Η από κοινού κατανομή των X, Y

(X,Y) δισδιάστατη τμ.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} P(X=x, Y=y) & (x,y) \in S_X \times S_Y \text{ αν } X,Y \text{ διακριτές} \\ \dfrac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y} & (x,y) \in S_X \times S_Y \text{ αν } X,Y \text{ συνεχείς} \end{cases}$$

S_X σύνολο τιμών της X

$F_{X,Y}(x,y)$ από κοινού σ.κ.

Περιθώρια σ.π. ή σππ

$$f_X(x) = \begin{cases} \sum_y f(x,y) \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \end{cases}$$

περιθώρια σπ ή σ.π.π της Y

$$f_Y(y) = \begin{cases} \sum_y f(x,y) \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \end{cases}$$

Δεσμευμένη σ.π. ή σππ της Y δεδομένης της X

$$f_{Y/X}(y/x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} = g(y;x) \quad , \quad f_{X/Y}(x/y) = \frac{f(x,y)}{f(y)}$$

$$E(X|Y=y) = \begin{cases} \sum_x x\, f_{X/Y}(x,y) & (X,Y) \text{ διακριτές} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X/Y}(x/y)\,dy & (X,Y) \text{ συνεχής} \end{cases} = m(y) \text{ συνάρτηση του } y.$$

Θεώρημα (Διπλής Μέσης Τιμής)

Έστω X, Y με πεπερασμένες ροπές $2^{ης}$ τάξης. Τότε

(α) $E(X) = E[E(X|Y)]$

(β) $Var(X) = E[Var(X|Y)] + Var[E(X|Y)]$

απόδειξη

Χ.Β.Γ. X, Y συνεχείς

(α) $E(X|Y) = m(y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x f(x,y)}{f_Y(y)}\,dx = \frac{1}{f_Y(y)} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x,y)\,dx.$

$$E[m(Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} m(y) \cdot f_Y(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) \frac{1}{f_Y(y)} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} x \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx =$$

$$= E(X)$$

Q.E.D.

$\boxed{\pi\chi}$ $Y = \#$ ριψεων , 1^{η} φορά Κ. $Y \sim Geom(p)$

$P[Y=y] = (1-p)^{y-1} \cdot p \quad y = 1, 2, \dots \qquad E(Y) = ;$

α' τρόπος $E(Y) = \sum_{y=1}^{\infty} y (1-p)^{y-1} \cdot p = p \cdot \sum_{y=1}^{\infty} y (1-p)^{y-1} \ (*) \Rightarrow$

$E(Y) = p \cdot \frac{1}{[1-(1-p)]^2} = \frac{1}{p}$

$|a| < 1$

$(*)$ $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$

$\sum_{n=0}^{\infty} n a^{n-1} = \frac{1}{(1-a)^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} n a^{n-1} = \frac{1}{(1-a)^2}$

β' τρόπος Εστω $X = \begin{cases} 1 & \text{αν έρθει } 1^{\eta} \text{ ρίψη Κ} \\ 0 & \text{'' '' '' '' Γ} \end{cases}$ $P(X=1) = p$

$X \sim Bernoulli(p)$

$E(Y) = E[E(Y|X)] =$

$= E(Y|X=1) P(X=1) + E(Y|X=0) P(X=0) \Rightarrow$

$E(Y) = 1 \cdot p + (1 + E(Y))(1-p) \Rightarrow$

Λυνω ως προς $E(Y) \longrightarrow E(Y) = 1/p$

Πιθανογεννήτρια ανάρτησης

X διακριτή τμ. με τιμές στο $\{0,1,\ldots\}$, όπου $P(X=x)$

$$\boxed{P_X(u)=E(u^X)=\sum_{x=0}^{\infty}P(X=x)\,u^x} \qquad |u|\le 1 \qquad \exists$$

Ιδιότητες

- $P_X(0)=P(X=0)$ — $P_X(1)=1$
- $P(X=n)=\dfrac{P_X^{(n)}(0)}{n!}$ $n=0,1,\ldots$ $\qquad P_X(u)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{P_X^{(n)}(0)}{n!}u^n$ (βλ. αναπτ.)
- $P(X=n)=P(Y=n)\ \forall n=0,1,\ldots \iff P_X(u)=P_Y(u)$
- $X_1,\ldots,X_n$ ανεξάρτητες τμ ≥ 0 ακέραιες, $S_n=\sum_{i=0}^{n}X_i$

  $P_{S_n}(u)=P_{X_1}(u)\,P_{X_2}(u)\cdot\ldots\cdot P_{X_n}(u)$
- Αν X_i ισόνομες $P_{S_n}(u)=(P_X(u))^n$
- $P_X^{(n)}(1)=E[X(X-1)(X-2)\cdot\ldots\cdot(X-n+1)]$ n-οστή παραγοντική ροπή

  $\Rightarrow E(X)=P_X'(1)$

  $V(X)=E[X(X-1)]+E(X)-E^2(X)=P_X''(1)+P_X'(1)-[P_X'(1)]^2$

$X \sim \text{Bernoulli}(p)$ $\qquad P_X(u) = 1 - p + pu \Rightarrow E$

$X \sim \text{Binomial}(n, p)$ $\qquad P_X(u) = (1 - p + pu)^n \Rightarrow$ $\qquad X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ $\quad X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ ανεξάρτητες

$E(X) = P_X''(1) = n \cdot p \qquad V(X) = npq$

$X \sim \text{Geom}(p)$ $\qquad X = \#$ αποτυχιών μέχρι 1η επιτυχία $\quad P(E) = p \quad P(A) = q = 1 - p$ $\qquad P(X = x) = q^x p \quad x = 0, 1, \ldots$

$P_X(u) = \dfrac{p}{1 - (1-p)z} \qquad |z| < \dfrac{1}{1-p} \qquad \Rightarrow E(X) = \dfrac{1-p}{p} \qquad Var(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$

$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ $\qquad P_X(u) = e^{\lambda(u-1)} \Rightarrow E(X) = \lambda \qquad Var(X) = \lambda$

$X \sim \text{NegBin}(r, p)$ $\qquad X = \#$ αποτυχιών μέχρι την r-οστή επιτυχία

$P(X = x) = \binom{x + r - 1}{r - 1} p^r q^x \qquad x = 0, 1, \ldots$

$P_X(u) = \left(\dfrac{p}{1 - (1-p)z}\right)^r \qquad |z| < \dfrac{1}{1-p} \qquad E(X) = r \cdot \dfrac{1-p}{p} \qquad Var(X) = r\,\dfrac{1-p}{p^2}$

$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad X_i \sim \text{Geom}(p)$ ανεξάρτητες

Δείξτε τα!

Ροπογεννήτρια συνάρτηση (Moment Generating Function)

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \begin{cases} \sum_x e^{tx} P(X=x) \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)\,dx \end{cases}$$

Μπορεί να $\nexists$ για κάποιες τιμ X

Δηλαδή να $\nexists$ $a>0$ τω

$M_X(t) = E(e^{tX})$ για $|t|<a$.

$X \overset{d}{=} Y$ (ισόνομες) $\Longleftrightarrow M_X(t) = M_Y(t)$, $t \in [-a, a]$

Δηλαδή αν η $M_X(t)$ $\exists$ και είναι πεπερασμένη σε κάποια περιοχή γύρω από το $t=0$, τότε η κατανομή της X προσδιορίζεται μοναδικά

(Ροπές)

- $M_X'(0) = E(X)$ $\quad$ $M_X''(0) = E(X^2)$ $\quad\ldots\quad$ $M_X^{(n)}(0) = E(X^n)$
- Αν X ακέραια $\quad M_X(t) = P_X(e^t)$
- $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, X_i ανεξ $\Rightarrow M_{S_n}(t) = M_{X_1}(t)\cdot \ldots \cdot M_{X_n}(t)$

Εάν X_i ισόνομες $\quad M_{S_n}(t) = [M_X(t)]^n$

$X \sim U(a,b) \Rightarrow M_X(t) = \dfrac{e^{bt} - e^{at}}{t(b-a)}$ $t \neq 0$ $E(X) = \dfrac{b+a}{2}$ $V(X) = \dfrac{b^2-a^2}{12}$

$X \sim Geom(p)$ $M_X(t) = \dfrac{p}{1-(1-p)e^t}$

$X \sim Poisson(\lambda) \Longrightarrow M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$

$X \sim exp(\lambda)$ $M_X(t) = \dfrac{\lambda}{\lambda - t} = \dfrac{1}{1 - t/\lambda}$ $t < \lambda$

$X \sim lognormal \Leftrightarrow Y = \log X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ $M_X(t) = e^{\mu t + \frac{t^2 \sigma^2}{2}}$

$X \sim \Gamma(a,b)$ $M_X(t) = \dfrac{1}{(1 - t/b)^a}$ $t < b$.

$X_i \sim exp(\lambda)$, X_i ανεξ. $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, \lambda)$

$X_i \sim P(\lambda_i)$ X_i ανεξ $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim P(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)$

$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ X_i ανεξ $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2)$

$X_i \sim \Gamma(a_i, b)$ X_i ανεξ. $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(\sum_{i=1}^{n} a_i, b)$

$X \sim \chi^2_n$, $Y \sim \chi^2_m \Rightarrow X + Y \sim \chi^2_{n+m}$

$X \sim \Gamma(a, \lambda)$ Τότε $aX \sim \Gamma(a, \lambda/a)$

$\rightarrow X \sim exp(\lambda)$ $M_{T_d(X)}(t) = ;$