώτων υλών στην οποία είναι πρόθυμη η επιχείρηση να τις πουλήσει αντί να παραγάγει προϊόντα.

Το πρόβλημα της αποτίμησης - Μοντελοποίηση

- y_i: τιμή ανά μονάδα πρώτης ύλης i που θα πωληθεί.
- Π.γ.π.:

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & \\ \text{υπό} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, & j = 1, 2, \ldots, n \\ & y_i \geq 0, & i = 1, 2, \ldots, m. \end{array}$$

Το πρόβλημα της δίαιτας

- n τύποι φαγητών προς κατανάλωση.
- m είδη θρεπτικών συστατικών.
- a_{ij}: η ποσότητα θρεπτικού συστατικού i που περιέχεται σε μια μερίδα φαγητού j.
- b_i: η ελάχιστη ημερήσια ποσότητα θρεπτικού συστατικού i που επιβάλλεται να προσληφθεί.
- d_i: η μέγιστη ημερήσια ποσότητα θρεπτικού συστατικού i που επιτρέπεται να προσληφθεί.
- c_j: κόστος μιας μερίδας φαγητού j.
- Στόχος: Καθορισμός της δίαιτας ελάχιστου κόστους που σέβεται τους διατροφικούς περιορισμούς.

Το πρόβλημα της δίαιτας - Μοντελοποίηση

- x_j: μερίδες φαγητού j που θα αγοραστούν.
- Π.γ.π.:

$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\
\text{υπό} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, & i = 1, 2, \ldots, m \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq d_i, & i = 1, 2, \ldots, m \\
& x_j \geq 0, & j = 1, 2, \ldots, n.
\end{array}
$$

Το πρόβλημα της μεταφοράς

- m σημεία παραγωγής, n σημεία κατανάλωσης.
- s_i: η προσφορά του σημείου i.
- d_j: η ζήτηση του σημείου j.
- c_{ij}: κόστος μεταφοράς μιας μονάδας προϊόντος από το i στο j.
- Στόχος: Ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους μεταφοράς από τα σημεία παραγωγής στα σημεία κατανάλωσης.

Το πρόβλημα της μεταφοράς - Μοντελοποίηση

- x_{ij}: ποσότητα προς μεταφορά από το i στο j.
- Π.γ.π.:

$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} & \\
\text{υπό} & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq d_j, & j = 1, 2, \ldots, n \\
& \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq s_i, & i = 1, 2, \ldots, m \\
& x_{ij} \geq 0, & i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n.
\end{array}
$$

Προγραμματισμός παραγωγής

- Εταιρεία προγραμματίζει την παραγωγή προϊόντος.
- t: Αριθμός περιόδων παραγωγής.
- $i_{initial}$: Αρχικό απόθεμα προϊόντος.
- Στην αρχή κάθε περιόδου, η εταιρεία παράγει νέα προϊόντα και αμέσως μετά ικανοποιεί την τρέχουσα ζήτηση.
- d_n: Ζήτηση προϊόντος την περίοδο n, $n = 1, 2, \ldots, t$.
- i_{final}: Τελικό απαιτητό απόθεμα προϊόντος.
- c_n: Κόστος παραγωγής ανά μονάδα προϊόντος την περίοδο n, $n = 1, 2, \ldots, t$.
- h_n: Κόστος αποθήκευσης υπερβάλλοντος προϊόντος ανά μονάδα προϊόντος την περίοδο n, $n = 1, 2, \ldots, t$.
- Η ζήτηση κάθε περιόδου πρέπει να ικανοποιείται άμεσα (no backlogging).
- Στόχος: Ελαχιστοποίηση κόστους παραγ./αποθήκευσης.

Προγραμματισμός παραγωγής - Μοντελοποίηση

- x_n: ποσότητα παραγωγής προϊόντος την περίοδο n, $n = 1, 2, \ldots, t$.
- y_n: απόθεμα προϊόντος την περίοδο n, $n = 1, 2, \ldots, t$ (αμέσως μετά την ικανοποίηση της ζήτησης).
- Π.γ.π.:

$$
\begin{array}{ll}
\min & \sum_{n=1}^{t}(c_n x_n + h_n y_n) \\
\text{υπό} & i_{initial} + x_1 = d_1 + y_1 \\
& y_{n-1} + x_n = d_n + y_n,\ n = 2, 3, \ldots, t \\
& y_t = i_{final} \\
& x_n, y_n \geq 0,\ n = 1, 2, \ldots, t.
\end{array}
$$

Προβλήματα που ανάγονται σε π.γ.π.

- Προβλήματα με απόλυτες τιμές μεταβλητών.
- Προβλήματα max – min και min – max:
  Μεγ. κατά τμήματα γραμμικών κοίλων συναρτήσεων,
  Ελαχ. κατά τμήματα γραμμικών κυρτών συναρτήσεων.

Αντικειμενική συνάρτηση με απόλυτες τιμές

- Πρόβλημα ελαχιστοποίησης.
- Στην αντικειμενική συνάρτηση υπάρχει όρος $c_j|x_j|$ με $c_j > 0$ και $x_j \in \mathbb{R}$.
- Θέτουμε:
  $x_j = x_j^+ - x_j^-$,
  $|x_j| = x_j^+ + x_j^-$,
  $x_j^+ \geq 0$, $x_j^- \geq 0$.
- Στη βέλτιστη λύση θα είναι σίγουρα $x_j^+ x_j^- = 0$ (λόγω ελαχιστοποίησης της αντικειμενικής και $c_j > 0$).

Παράδειγμα

- Το πρόβλημα μη-γραμμικού προγραμματισμού

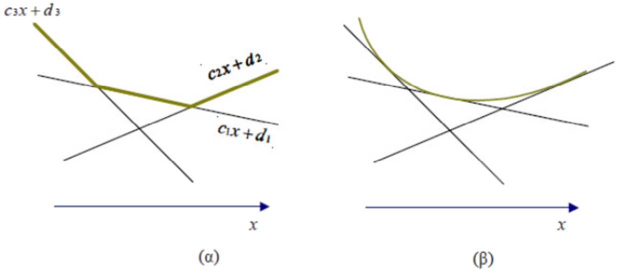
$$\begin{array}{ll} \min & 2|x| + |y| \\ \text{υπό} & 3x + 4y \geq 12 \\ & 5x + 2y \geq 10 \end{array}$$

γράφεται ισοδύναμα ($x = x^+ - x^-$, $y = y^+ - y^-$)

$$\begin{array}{ll} \min & 2x^+ + 2x^- + y^+ + y^- \\ \text{υπό} & 3x^+ - 3x^- + 4y^+ - 4y^- \geq 12 \\ & 5x^+ - 5x^- + 2y^+ - 2y^- \geq 10 \\ & x^+, x^-, y^+, y^- \geq 0. \end{array}$$

Προβλήματα max – min και min – max

- Κατά τμήματα γραμμική κυρτή συνάρτηση = Μέγιστο γραμμικών συναρτήσεων
- Π.χ. $\max(c_1x + d_1, c_2x + d_2, c_3x + d_3)$.



- (α) Κατά τμήματα γραμμική κυρτή συνάρτηση.
  (β) Προσέγγιση κυρτής συνάρτησης από κατά τμήματα γραμμική.

Προβλήματα max – min και min – max

- Πρόβλημα ελαχιστοποίησης.
- Η αντικειμενική συνάρτηση είναι κατά τμήματα γραμμική κυρτή συνάρτηση.
- Την εκφράζουμε ως $\max_{i=1,2,\dots,m}(\mathbf{c}_i^T\mathbf{x} + \mathbf{d}_i)$.
- Την αντικαθιστούμε με μια νέα μεταβλητή z.
- Προσθέτουμε τους περιορισμούς $z \geq \mathbf{c}_i^T\mathbf{x} + \mathbf{d}_i$, $i = 1, 2, \dots, m$.
- Στη βέλτιστη λύση θα είναι $z = \mathbf{c}_i^T\mathbf{x} + \mathbf{d}_i$ για κάποιο $i = 1, 2, \dots, m$ (λόγω ελαχιστοποίησης της αντικειμενικής).
- Οπότε πράγματι θα είναι $z = \max_{i=1,2,\dots,m}(\mathbf{c}_i^T\mathbf{x} + \mathbf{d}_i)$ στη βέλτιστη λύση.

Παράδειγμα

- Το πρόβλημα μη-γραμμικού προγραμματισμού

$$\begin{array}{ll} \min & \max_{i=1,2,\ldots,m}(\mathbf{c}_i^T\mathbf{x}+\mathbf{d}_i) \\ \text{υπό} & \mathbf{A}\mathbf{x}\geq\mathbf{b} \end{array}$$

γράφεται ισοδύναμα ($z=\max_{i=1,2,\ldots,m}(\mathbf{c}_i^T\mathbf{x}+\mathbf{d}_i)$)

$$\begin{array}{ll} \min & z \\ \text{υπό} & z\geq\mathbf{c}_i^T\mathbf{x}+\mathbf{d}_i,\ i=1,2,\ldots,m \\ & \mathbf{A}\mathbf{x}\geq\mathbf{b}. \end{array}$$

Προβλήματα max – min και min – max

- Αν έχουμε ελαχιστοποίηση κυρτής συνάρτησης, μπορούμε να την προσεγγίσουμε από κατά τμήματα γραμμική κυρτή συνάρτηση και να ανάγουμε σε προσεγγιστικό π.γ.π.
- Αν έχουμε μεγιστοποίηση κατά τμήματα γραμμικής κοίλης συνάρτησης, η μέθοδος προσαρμόζεται και ανάγουμε σε π.γ.π.
- Περιορισμός $f(\mathbf{x}) \leq b$ με $f(\mathbf{x}) = \max_{i=1,2,\ldots,m}(\mathbf{c}_i^T\mathbf{x} + \mathbf{d}_i)$ μπορεί να αντικατασταθεί από τους γραμμικούς περιορισμούς $\mathbf{c}_i^T\mathbf{x} + \mathbf{d}_i \leq b$, $i = 1, 2, \ldots, m$.
- $|x| = \max(x, -x)$. Επομένως η μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί όταν εμφανίζονται απόλυτες τιμές μεταβλητών.