ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΑΣΦΑΛΕΙΕΣ ΖΩΗΣ

Δημήτρης Χελιώτης

17 Απριλίου 2020

Περιεχόμενα

1 Ηλικία θανάτου **1**

1.1 Ορολογία και βασικές συναρτήσεις 1

1.2 Πίνακες επιβίωσης και κλασματικές ηλικίες 6

2 Ασφαλισεις ζωής **11**

2.1 Επιτόκιο και είδη ανατοκισμού 11

2.2 Είδη ασφάλισης 12

2.2.1 Ισόβια ασφάλιση 12

2.2.2 Ασφάλιση επιβίωσης 13

2.2.3 Πρόσκαιρη ασφάλιση 13

2.2.4 Μεικτή ασφάλιση 13

2.2.5 Αναβαλλόμενες ασφάλειες 13

2.2.6 Ασφάλειες κυμαινόμενης παροχής 14

3 Ράντες **17**

3.1 Βέβαιες ράντες 17

3.2 Ράντες ζωής 18

3.2.1 Ισόβια προκαταβλητέα ράντα ζωής 18

3.2.2 Γενική μέθοδος 19

3.2.3 Πρόσκαιρη προκαταβλητέα ράντα ζωής n-ετών 19

3.2.4 Ισόβια ληξηπρόθεσμη ράντα ζωής 20

3.2.5 Πρόσκαιρη ληξηπρόθεσμη ράντα ζωής n-ετών 20

3.2.6 Ισόβια συνεχής ράντα ζωής 21

3.2.7 Πρόσκαιρη συνεχής ράντα ζωής 21

3.2.8 Αναβαλλόμενες ράντες ζωής 23

4 Ασφάλιστρα **27**

5 Αποθέματα **33**

5.1 Ορισμός και παραδείγματα 33

5.1.1 Το απόθεμα για μια ισόβια ασφάλιση 36

5.2 Η αναδρομική σχέση 36

5.3 Ασκήσεις 37

Α΄ Στοιχεία πιθανοτήτων **41**

Α΄.1 Πιθανότητες 41

Α΄.2 Τυχαίες μεταβλητές 41

Α΄.3 Μέση τιμή 42

Κεφάλαιο 1

Ηλικία θανάτου

1.1 Ορολογία και βασικές συναρτήσεις

Θα συμβολίζουμε με (x) ένα άτομο που έχει τώρα ηλικία x.

Ασχολούμαστε με τη διάρκεια ζωής ατόμων από έναν συγκεκριμένο πληθυσμό. Για παράδειγμα, τους κατοίκους της Πάτρας. Θεωρούμε ότι ο χρόνος ζωής ενός ατόμου από αυτό τον πληθυσμό είναι μια τυχαία μεταβλητή X, συνεχής, με τιμές στο $[0, \infty)$. Επίσης, θεωρούμε ότι η κατανομή αυτών των χρόνων είναι η ίδια για όλα τα άτομα, για παράδειγμα, εκθετική με παράμετρο $1/80$.

Συνάρτηση κατανομής της X ονομάζουμε τη συνάρτηση $F(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Συνάρτηση επιβίωσης του ατόμου ονομάζουμε τη συνάρτηση $s(x) = \mathbf{P}(X > x) = 1 - F(x)$.

Επειδή η τυχαία μεταβλητή του χρόνου ζωής, X, ενός ατόμου παίρνει θετικές τιμές, η συνάρτηση κατανομής της έχει τις τιμές $F(x) = 0$ για $x < 0$. Άρα αρκεί να την προσδιορίζουμε μόνο για $x \geqslant 0$. Το ίδιο ισχύει και για την $s(x)$. Επίσης, επειδή η X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή, η πιθανότητα $\mathbf{P}(X = a)$ ισούται με 0 για οποιοδήποτε $a \geqslant 0$. Έτσι, έχουμε για παράδειγμα, $\mathbf{P}(X > a) = \mathbf{P}(X \geqslant a) - \mathbf{P}(X = a) = \mathbf{P}(X \geqslant a)$.

Για $x > 0$ δεδομένο, θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή

$$
\begin{aligned}
T_x &= X - x|\{X > x\} && (1.1)\\
&= \text{ο υπόλοιπος χρόνος ζωής ενός ατόμου που έχει φτάσει στην ηλικία } x, && (1.2)
\end{aligned}
$$

η οποία προκύπτει δεσμεύοντας στο γεγονός $X > x$.

Ορίζουμε τώρα τις εξής ποσότητες (για $t \geqslant 0$)

$$
\begin{aligned}
{}_tq_x &:= \mathbf{P}(T_x \leqslant t), && (1.3)\\
{}_tp_x &:= \mathbf{P}(T_x > t) = 1 - {}_tq_x. && (1.4)
\end{aligned}
$$

Η πρώτη, αν τη δούμε ως συνάρτηση του t, είναι η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής T_x. Η δεύτερη δίνεται από μια βολική έκφραση ως συνάρτηση της συνάρτησης επιβίωσης. Δηλαδή

$$
{}_tp_x = \mathbf{P}(T_x > t) = \mathbf{P}(X - x > t|X > x) = \frac{\mathbf{P}(X > x + t, X > x)}{\mathbf{P}(X > x)} = \frac{\mathbf{P}(X > x + t)}{\mathbf{P}(X > x)} = \frac{s(x + t)}{s(x)} \qquad (1.5)
$$

Ορίζουμε επίσης

$$
{}_{t|u}q_x := \mathbf{P}(t < T_x \leqslant t + u) = \mathbf{P}(T_x > t) - \mathbf{P}(T_x > t + u) = {}_tp_x - {}_{t+u}p_x. \qquad (1.6)
$$

Χρησιμοποιήσαμε τον τύπο $\mathbf{P}(A \backslash B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(B)$, που ισχύει για όλα τα ενδεχόμενα A, B με $B \subset A$. Η ${}_{t|u}q_x$ είναι η πιθανότητα ένα άτομο που τώρα έχει ηλικία x να ζήσει ακόμα t χρόνια αλλά μετά από αυτά τα t χρόνια να μην επιβιώσει περισσότερο από u χρόνια. Με χρήση της (1.5) η ${}_{t|u}q_x$ μπορεί να γραφτεί ως συνάρτηση της $s(x)$.

Όταν στις ποσότητες ${}_tp_x, {}_tq_x$ η παράμετρος t ισούται με 1, την παραλείπουμε. Δηλαδή, $p_x := {}_1p_x$ και $q_x := {}_1q_x$.
Χρήσιμοι είναι οι εξής δύο τύποι. Για $x, k.\ell \geqslant 0$, ισχύει

$$ {}_{k+\ell}p_x = {}_kp_x \, {}_\ell p_{x+k}, \tag{1.7} $$

$$ {}_{t|u}q_x = {}_tp_x \, {}_uq_{x+t}. \tag{1.8} $$

Ο πρώτος θα είναι χρήσιμος σε αποδείξεις αναδρομικών σχέσεων στα επόμενα κεφάλαια και λέει ότι ο (x), για να ζήσει $k+\ell$ χρόνια ακόμα, πρώτα ζει k χρόνια και έπειτα από την ηλικία $x+k$ ζει άλλα ℓ χρόνια (πολλαπλασιάζουμε τις πιθανότητες αυτών των δύο ενδεχομένων). Αντίστοιχη ερμηνεία έχει και ο δεύτερος τύπος. Οι αποδείξεις τους είναι ως εξής.

$$ {}_{k+\ell}p_x = \frac{s(x+k+\ell)}{s(x)} = \frac{s(x+k)}{s(x)} \frac{s(x+k+\ell)}{s(x+k)} = {}_kp_x \, {}_\ell p_{x+k}, $$

$$ {}_{t|u}q_x = {}_tp_x - {}_{t+u}p_x = {}_tp_x - {}_tp_x \, {}_up_{x+t} = {}_tp_x(1 - {}_up_{x+t}) = {}_tp_x \, {}_uq_{x+t}. $$

Ονομάζουμε **ένταση θνησιμότητας** στο $x \geqslant 0$ τον αριθμό

$$ \mu_x := \lim_{\delta \to 0^+} \frac{1}{\delta} \mathbf{P}(T_x \leqslant \delta). \tag{1.9} $$

Θα υπολογίσουμε το μ_x συναρτήσει της συνάρτησης επιβίωσης s. Ονομάζουμε f την πυκνότητα της X και υποθέτουμε ότι ισχύει $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η πιθανότητα στην τελευταία έκφραση γράφεται ως

$$ \mathbf{P}(X - x \leqslant \delta | X > x) = \frac{\mathbf{P}(x < X \leqslant x + \delta)}{\mathbf{P}(X > x)} = \frac{F(x+\delta) - F(x)}{s(x)}. $$

Άρα

$$ \mu_x = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{F(x+\delta) - F(x)}{\delta} \frac{1}{s(x)} = \frac{F'(x)}{s(x)} = \frac{f(x)}{s(x)} = -\frac{s'(x)}{s(x)} = -(\log s(x))'. $$

Άσκηση (2.1 στο [2]) Έστω ότι η διάρκεια ζωής ενός ατόμου που γεννιέται σήμερα είναι μια τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής

$$ F_0(t) = 1 - \left(1 - \frac{t}{105}\right)^{\frac{1}{5}}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 105. $$

Να υπολογιστούν τα εξής:
(α) Η πιθανότητα ένα παιδί που γεννιέται σήμερα δεν φτάνει στην ηλικία των 60.
(β) Η πιθανότητα ένα άτομο που είναι 30 ετών να φτάσει ως τα 70 τουλάχιστον.
(γ) Η τιμή της έντασης θνησιμότητας στα 50.

Λύση

(α) Ζητάμε την πιθανότητα $\mathbf{P}(X \leqslant 60)$. Αυτή ισούται με $F_0(60) = 1 - (45/105)^{1/5} = 1 - (3/7)^{1/5}$.

(β) Για $x \in (0, 105)$, η συνάρτηση θνησιμότητας είναι $s(x) = \left(1 - \frac{t}{105}\right)^{\frac{1}{5}}$. Έτσι

$$ {}_{40}p_{30} = \frac{s(70)}{s(30)} = \frac{(1 - \frac{70}{105})^{\frac{1}{5}}}{(1 - \frac{30}{105})^{\frac{1}{5}}} = \left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{1}{5}} $$

(γ) Για $x \in (0, 105)$ έχουμε

$$ \mu_x = -\frac{s'(x)}{s(x)} = \frac{(1 - \frac{x}{105})^{-\frac{4}{5}} \frac{1}{5}(-\frac{1}{105})}{(1 - \frac{x}{105})^{\frac{1}{5}}} = \frac{1}{5 \cdot 105} \left(1 - \frac{x}{105}\right)^{-1}. $$

Άρα $\mu_{50} = \frac{1}{5 \cdot 105} \frac{105}{50} = 1/250$. ∎

Άσκηση. (3.9 στο [1]) Αν η ένταση θνησιμότητας ισούται με $\mu_x = 10^{-3}$ για κάθε $x \in [20, 25]$, να υπολογιστεί η πιθανότητα ${}_{2|2}q_{20}$ (Δηλαδή ο (20) να φτάσει στα 22 αλλά οχι στα 24).

Λύση

$$ {}_{2|2}q_{20} = \mathbf{P}(2 < T_{20} < 4) = {}_2p_{20} - {}_4p_{20} = \frac{s(22) - s(24)}{s(20)} = e^{-\int_{20}^{22} \mu_t \, dt} - e^{-\int_{20}^{24} \mu_t \, dt} = e^{-2\cdot 10^{-3}} - e^{-4\cdot 10^{-3}}. $$

■

Πώς απο την ένταση θνησιμότητας μ βρίσκουμε τις συναρτήσεις s, F, f ;

Για την s: Η σχέση $\mu_x = -\{\log s(x)\}'$ είναι μια διαφορική εξίσωση για την s. Για να την λύσουμε, ολοκληρώνουμε την ισότητα στο $[0, x]$ και παίρνουμε

$$ \int_0^x \mu_t \, dt = -\big(\log s(x) - \log s(0)\big) \Rightarrow \log s(x) = -\int_0^x \mu_t \, dt \Rightarrow \tag{1.10} $$

$$ s(x) = e^{-\int_0^x \mu_t \, dt}. \tag{1.11} $$

Ας βρούμε και την ${}_tp_x$ συναρτήσει της μ.

$$ {}_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = \frac{e^{-\int_0^{x+t} \mu_r \, dr}}{e^{-\int_0^x \mu_r dr}} = e^{-\int_x^{x+t} \mu_r \, dr}. \tag{1.12} $$

Για την F:

$$ F(x) = 1 - s(x) = 1 - e^{-\int_0^x \mu_r \, dr}. $$

Για την f:

$$ f(x) = -s'(x) = \mu_x s(x) = \mu_x e^{-\int_0^x \mu_t \, dt}. $$

Οι συνθήκες ώστε μια $F : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ να είναι συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής X με τιμές στο $[0, +\infty)$ και με πυκνότητα είναι οι εξής[1]

- $F(0) = 0, \ F(\infty) = 1$,
- F αύξουσα,
- F συνεχής παντού και παραγωγίσιμη εκτός απο πεπερασμένο σύνολο σημείων.

Προφανώς μια $s : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση επιβίωσης αν και μόνο αν η $1 - s(x)$ είναι συνάρτηση κατανομής. Δηλαδή

- $s(0) = 1, \ s(\infty) = 0$,
- s φθίνουσα,
- s συνεχής παντού και παραγωγίσιμη εκτός απο πεπερασμένο σύνολο σημείων.

Αντίστοιχα, για να είναι μία συνάρτηση $\mu : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ ένταση θνησιμότητας, οι συνθήκες είναι

- $\mu_x \geqslant 0$ για κάθε $x \geqslant 0$,
- $\int_0^\infty \mu_r \, dr = \infty$.

Πράγματι, η πρώτη συνθήκη ικανοποιείται από τον ορισμό της μ, και η δεύτερη ισχύει γιατί, από την (1.11), έχουμε

$$ \int_0^\infty \mu_r \, dr = \lim_{x\to\infty} (-\log s(x)) = \infty. $$

Αντίστροφα, αν δίνεται μια μ με αυτές τις ιδιότητες, τότε ορίζοντας την s όπως στην (1.11), αυτή η s έχει την μ ως ένταση θνησιμότητας, και ικανοποιεί τις συνθήκες ώστε να είναι συνάρτηση θνησιμότητας. Η συνθήκη $s(\infty) = 0$ έπεται από την $\int_0^\infty \mu_r \, dr = \infty$.

[1] Για μια συνάρτηση $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, το $g(\infty)$ συμβολίζει το όριο $\lim_{x\to\infty} g(x)$ αν αυτό υπάρχει.

Άσκηση. (3.3 στο [1]) Να αποδειχθεί ότι η $s(x) = e^{-x^3/12}$ για $x \geqslant 0$ είναι συνάρτηση επιβίωσης για τα άτομα ενός πληθυσμού. Να υπολογιστούν οι συναρτήσεις μ, F_X, f_X.

Λύση

Η s είναι φθίνουσα και παραγωγίσιμη στο $[0, \infty)$ με $s(0) = 1$ και $s(\infty) = 0$. Άρα είναι συνάρτηση επιβίωσης. Έπειτα

$$\begin{aligned} \mu_x &= -(\log s(x))' = \frac{x^2}{4}, \\ F_X(x) &= 1 - e^{-x^3/12}, \\ f_X(x) &= F_X'(x) = \frac{x^2}{4} e^{-x^3/12} \end{aligned}$$

για κάθε $x \geqslant 0$. ■

Προσδοκώμενη ζωή του (x) λέμε τον αριθμό

$$\mathring{e}_x = \mathbf{E}(T_x),$$

ενώ **ακέραια προσδοκώμενη ζωή** του (x) λέμε τον αριθμό

$$e_x := \mathbf{E}([T_x]).$$

$[T_x]$ είναι το ακέραιο μέρος του T_x.

Για να βρούμε εκφράσεις για αυτές τις μέσες τιμές, θα υπολογίσουμε την πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής T_x και τη συνάρτηση πιθανότητας της διακριτής τυχαίας μεταβλητής $K_x := [T_x]$.

Πυκνοτητα της T_x

Η συνάρτηση κατανομής της T_x (για $t \geqslant 0$) είναι

$$F_{T_x}(t) = \mathbf{P}(T_x \leqslant t) = {}_tq_x = 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}.$$

Παραγωγίζοντας ως προς t, βρίσκουμε ότι η πυκνότητα της T_x είναι η

$$f_{T_x}(t) = F_{T_x}'(t) = -\frac{s'(x+t)}{s(x)} = -\frac{s(x+t)}{s(x)} \frac{s'(x+t)}{s(x+t)} = {}_tp_x \, \mu_{x+t}. \tag{1.13}$$

Έτσι, η προσδοκώμενη ζωή ισούται με

$$\mathbf{E}(T_x) = \int_0^\infty t f_{T_x}(t) \, dt = \int_0^\infty t \, {}_tp_x \, \mu_{x+t} \, dt. \tag{1.14}$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο (Α΄.5)(τρίτο στοιχείο της γραμμής) έχουμε και την εξής εναλλακτική έκφραση

$$\mathbf{E}(T_x) = \int_0^\infty \mathbf{P}(T_x > t) \, dt = \int_0^\infty {}_tp_x \, dt. \tag{1.15}$$

Συναρτηση πιθανοτητας της K_x

Η K_x παίρνει τιμές στο $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Έτσι, υπολογίζουμε τη συνάρτηση πιθανότητας της σε δεδομένο $n \in \mathbb{N}$ ως

$$\begin{aligned} f(n) = \mathbf{P}(K_x = n) &= \mathbf{P}(n \leqslant T_x < n+1) = \mathbf{P}(n < T_x \leqslant n+1) \\ &= {}_{n|1}q_x = {}_np_x \, {}_1q_{x+n} = {}_np_x \, q_{x+n}. \end{aligned}$$

Άρα

$$e_x = \mathbf{E}(K_x) = \sum_{n=0}^\infty n f(n) = \sum_{n=0}^\infty n \, {}_np_x \, q_{x+n}.$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο (Α′.5) (δεύτερο στοιχείο της γραμμής) έχουμε και την εξής εναλλακτική έκφραση

$$e_x = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(K_x \geqslant n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(T_x \geqslant n) = \sum_{n=1}^{\infty} {}_n p_x. \tag{1.16}$$

Άσκηση. (Εξέταση Ιανουαρίου 2019) Γνωρίζουμε ότι για τα άτομα ενός πληθυσμού ο χρόνος θανάτου είναι μια τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x < 0, \\ \frac{3ax^2 - 2x^3}{a^3} & \text{αν } x \in [0, a], \\ 1 & \text{αν } x \geqslant a, \end{cases}$$

με $a = 120$. Να υπολογιστούν η συνάρτηση επιβίωσης s, η ένταση θνησιμότητας μ_x (για $x \in (0, a)$), και ο μέσος χρόνος υπολειπόμενης ζωής $\mathring{e}_{20}$ για ένα άτομο που είναι τώρα 20 ετών.

Λύση

Η συνάρτηση επιβίωσης είναι

$$s(x) := \mathbf{P}(X > x) = 1 - \mathbf{P}(X \leqslant x) = 1 - F(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x < 0, \\ 1 - \frac{3ax^2 - 2x^3}{a^3} & \text{αν } x \in [0, a], \\ 0 & \text{αν } x \geqslant a. \end{cases}$$

Η ένταση θνησιμότητας είναι

$$\mu(x) = -\frac{s'(x)}{s(x)} = \frac{F'(x)}{s(x)} = \begin{cases} 0 & \text{αν } x < 0, \\ \frac{6x(a-x)}{a^3 - 3ax + 2x^3} & \text{αν } x \in [0, a], \\ 0 & \text{αν } x \geqslant a. \end{cases}$$

Η μέση τιμή του υπολοιπόμενου χρόνου ζωής για τον (20) είναι

$$\mathring{e}_{20} = \int_0^{\infty} t\, f_{T_{20}} dt = \int_0^{\infty} t\, {}_t p_{20} \mu_{20+t}\, dt = -\int_0^{\infty} t\, \frac{s(20+t)}{s(20)} \frac{s'(20+t)}{s(20+t)}\, dt = -\frac{1}{s(20)} \int_0^{\infty} t\, s'(20+t)\, dt$$

Έχουμε $s'(x) = 0$ για $x < 0, x > a$, άρα $s'(20+t) = 0$ για $20 + t > a$, οπότε το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\mathring{e}_{20} = -\frac{1}{s(20)} \int_0^{a-20} t s'(20+t)\, dt \overset{y=t+20}{=} -\frac{1}{s(20)} \int_{20}^{a} (y-20) \frac{1}{a^3} (-6ay + 6y^2)\, dy = ... = 43.75$$

■

Άσκηση. (3.21 στο [1]) Να δειχθεί οτι

(α) $\frac{\partial}{\partial x} {}_t p_x = {}_t p_x (\mu_x - \mu_{x+t})$,

(β) $\frac{\partial}{\partial x} \mathring{e}_x = \mathring{e}_x\, \mu_{x-1}$,

(γ) $\Delta e_x := e_{x+1} - e_x = q_x\, e_{x+1} - p_x$.

Λύση

(α) Επειδή ${}_t p_x = \mathbf{P}(T_x > t) = \frac{s(x+t)}{s(x)}$, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{s(x+t)}{s(x)} \right) &= \frac{s'(x+t)s(x) - s'(x)s(x+t)}{s^2(x)} \\ &= \frac{s(x+t)}{s(x)} \left(\frac{s'(x+t)}{s(x+t)} - \frac{s'(x)}{s(x)} \right) = {}_t p_x (\mu_x - \mu_{x+t}). \end{aligned}$$

(β) Ισχύει $\mathring{e}_x = \mathbf{E}(T_x) = \int_0^\infty \mathbf{P}(T_x > t)\, dt = \int_0^\infty {}_tp_x\, dt$. Άρα περνώντας την παράγωγο μέσα από το ολοκλήρωμα και χρησιμοποιώντας το ερώτημα (α), βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\mathring{e}_x &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}{}_tp_x\, dt = \int_0^\infty {}_tp_x\,(\mu_x - \mu_{x+t})\, dt\\ &= \mu_x \int_0^\infty {}_tp_x\, dt - \int_0^\infty {}_tp_x\mu_{x+t}\, dt = \mu_x\, \mathring{e}_x - 1.\end{aligned}$$

Στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το ότι η $f_{T_x}(x) = {}_tp_x\mu_{x+t}$ είναι η πυκνότητα της T_x, άρα έχει ολοκλήρωμα 1.

(γ) Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (1.16), δηλαδή $e_x = \sum_{k=1}^\infty {}_kp_x = \sum_{k=0}^\infty {}_{k+1}p_x$. Έχουμε

$$e_{x+1} - e_x = (p_x + q_x)e_{x+1} - e_x = q_xe_{x+1} + p_xe_{x+1} - e_x.$$

Έπειτα

$$\begin{aligned}p_xe_{x+1} &= p_x \sum_{k=0}^\infty {}_{k+1}p_{x+1} = \sum_{k=0}^\infty {}_1p_x\, {}_{k+1}p_{x+1} = \sum_{k=0}^\infty {}_{k+2}p_x\\ &= \sum_{k=2}^\infty {}_kp_x = \sum_{k=1}^\infty {}_kp_x - p_x = e_x - p_x.\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας αυτούς τους δύο υπολογισμούς παίρνουμε το ζητούμενο. ■

1.2 Πίνακες επιβίωσης και κλασματικές ηλικίες

Ας υποθέσουμε ότι η διάρκεια ζωής καθενός από τα άτομα ενός πληθυσμού είναι τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση επιβίωσης $s(x)$ κοινή για όλα τα άτομα. Επίσης υποθέτουμε ότι η διάρκεια ζωής καθενός από τα άτομα είναι ανεξάρτητη από τη διάρκεια των υπόλοιπων ατόμων. Πώς μπορούμε να βρούμε τη συνάρτηση s; Τη χρειαζόμαστε για την τιμολόγηση ασφαλιστικών προϊόντων και φυσικά, για δεδομένο πληθυσμό, δεν δίνεται από έναν κλειστό τύπο όπως στα παραδείγματα της προηγούμενης παραγράφου. Για τον προσδιορισμό της, σκεφτόμαστε ως εξής. Αν ξεκινήσουμε με l_0 άτομα που γενιούνται σήμερα, όπου το l_0 είναι ένας μεγάλος αριθμός, τότε από αυτά τα άτομα περιμένουμε ότι θα ξεπεράσουν την ηλικία x περίπου $l_0s(x)$ άτομα από αυτά (αυτό είναι η συχνοτική ερμηνεία της πιθανότητας). Αν λοιπόν έχουμε έναν πίνακα που μας λέει ότι από l_0 άτομα που γεννήθηκαν την ίδια χρονιά, τουλάχιστον x χρόνια πριν σήμερα, πέρασαν την ηλικία x τα l_x από αυτά, τότε είναι λογικό να υποθέσουμε ότι $s(x) \approx l_x/l_0$. Αυτή την πληροφορία περιέχει μεταξύ άλλων ένας πίνακας επιβίωσης.

Ένας πίνακας επιβίωσης είναι μια λίστα με τους αριθμούς l_x, d_x (και άλλους ακόμα) για διάφορες τιμές του x, συνήθως για $x = 1, 2, \ldots$ Αυτοί οι αριθμοί προέρχονται από πραγματικά στοιχεία (από αρχικό πληθυσμό l_0 ατόμων, όπου $l_0 = 10^5$ συνήθως) και εκφράζουν τα εξής:

$$\begin{aligned}l_x &= \text{πλήθος ατόμων που φτάνει στην ηλικία } x,\\ d_x &= \text{πλήθος ατόμων που πεθαίνουν στο διάστημα } [x, x+1).\end{aligned}$$

Εμείς όμως θα θεωρούμε ότι οι αριθμοί αυτοί προκύπτουν από μια συνάρτηση θνησιμότητας s πάνω σε μεγάλο πλήθος ατόμων και ικανοποιούν τη σχέση

$$l_x = l_0s(x) \tag{1.17}$$

(δηλαδή μετατρέπουμε την προσέγγιση $s(x) \approx l_x/l_0$ σε ισότητα). Σαφώς το d_x ικανοποιεί την $d_x = l_x - l_{x+1}$. Μάλιστα αν γνωρίζουμε τη συνάρτηση επιβίωσης, $s(x)$, ενός πληθυσμού, ορίζουμε τις ποσότητες l_x για όλα τα $x \geqslant 0$ μέσω της (1.17).

Παρατηρούμε τότε οτι για κάθε $x, t \geqslant 0$ ισχύει

$$l_{x+t} = l_x\, {}_tp_x$$

αφού $l_{x+t} = l_0\, s(x+t) = l_0\, s(x)\, \frac{s(x+t)}{s(x)} = l_x\, {}_t p_x$.

Άσκηση. (3.14 στο [1]) Για κάθε $x > 0$ δεδομένο, οι αριθμοί $(l_x \mu_x)', {\mu'}_x - {\mu_x}^2$ έχουν το ίδιο πρόσημο.

Λύση

Έστω f η πυκνότητα της X. Εφόσον $l_x = l_0 s(x)$ και $\mu_x = -\frac{s'(x)}{s(x)} = \frac{f(x)}{s(x)}$, έχουμε $l_x \mu_x = l_0 f(x)$. Επίσης

$$ {\mu'}_x - {\mu_x}^2 = \frac{f'(x)s(x) - s'(x)f(x)}{s^2(x)} - \frac{f^2(x)}{s^2(x)} = \frac{f'(x)s(x)}{s^2(x)} = \frac{f'(x)}{s(x)}. $$

Χρησιμοποιήσαμε το ότι $s' = -f$. Άρα, χρησιμοποιώντας και τον προηγούμενο υπολογισμό, έχουμε

$$ {\mu'}_x - {\mu_x}^2 = \frac{1}{l_0 s(x)} (l_0 f(x))' = \frac{1}{l_0 s(x)} (l_x \mu_x)', $$

που δίνει το ζητούμενο γιατί $l_0 s(x) > 0$. ■

Κλασματικές ηλικίες

Οι πίνακες επιβίωσης μας επιτρέπουν να εξάγουμε της τιμές $s(x)$ μόνο για τους ακέραιους αριθμούς x. Χρειαζόμαστε όμως τις τιμές $s(x)$ και για x που είναι μη ακέραιος (π.χ., για $x = 64.3$). Για αυτές τις τιμές, επιλέγουμε μια σύμβαση για το πώς να προκύψουν από τις $s(n), n \in \mathbb{N}$. Αυτό που κάνουμε είναι μια παρεμβολή στο γράφημα της $s(n), n \in \mathbb{N}$ (δηλαδή το συμπληρώνουμε). Τρεις κοινές συμβάσεις είναι οι εξής.

(α) **Γραμμική παρεμβολή**. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $t \in (0, 1)$, ορίζουμε

$$ s(k+t) := (1-t)s(k) + ts(k+1). \tag{1.18} $$

Η υπόθεση ότι ισχύει αυτή η παρεμβολή λέγεται υπόθεση ομοιόμορφης κατανομής θανάτων.

(β) **Εκθετική παρεμβολή**. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $t \in (0, 1)$, ορίζουμε

$$ s(k+t) := s(k)e^{-\mu t} \qquad \text{όπου το } \mu \text{ είναι τέτοιο ώστε } \frac{s(k+1)}{s(x)} = e^{-\mu} \tag{1.19} $$

Η υπόθεση ότι ισχύει αυτή η παρεμβολή λέγεται υπόθεση σταθερής έντασης θνησιμότητας.

(γ) **Αρμονική παρεμβολή**. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $t \in (0, 1)$, ορίζουμε

$$ \frac{1}{s(k+t)} := \frac{1-t}{s(k)} + \frac{t}{s(k+1)}. \tag{1.20} $$

Στη γραμμική παρεμβολή, ας βρούμε την πυκνότητα του χρόνου θανάτου σε ένα διάστημα $[k, k+1]$. με $k \in \mathbb{N}$. Για $t \in (0, 1)$ έχουμε

$$ \begin{aligned} \mathbf{P}(T_x \leqslant k+t) &= {}_{k+t}q_x = 1 - {}_{k+t}p_x = 1 - \frac{s(k+t)}{s(k)} = 1 - \frac{(1-t)s(k) + ts(k+1)}{s(k)} \\ &= t\left(1 - \frac{s(k+1)}{s(k)}\right) = tq_k. \end{aligned} $$

Παραγωγίζοντας ως προς t, βρίσκουμε ότι η πυκνότητα της T_x στο διάστημα $(k, k+1)$ είναι σταθερή και ίση με q_k. Έτσι δικαιολογείται ο όρος ομοιόμορφη κατανομή θανάτων.

Στην εκθετική παρεμβολή, το μ εξαρτάται από το k και χρησιμοποιείται για να βρούμε τις τιμές της s στο $(k, k+1)$. Κάθε τέτοιο διάστημα έχει το δικό του μ. Αν υπολογίσουμε την ένταση θνησιμότητας στον αριθμό $k+t$ για $t \in (0, 1)$, βρίσκουμε ότι ισούται με

$$ -\frac{s'(k+t)}{s(k+t)} = -\frac{-\mu\, s(k)e^{-\mu t}}{s(k)e^{-\mu t}} = \mu, $$

επομένως είναι σταθερή στο διάστημα $(k, k+1)$. Παραγωγίσαμε ως προς t τον τύπο που ορίζει την εκθετική παρεμβολή.

Άσκηση. (3.30 στο [1]) Αν $q_{70} = 0.04$ και $q_{71} = 0.05$ και υποθέσουμε ότι οι θάνατοι συμβαίνουν ομοιόμορφα σε έναν χρόνο (γραμμική παρεμβολή) να υπολογιστεί η πιθανότητα ο (70) να πεθάνει μεταξύ των ηλικιών 70.5 και 71.5, δηλαδή η ${}_{0.5|1}q_{70}$.

Λύση

Εφόσον εμπλέκονται κλασματικές ηλικίες, γράφουμε τη ζητούμενη ποσότητα ως συνάρτηση της συνάρτησης επιβίωσης, s.

$$\begin{aligned} {}_{0.5|1}q_{70} &= \mathbf{P}(70.5 < X < 71.5 | X > 70) = \frac{s(70.5) - s(71.5)}{s(70)} = \frac{\frac{1}{2}s(70) + \frac{1}{2}s(71) - \frac{1}{2}s(71) - \frac{1}{2}s(72)}{s(70)} \\ &= \frac{1}{2}(1 - {}_2p_{70}) = \frac{1}{2}(q_{70} + q_{71} - q_{70}q_{71}) = 0.044 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε την ισότητα ${}_2p_{70} = {}_1p_{70}{}_1p_{71} = (1 - q_{70})(1 - q_{71})$. ∎

Άσκηση. Για $x \in \mathbb{N}$ και $t \in (0,1)$ να υπολογιστούν οι ποσότητες ${}_tq_x, \mu_{x+t}$ συναρτήσει των q_x, p_x, t κάτω από την υπόθεση
(α) ομοιόμορφης κατανομής θανάτων,
(β) σταθερής έντασης θνησιμότητας,
(γ) αρμονικής παρεμβολής.

Λύση

(α) Έχουμε δείξει πιο πάνω ότι ${}_tq_x = tq_x$. Για την ένταση θνησιμότητας, παραγωγίζουμε την $s(x+t) = (1-t)s(x) + ts(x+1)$ ως προς t και βρίσκουμε $s'(x+t) = s(x+1) - s(x)$. Άρα

$$\mu_{x+t} = -\frac{s'(x+t)}{s(x+t)} = \frac{s(x) - s(x+1)}{(1-t)s(x) + ts(x+1)} = \frac{q_x}{1 - tq_x}$$

εφόσον $q_x = 1 - p_x = 1 - (s(x+1)/s(x))$.

(β) Τώρα έχουμε

$$\begin{aligned} s(x+t) &= s(x)e^{-\mu^* t} \qquad \text{όπου το } \mu^* \text{ είναι τέτοιο ώστε} \\ e^{-\mu^*} &= \frac{s(x+1)}{s(x)} = p_x. \end{aligned}$$

Άρα

$${}_tq_x = 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)} = 1 - \frac{s(x)\, e^{-\mu^* t}}{s(x)} = 1 - e^{-\mu^* t} = 1 - p_x^t.$$

Έχουμε δείξει πιο πάνω ότι η ένταση θνησιμότητας είναι σταθερή στο $(x, x+1)$ με τιμή $\mu^* = -\log p_x$.

(γ) Η (1.20) δίνει

$$\frac{s(x)}{s(x+t)} = 1 - t + \frac{s(x)}{s(x+1)}t.$$

Άρα

$${}_tq_x = 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)} = 1 - \frac{1}{1 - t + \frac{1}{p_x}t} = \frac{tq_x}{t + (1-t)p_x}.$$

Για να βρούμε την ένταση θνησιμότητας παραγωγίζουμε την (1.20) ως προς t και παίρνουμε

$$-\frac{s'(x+t)}{s^2(x+t)} = -\frac{1}{s(x)} + \frac{1}{s(x+1)}.$$

Άρα

$$\mu_{x+t} = -\frac{s'(x+t)}{s(x+t)} = \left(\frac{1}{s(x+1)} - \frac{1}{s(x)}\right) s(x+t) = \left(\frac{1}{s(x+1)} - \frac{1}{s(x)}\right) \frac{s(x)s(x+1)}{(1-t)s(x+1)+ts(x)}$$
$$= \frac{s(x)-s(x+1)}{(1-t)s(x+1)+ts(x)} = \frac{1-p_x}{(1-t)p_x+t} = \frac{q_x}{1-q_x(1-t)}.$$

Για την τρίτη ισότητα λύσαμε ως προς $s(k+t)$ την (1.20). Για την πέμπτη ισότητα διαιρέσαμε αριθμητή και παρονομαστή με $s(x)$ και χρησιμοποιήσαμε την $p_x = s(x+1)/s(x)$. ■

Άσκηση. (3.2 στο [2]) Δίνονται οι τιμές $l_{52}, l_{53}, \ldots, l_{60}$. Να υπολογιστούν οι ποσότητες

$$_{0.2}q_{52.4}, \ _{5.7}p_{52.4}, \ _{3.2|2.5}q_{52.4}$$

κάτω από καθεμία από τις εξής υποθέσεις.

(α) Ομοιόμορφη κατανομή θανάτων.

(β) Σταθερή ένταση θνησιμότητας.

Λύση

Υπενθυμίζουμε ότι $l_x = s(x)l_0$ για κάθε $x \in \mathbb{N}$. Για την πρώτη ποσότητα, γράφουμε

$$_{0.2}q_{52.4} = 1 - {_{0.2}p_{52.4}} = 1 - \frac{s(52.6)}{s(52.4)}.$$

Στο σενάριο (α), το κλάσμα ισούται με

$$\frac{0.4 \cdot s(52) + 0.6 \cdot s(53)}{0.6 \cdot s(52) + 0.4 \cdot s(53)} = \frac{0.4 \cdot l_{52} + 0.6 \cdot l_{53}}{0.6 \cdot l_{52} + 0.4 \cdot l_{53}}.$$

Στο σενάριο (β), έστω μ_{52} ο αριθμός που ορίζεται από τη σχέση $s(53)/s(52) = e^{-\mu_{52}}$. Δηλαδή $\mu_{52} = \log(l_{52}/l_{53})$. Τότε το κλάσμα ισούται με

$$\frac{s(52)e^{-\mu_{52}\cdot 0.6}}{s(52)e^{-\mu_{52}\cdot 0.4}} = e^{-\mu_{52}\cdot 0.2} = \left(\frac{l_{53}}{l_{52}}\right)^{0.2}.$$

Για τη δεύτερη ποσότητα, γράφουμε

$$_{5.7}p_{52.4} = \frac{s(58.1)}{s(52.4)}.$$

Στο σενάριο (α), το κλάσμα ισούται με

$$\frac{0.9 \cdot s(58) + 0.1 \cdot s(59)}{0.6 \cdot s(52) + 0.4 \cdot s(53)} = \frac{0.9 \cdot l_{58} + 0.1 \cdot l_{59}}{0.6 \cdot l_{52} + 0.4 \cdot l_{53}}.$$

Στο σενάριο (β), έστω μ_{58} ο αριθμός που ορίζεται από τη σχέση $s(59)/s(58) = e^{-\mu_{58}}$. Τότε το κλάσμα ισούται με

$$\frac{s(58)e^{-\mu_{58}\cdot 0.1}}{s(52)e^{-\mu_{52}\cdot 0.4}} = \frac{l_{58}(l_{59}/l_{58})^{0.1}}{l_{52}(l_{53}/l_{52})^{0.4}} = \frac{l_{58}^{0.9}\, l_{59}^{0.1}}{l_{52}^{0.6}\, l_{53}^{0.4}}.$$

Για την τρίτη ποσότητα, παρατηρούμε ότι [από την(1.6)]

$$_{3.2|2.5}q_{52.4} = {_{3.2}p_{52.4}} - {_{5.7}p_{52.4}}.$$

Σε αυτή τη διαφορά, τη δεύτερη ποσότητα την υπολογίσαμε πριν ενώ η πρώτη υπολογίζεται ανάλογα. ■

Κεφάλαιο 2

Ασφαλισεις ζωής

2.1 Επιτόκιο και είδη ανατοκισμού

Αν ένα ποσό A κατατίθεται στην τράπεζα και μετά απο ένα χρόνο γίνεται $(1 + r)A$, τότε λέμε ότι το **ετήσιο επιτόκιο** είναι r. Στο τέλος της πρώτης χρονιάς, το νέο κεφάλαιο είναι $(1 + r)A$, και στο τέλος της δεύτερης χρονιάς θα γίνει $(1 + r)^2A$. Το ποσό μετά από n χρόνια θα γίνει $(1 + r)^nA$.

Δεν είναι απαραίτητο η περίοδος ανατοκισμού να είναι ένας χρόνος. Μια επιλογή είναι ο ανατοκισμός να γίνεται k φορές τον χρόνο, κάθε διάστημα $1/k$, με παράγοντα $\frac{r}{k}$ κάθε φορά. Αν το αρχικό ποσό A τοκίζεται έτσι για έναν χρόνο, στο τέλος του χρόνου το ποσό γίνεται $(1 + \frac{r}{k})^kA$. Υπάρχει ένα $r^* > 0$ ώστε

$$\left(1 + \frac{r}{k}\right)^k = 1 + r^*.$$

Το r^* λέγεται **πραγματικό** (ετήσιο) επιτόκιο.
Το r λέγεται **ονομαστικό** (ετήσιο) επιτόκιο.

Συνεχης ανατοκισμος: Αν ονομαστικό επιτόκιο r ανατοκίζεται πολύ συχνά, δηλαδή στην παραπάνω συζήτηση το $k \to \infty$, τότε σε χρόνο t το ποσό γίνεται Ae^{rt}. Για να το δούμε αυτό, παρατηρούμε ότι ως τον χρόνο t το ποσό θα ανατοκιστεί $\lambda_k := [kt]$ φορές (τόσες φορές χωράει το $1/k$ στο t) και έτσι θα γίνει

$$A\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{\lambda_k} = A\left(\left(1 + \frac{r}{k}\right)^k\right)^{\lambda_k/k} \to A(e^r)^t = e^{rt} \text{ για } k \to \infty.$$

Χρησιμοποιήσαμε το ότι $\lambda_k/k \to t$ για $k \to \infty$.

Στο εξης, θα χρησιμοποιούμε τα παρακάτω σύμβολα:

i : το πραγματικό ετήσιο επιτόκιο.

δ : **ένταση επιτοκίου**. Ο αριθμός που ορίζεται από τη σχέση $1 + i = e^\delta$.

$$\upsilon := \frac{1}{1+i} = e^{-\delta}.$$

$$d := \frac{i}{1+i}.$$

Ένα ποσό A που μας δίνεται σε χρόνο t έχει τώρα **παρούσα αξία** $Ae^{-\delta t} = A\upsilon^t$.
Αναλογιστική παρούσα αξία ενός τυχαίου ποσού A που ενδέχεται να μας δοθεί μια τυχαία χρονική στιγμή στιγμή T απο τώρα είναι ο αριθμός

$$\mathbf{E}\big(A\upsilon^T \mathbf{1}_{\{\text{το ποσό δίνεται}\}}\big).$$

Η συνάρτηση $\mathbf{1}_{\{\text{το ποσό δίνεται}\}}$ ισούται με 1 αν το ποσό δίνεται και ισούται με 0 διαφορετικά.

2.2 Είδη ασφάλισης

Οι ασφαλίσεις που θα δούμε χωρίζονται σε δύο κατηγορίες. Αυτές που πληρώνουν ένα ποσό τη στιγμή του θανάτου και αυτές που πληρώνουν ένα ποσό στο τέλος του έτους θανάτου του (x). Ορίζουμε ως τιμή καθε ασφάλισης την αναλογιστική παρούσα αξία της παροχής για τον (x). Δηλαδή

$$\text{Τιμή} = \mathbf{E}(\text{παρούσα αξία της παροχής}).$$

Υπενθυμίζουμε ότι ο x θα ζήσει ως χρόνο T_x από σήμερα και θα έχει συμπληρώσει K_x πλήρη χρόνια ($K_x := [T_x]$). Άρα μια παροχή που γίνεται στο τέλος του έτους θανάτου γίνεται σε χρόνο $K_x + 1$ από τώρα. Η T_x είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $[0, \infty)$ ενώ η K_x είναι διακριτή με τιμές στο $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots, \}$.

2.2.1 Ισόβια ασφάλιση

Ισόβια ασφάλιση με πληρωμή τη στιγμή του θανάτου

Αυτή η ασφάλιση δίνει ποσό 1 τη στιγμή του θανάτου. Η παρούσα αξία της παροχής είναι $Z := \upsilon^{T_x} = e^{-\delta T_x}$, άρα η τιμή της είναι

$$\begin{aligned} \bar{A}_x := \mathbf{E}(\upsilon^{T_x}) &= \int_0^\infty \upsilon^t f_{T_x}(t)\, dt \\ &= \int_0^\infty \upsilon^t {}_tp_x \mu_{x+t}\, dt. \end{aligned}$$

Η παύλα πάνω από το A σημαίνει ότι η παροχή γίνεται τη στιγμή του θανάτου. Ο δείκτης x δηλώνει την ηλικία του ατόμου τη στιγμή έκδοσης της ασφάλειας. Για να βρούμε τη διασπορά της παρούσας αξίας, υπογίζουμε

$$\mathbf{E}(Z^2) = \mathbf{E}\big(e^{-2\delta T_x}\big) = \int_0^\infty e^{-2\delta t} f_{T_x}(t)\, dt = \text{ίδιο με το } \bar{A}_x \text{ αλλά με το } 2\delta \text{ στη θέση του } \delta.$$

Εξαιτίας της τελευταίας ισότητας, χρησιμοποιείται για την $\mathbf{E}(Z^2)$ το σύμβολο ${}^2\bar{A}_x$. Έτσι,

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathbf{E}(Z^2) - \big[\mathbf{E}(Z)\big]^2 = {}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2.$$

Ισόβια ασφάλιση με πληρωμή στο τέλος του έτους θανάτου

Αυτή πληρώνει 1 στο τέλος του έτους θανάτου. Η παρούσα αξία της παροχής είναι υ^{K_x+1}. Η τιμή της

$$A_x := \mathbf{E}(\upsilon^{K_x+1}) = \sum_{k=0}^\infty \upsilon^{k+1} f_{K_x}(k),$$

όπου υπενθυμίζουμε ότι η K_x έχει συνάρτηση πιθανότητας

$$f_{K_x}(k) = \mathbf{P}(K_x = k) = \mathbf{P}(k \leqslant T_x < k+1) = {}_kp_x\, q_{x+k}.$$

Η διασπορά της παρούσας αξίας, όπως πιο πάνω, υπολογίζεται ως $\mathrm{Var}(\upsilon^{K_x+1}) = {}^2A_x - (A_x)^2$.

Άσκηση. Να δειχθεί ότι ισχύει $A_x = \upsilon q_x + \upsilon p_x A_{x+1}$.

Λύση

$$\begin{aligned} A_x = \sum_{k=0}^\infty \upsilon^{k+1} {}_kp_x\, q_{x+k} &= \upsilon\, {}_0p_x\, q_x + \upsilon \sum_{k=1}^\infty \upsilon^k {}_kp_x\, q_{x+k} \\ &= \upsilon\, q_x + \upsilon \sum_{j=0}^\infty \upsilon^{j+1} {}_{j+1}p_x\, q_{x+j+1}. \end{aligned}$$

Όμως ${}_{j+1}p_x = p_x\, {}_jp_{x+1}$, οπότε το τελευταίο άθροισμα ισούται με

$$p_x \sum_{j=0}^\infty \upsilon^{j+1} {}_jp_{x+1}\, q_{x+1+j} = p_x A_{x+1}.$$

2.2.2 Ασφάλιση επιβίωσης

Πληρώνει 1 σε n χρόνια από τώρα εφόσον ο (x) έχει επιβιώσει ως τότε, δηλαδή αν $T_x > n$. Η τιμή της σήμερα είναι

$$A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} := \mathbf{E}(\upsilon^n 1_{T_x>n}) = \upsilon^n \mathbf{E}(\mathbf{1}_{T_x>n}) = \upsilon^n \mathbf{P}(T_x > n) = \upsilon^n {}_n p_x.$$

Υπενθυμίζουμε ότι

$$\mathbf{1}_{\{T_x \geqslant n\}} = \begin{cases} 1 & \text{αν } T_x > n, \\ 0 & \text{αν } T_x \leqslant n. \end{cases}$$

Αντί του $A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}$ χρησιμοποιείται και το σύμβολο ${}_n\mathbf{E}_x$. Δηλαδή ${}_n\mathbf{E}_x = \upsilon^n {}_n p_x$.

2.2.3 Πρόσκαιρη ασφάλιση

Πληρώνει 1 αν ο θάνατος συμβεί μέσα στα επόμενα n χρόνια, δηλαδή αν $T_x < n$, ισοδύναμα αν $K_x \leqslant n-1$. Η πληρωμή γίνεται τη στιγμή του θανάτου ή στο τέλος του έτους θανάτου, έτσι έχουμε δυο είδη πρόσκαιρης ασφάλισης.

Σενάριο (α). Πληρωμή 1 τη στιγμή T_x αν $T_x < n$. Η παρούσα αξία της παροχής είναι $\upsilon^{T_x}\mathbf{1}_{T_x<n}$, οπότε η τιμή της είναι

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} := \mathbf{E}(\upsilon^{T_x}\, 1_{T_x<n}).$$

Σενάριο (β). Πληρωμή 1 τη στιγμή $K_x + 1$ αν $T_x < n$ (δηλαδή $K_x \leqslant n - 1$). Η παρούσα αξία της παροχής είναι $\upsilon^{K_x+1}\mathbf{1}_{T_x<n}$, οπότε η τιμή της είναι

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} := \mathbf{E}(\upsilon^{K_x+1}\, 1_{T_x<n}).$$

Συμβολισμός: Στα σύμβολα $A^{1}_{x:\overline{n}|}, A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}$, τα $x, \overline{n}|$ αντιπροσωπεύουν τους χρόνους T_x, n αντίστοιχα. Το 1 μπαίνει πάνω από τον χρόνο ο οποίος πρέπει να συμβεί πρώτα ώστε να πληρωθεί η ασφάλεια.

2.2.4 Μεικτή ασφάλιση

Αυτή πληρώνει 1 σε n χρόνια από τώρα αν ο (x) ζει τότε, αλλά πληρώνει 1 και στην αντίθετη περίπτωση. Δηλαδή είναι το άθροισμα μιας ασφάλισης επιβίωσης και μιας πρόσκαιρης. Επειδή η πρόσκαιρη έχει δύο εκδοχές, το ίδιο γίνεται και με την μεικτή.

Σενάριο (α). Πληρωμή 1 τη στιγμή $T_x \wedge n$. Τότε η παρούσα αξία της παροχής είναι

$$Z = \upsilon^{T_x}\, 1_{T_x<n} + \upsilon^n\, 1_{T_x>n},$$

και επομένως η τιμή της ασφάλισης είναι

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} := \mathbf{E}(Z) = \mathbf{E}(\upsilon^{T_x}\, 1_{T_x<n}) + \mathbf{E}(\upsilon^n\, 1_{T_x>n}) = \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}. \tag{2.1}$$

Σενάριο (β). Πληρωμή 1 τη στιγμή $(K_x + 1) \wedge n$. Δηλαδή πληρωμή τον χρόνο n ή τον χρόνο $K_x + 1$, όποιος έρθει πρώτος. Όπως και στο προηγούμενο σενάριο, βρίσκουμε ότι η τιμή της είναι

$$A_{x:\overline{n}|} = A^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}.$$

2.2.5 Αναβαλλόμενες ασφάλειες

Είναι αυτές που αρχίζουν να λειτουργούν μετά απο χρόνο $u > 0$. Οποιοδήποτε από τα είδη που είδαμε παραπάνω έχει έκδοση με αναβολή. Θα δούμε μερικά παραδείγματα.

(α) Πρόσκαιρη με αναβολή u ετών

Πληρώνει 1 την στιγμή T_x αν $u < T_x < u + n$. Η παρούσα αξία της είναι $\upsilon^{T_x}\mathbf{1}_{u<T_x<u+n}$, άρα η τιμή της είναι

$${}_{u|}\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = \mathbf{E}(\upsilon^{T_x}\, 1_{u<T_x<u+n}) = \int_u^{u+n} \upsilon^t\, f_{T_x}(t)\, dt.$$

Εφαρμόσαμε τον τύπο $\mathbf{E}(g(x)) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\ F_X(x)\ dx$ για τη συνάρτηση $g(w) = \upsilon^w\ 1_{u<w<u+n}$.

(β) Ισόβια συνεχής με αναβολή ***u*** **ετών**

Πληρώνει 1 τη στιγμή T_x αν $T_x > u$. Όπως πιο πάνω, η τιμή της δίνεται από τον τύπο

$$_{u|}\bar{A}_x = \mathbf{E}(\upsilon^{T_x}\ 1_{T_x>u}) = \int_u^\infty u^t\ f_{T_x}(t)\ dt.$$

(γ) Ισόβια διακριτή με αναβολή ***u*** **ετών**

Πληρώνει 1 τη στιγμή $K_x + 1$ αν $K_x \geqslant u$. Η τιμή της δίνεται από τον τύπο

$$_{u|}A_x = \mathbf{E}(\upsilon^{K_x+1} 1_{K_x \geqslant u}) = \sum_{j=u}^{\infty} \upsilon^{j+1}\ \mathbf{P}(K_x = j).$$

Άσκηση. Για n φυσικό αριθμό, να δειχθεί ότι

(i) $_{n|}A_x = \upsilon^n {}_np_x\ A_{x+n}$,
(ii) $A_x = A_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} + {}_{n|}A_x$.

<u>Λύση</u>

(i) Θα χρειαστούμε τη σχέση $_{s+t|u}q_x = {}_sp_x\ {}_{t|u}q_{x+s}$ (μεταφράστε τι ενδεχόμενα αφορά και τι σημαίνει, και αποδείξτε την).

$$\begin{aligned} _{n|}A_x &= \mathbf{E}(\upsilon^{K_x+1}\ 1_{K_x \geqslant n}) = \sum_{k=n}^{\infty} \upsilon^{k+1}{}_{k|}q_x \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \upsilon^{n+1+r}\ {}_{n+r|}q_x = \upsilon^n \sum_{r=0}^{\infty} \upsilon^{r+1}\ {}_np_x\ {}_{r|}q_{x+n} \quad (r = k - n) \\ &= \upsilon^n {}_np_x \sum_{r=0}^{\infty} \upsilon^{r+1}{}_{r|}q_{x+n} = \upsilon^n {}_np_x A_{x+n}. \end{aligned}$$

(ii) $A_x = \mathbf{E}(\upsilon^{K_x+1}) = \mathbf{E}(\upsilon^{K_x+1} 1_{K_x \leqslant n-1}) + \mathbf{E}(\upsilon^{K_x+1} 1_{K_x \geqslant n}) = A_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} + {}_{n|}A_x$. ■

Όμοια, μπορεί να αποδείξει κανείς ότι για $u, n > 0$ ισχύει $_{u|}\bar{A}_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} = {}_uE_x\ \bar{A}_{x+u:\overline{n}|}$ και $\bar{A}_{\overset{1}{x}:\overline{u+n}|} = \bar{A}_{\overset{1}{x}:\overline{u}|} + {}_{u|}\bar{A}_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}$.

2.2.6 Ασφάλειες κυμαινόμενης παροχής

Άσκηση. Μια ασφάλεια πληρώνει 1000 σε 10 χρόνια αν $T_x \leqslant 10$, ενώ πληρώνει 2000 σε 20 χρόνια αν $10 < T_x < 20$. Ποια η τιμή της σήμερα;

<u>Λύση</u>

Η παρούσα της αξία είναι

$$Z = 1000\ \upsilon^{10}\mathbf{1}_{T_x \leqslant 10} + 2000\ \upsilon^{20}\mathbf{1}_{T_x \in (10,20)}$$

άρα η τιμή της είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Z) &= 1000\ \upsilon^{10}\mathbf{E}(\mathbf{1}_{T_x \leqslant 10}) + 2000\ \upsilon^{20}\mathbf{E}(\mathbf{1}_{T_x \in (10,20)}) \\ &= 1000\ \upsilon^{10}\mathbf{P}(T_x \leqslant 10) + 2000\ \upsilon^{20}\mathbf{P}(T_x \in (10, 20)) \\ &= 1000\ \upsilon^{10}{}_{10}q_x + 2000\ \upsilon^{20}{}_{10|10}q_x. \end{aligned}$$

■

Όμοια, μια ασφάλεια που πληρώνει T_x τη στιγμή T_x του θανάτου έχει τιμή

$$\mathbf{E}(T_x\upsilon^{T_x}) = \int_0^\infty t\,\upsilon^t f_{T_x}(t)\ dt.$$

Άσκηση. (4.1 στο [2]) Δίνεται ότι $i = 0.06$ και ο πίνακας.

x	l_x	A_x
35	100 000.00	0.151375
36	99 737.15	0.158245
37	99 455.91	0.165386
38	99 154.72	0.172804
39	98 831.91	0.180505
40	98 485.68	0.188492

Υπολογίστε τις ποσότητες

(α) ${}_5E_{35}$,

(β) $\bar{A}_{\overset{1}{35}:\overline{5}|}$,

(γ) ${}_{5|}A_{35}$,

(δ) $\bar{A}_{35:\overline{5}|}$ υποθέτοντας ομοιόμορφη κατανομή θανάτων.

Λύση

Κατ' αρχάς, είναι γνωστή η ποσότητα $\upsilon = 1/(1+i) \approx 0.943$

(α) Υπενθυμίζουμε ότι $l_x = l_0 s(x)$. Άρα

$$ {}_5E_{35} = \upsilon^5 {}_5p_{35} = \frac{s(40)}{s(35)}\upsilon^5 = \frac{l_{40}/l_0}{l_{35}/l_0}\,\upsilon^5 = \frac{l_{40}}{l_{30}}\,\upsilon^5. $$

(β) Σε προηγούμενη άσκηση είδαμε οτι

$$ A_{35} = A_{\overset{1}{35}:\overline{5}|} + \upsilon^5\, {}_5p_{35}\, A_{40}. $$

Εδώ είναι γνωστά τα A_{35}, A_{40} από τον πίνακα ενώ το ${}_5p_{35}$ υπολογίστηκε στο ερώτημα (α). Άρα μπορούμε να βρούμε το $A_{\overset{1}{35}:\overline{5}|}$.

(γ) ${}_{5|}A_{35} = \upsilon^5\, {}_5p_{35}\, A_{40}$.

(δ) Έχουμε

$$ \bar{A}_{35:\overline{5}|} = \bar{A}_{\overset{1}{35}:\overline{5}|} + A_{35:\overset{1}{\overline{5}|}} $$

με $A_{35:\overset{1}{\overline{5}|}} = {}_5E_{35}$ και

$$ \bar{A}_{\overset{1}{35}:\overline{5}|} = \int_0^5 \upsilon^t f_{T_{35}}(t)\, dt. $$

Η $f_{T_{35}}$ είναι σταθερή σε κάθε διάστημα $[k, k+1)$ με τιμή ${}_kp_{35}\, q_{x+k}$, άρα το πιο πάνω ολοκλήρωμα ισούται με

$$ \sum_{i=0}^{4} \int_i^{i+1} \upsilon^t f_{T_{35}}(t)\, dt = \sum_{i=0}^{4} \int_0^1 \upsilon^{i+t}{}_ip_{35}\, q_{35+i}\, dt = \sum_{i=0}^{4} {}_ip_{35}\, q_{35+i} \int_0^1 \upsilon^{i+t}\, dt $$
$$ = \frac{\upsilon - 1}{\log \upsilon} \sum_{i=0}^{4} {}_ip_{35}\, q_{35+i}\upsilon^i. $$

Το υ είναι γνωστό, ενώ οι ποσότητες ${}_ip_{35}, q_{35+i}$ μπορούν να υπολογιστούν από τον πίνακα (πώς;). ■

Άσκηση. (4.12 στο [2]) Να υπολογιστεί το A_{70} αν δίνονται τα

$$ A_{50:\overline{20}|}, \quad A_{\overset{1}{50}:\overline{20}|}, \quad A_{50}. $$

Λύση

Γνωρίζουμε οτι

$$\begin{aligned} A_{50} &= A_{\overset{1}{50}:\overline{20}|} + {}_{20}E_{50}\, A_{70}, \\ A_{50:\overline{20}|} &= A_{\overset{1}{50}:\overline{20}|} + A_{50:\overset{1}{\overline{20}|}} = A_{\overset{1}{50}:\overline{20}|} + {}_{20}E_{50}. \end{aligned}$$

Λύνοντας ως προς A_{70}, βρίσκουμε

$$A_{70} = \frac{A_{50} - A_{\overset{1}{50}:\overline{20}|}}{A_{50:\overline{20}|} - A_{\overset{1}{50}:\overline{20}|}}.$$

■

Άσκηση. (4.2 στο [1]) Έστω ότι $\mu_x = 1/(1+x)$ για κάθε $x > 0$.
(α) Να δειχτεί ότι

$$\bar{A}_x = 1 - \delta \int_0^\infty e^{-\delta t} \frac{1+x}{1+x+t}\, dt.$$

(β) Με χρήση του ερωτήματος (α) να δειχθεί ότι $d\bar{A}_x/dx < 0$ για κάθε $x > 0$.

Λύση

(α) Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1.13), (1.12) και ολοκλήρωση κατά μέρη, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \overline{A}_x &= \int_0^\infty \upsilon^t e^{-\int_x^{x+t} \mu_s\, ds} \mu_{x+t}\, dt = \int_0^\infty \upsilon^t e^{-\log(1+x+t)+\log(x+1)} \frac{1}{1+x+t}\, dt \\ &= (1+x) \int_0^\infty e^{-\delta t} \frac{1}{(x+t+1)^2}\, dt = (1+x) \int_0^\infty e^{-\delta t} \frac{\partial}{\partial t} \frac{(-1)}{(x+t+1)}\, dt \\ &= 1 - (1+x)\delta \int_0^\infty e^{-\delta t} \frac{1}{x+t+1}\, dt. \end{aligned}$$

(β) Περνάμε την παράγωγο μέσα στο ολοκλήρωμα.

$$\frac{d\bar{A}_x}{dx} = -\delta \int_0^\infty e^{-\delta t} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1+x}{1+x+t}\, dt = -\delta \int_0^\infty t e^{-\delta t} \frac{1}{(1+x+t)^2}\, dt < 0.$$

Κεφάλαιο 3

Ράντες

Ράντα λέγεται μια σειρά πληρωμών που γίνονται σε ισαπέχουσες χρονικές στιγμές. Κάθε πληρωμή λέγεται **όρος** της ράντας. Μια ράντα λέγεται

- Σταθερή αν όλοι οι όροι είναι ίσοι μεταξύ τους.
- Μοναδιαία αν κάθε όρος της είναι 1 ευρώ.
- Διηνεκής αν έχει άπειρους όρους.
- Προκαταβλητέα αν κάθε όρος της πληρώνεται στην αρχή της περιόδου που του αντιστοιχεί.
- Ληξιπρόθεσμη αν κάθε όρος της πληρώνεται στο τέλος της περιόδου που του αντιστοιχεί.

3.1 Βέβαιες ράντες

Σε αυτές το πλήθος και το μέγεθος των πληρωμών είναι καθορισμένο και γίνεται οπωσδήποτε. Δεν εξαρτάται από τη ζωή κάποιου ατόμου. Θα χρειαστούμε πιο κάτω τις εξής ράντες.

(α) Μοναδιαία ληξιπρόθεσμη ράντα n περιόδων

Πληρώνει μία μονάδα σε καθέναν από τους χρόνους $1, 2, \ldots, n$ από σήμερα. Δηλαδή πληρώνει για n περιόδους και η πληρωμή γίνεται στο τέλος κάθε περιόδου. Η παρούσα της αξία είναι

$$\alpha_{\overline{n}|} = \upsilon + \upsilon^2 + ... + \upsilon^n = \upsilon\,\frac{\upsilon^n - 1}{\upsilon - 1} = \frac{1 - \upsilon^n}{i}.$$

Για $n = \infty$ παίρνουμε την τιμή της διηνεκούς μοναδιαίας ληξιπρόθεσμης ράντας.

$$\alpha_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{i}.$$

(β) Μοναδιαία προκαταβλητέα ράντα n περιόδων

Πληρώνει μία μονάδα σε καθέναν από τους χρόνους $0, 1, \ldots, n-1$ από σήμερα. Δηλαδή πληρώνει για n περιόδους και η πληρωμή γίνεται στην αρχή κάθε περιόδου. Η παρούσα της αξία είναι

$$\ddot{\alpha}_{\overline{n}|} = 1 + \upsilon + ... + \upsilon^{n-1} = \frac{\upsilon^n - 1}{\upsilon - 1} = \frac{1}{d}(1 - \upsilon^n).$$

Υπενθυμίζουμε ότι $d = 1 - \upsilon = \frac{i}{i+1}$. Για $n = \infty$, παίρνουμε την τιμή της διηνεκούς μοναδιαίας προκαταβλητέας ράντας.

$$\ddot{\alpha}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{d}.$$

(γ) Συνεχείς ράντες

Σε αυτές τις ράντες, οι πληρωμές γίνονται πολύ συχνά (θεωρητικά γίνονται κάθε στιγμή). Πληρώνεται ποσό $r(t)dt$ στο χρονικό διάστημα $[t, t + dt]$. Η συνάρτηση r λέγεται ρυθμός πληρωμών. Θεωρούμε τώρα τη ράντα που πληρώνει στο διάστημα $[0, y]$ με σταθερό ρυθμό $r(t) = 1$ για κάθε t. Δηλαδή πληρώνει 1 ανά μονάδα χρόνου. Η παρούσα της αξία είναι

$$\bar{\alpha}_{\overline{y}|} = \int_0^y \upsilon^t \, dt = \int_0^y e^{-\delta t} \, dt = \left. \frac{e^{-\delta t}}{-\delta} \right|_0^y = \frac{1 - e^{-\delta y}}{\delta}.$$

Όμοια, η παρούσα αξία μιας συνεχούς ράντας που πληρώνει με ρυθμό 1 στο διάστημα $[u, u + y]$ είναι

$$_{u|}\bar{a}_{\overline{y}|} = \int_u^{u+y} \upsilon^t \, dt = \int_u^{u+y} e^{-\delta t} \, dt = \left. \frac{e^{-\delta t}}{-\delta} \right|_u^{u+y} = \frac{e^{-\delta u} - e^{-\delta(u+y)}}{\delta} = e^{-\delta u} \, \bar{\alpha}_{\overline{y}|} = \upsilon^u \, \bar{\alpha}_{\overline{y}|}$$

Είναι μια αναβαλλόμενη (κατά u) ράντα με περίοδο διάρκειας y.

3.2 Ράντες ζωής

Είναι οι ράντες των οποίων η καταβολή εξαρτάται απο την ζωή ενός ατόμου. Η παρούσα αξία μιας τέτοιας ράντας είναι μια τυχαία μεταβλητή Y, ενώ η τιμή της ράντας είναι η $\mathbf{E}(Y)$. Όλες οι ράντες που θα θεωρήσουμε είναι μοναδιαίες εκτός αν δηλώνεται διαφορετικα. Δεν θα αναφέρουμε το «μοναδιαία» στην περιγραφή τους.

3.2.1 Ισόβια προκαταβλητέα ράντα ζωής

Δίνει 1 στην αρχή κάθε χρονιάς που ο (x) είναι ζωντανός . Η παρούσα αξία της είναι

$$Y = \sum_{j=0}^{K_x} \upsilon^j = \ddot{\alpha}_{\overline{K_x+1}|}.$$

Για τη μέση τιμή $\mathbf{E}(Y)$ (δηλαδή την αναλογιστική παρούσα αξία της ράντας) έχουμε τρεις τύπους

1ος τύπος: Εκφράζουμε αυτή τη μέση τιμή ως συνάρτηση της τιμής μιας ασφάλισης. Δηλαδή, εφόσον

$$Y = \frac{\upsilon^{K_x+1} - 1}{\upsilon - 1} = \frac{1 - \upsilon^{K_x+1}}{d},$$

(με $d := 1 - \upsilon$) βρίσκουμε

$$\ddot{a}_x := \mathbf{E}(Y) = \frac{1 - \mathbf{E}(\upsilon^{K_x+1})}{d} = \frac{1 - A_x}{d}. \tag{3.1}$$

A_x είναι η αξία της ισόβιας ασφάλισης που δίνει 1 στο τέλος του έτους θανάτου.

2ος τύπος: Εδώ υπολογίζουμε τη μέση τιμή με άλλο σκεπτικό. Γράφουμε την Y ως

$$Y = \sum_{j=0}^{\infty} \upsilon^j \, \mathbf{1}_{T_x > j}.$$

Το δεξί μέλος έχει την παρούσα αξία όλων των ποσών που θα καταβληθούν. Το ποσό 1 καταβάλλεται τη χρονική στιγμή j από τώρα μόνο όταν ο (x) είναι ζωντανός τότε (και αυτός είναι ο ρόλος της δείκτριας στο άθροισμα). Υπολογίζουμε τώρα τη μέση τιμή του αθροίσματος περνώντας τη μέση τιμή μέσα

$$\ddot{a}_x = \mathbf{E}(Y) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{E}(\upsilon^j \, 1_{K_x > j}) = \sum_{j=0}^{\infty} \upsilon^j \, \mathbf{P}(K_x > j) = \sum_{j=0}^{\infty} \upsilon^j \, \mathbf{P}(T_x > j) = \sum_{j=0}^{\infty} \upsilon^j \, {}_j p_x. \tag{3.2}$$

3ος τύπος: Εφόσον $Y = \ddot{a}_{\overline{K_x+1}|}$ και η K_x είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{N}$ και συνάρτηση πιθανότητας $f_{T_x}(k) = {}_{k|1}q_x = {}_{k|}q_x$, υπολογίζουμε

$$\mathbf{E}(Y) = \sum_{k=1}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} \, {}_{k|}q_x.$$

Μέσα στο άθροισμα εμφανίζεται η ποσότητα $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ της οποίας η τιμή είναι ως γνωστόν $(1 - \upsilon^n)/(1 - \upsilon)$.

3.2.2 Γενική μέθοδος

Έστω ότι έχουμε ένα δεδομένο σύνολο I χρονικών στιγμών από τώρα (π.χ., $I = \mathbb{N}$ ή $I = \{1, 2, \dots, n\}$). Θεωρούμε διακριτή ράντα η οποία είναι προγραμματισμένη να πληρώνει το ποσό $w(i)$ τον χρόνο $i \in I$, αλλά η καταβολή γίνεται μόνο αν τηρούνται κάποιες προϋποθέσεις (π.χ., ο (x) είναι ζωντανός). Ονομάζουμε A_i το ενδεχόμενο να γίνει η καταβολή τον χρόνο i. Τότε η παρούσα αξία της ράντας είναι

$$Y = \sum_{i \in I} w(i) \upsilon^i \mathbf{1}_{A_i}.$$

Περνώντας τη μέση τιμή μέσα από το άθροισμα βρίσκουμε την αναλογιστική παρούσα αξία της ράντας ως

$$\mathbf{E}(Y) = \sum_{i \in I} w(i) \upsilon^i \mathbf{P}(A_i).$$

Προσοχή, το I πρέπει να είναι σταθερό σύνολο, όχι τυχαίο. Αυτή τη μέθοδο χρησιμοποιήσαμε για την εύρεση του δεύτερου τύπου στην προηγούμενο παράδειγμα. Εκεί είχαμε $I = \mathbb{N}$. Δεν ήταν δυνατόν να έχουμε $I = \{0, 1, 2, \dots, K_x\}$ γιατί τότε η μέση τιμή δεν θα μπορούσε να περάσει μέσα στο άθροισμα.

Στην περίπτωση συνεχούς ράντας που έχει συνάρτηση ρυθμού $r(t)$ αλλά για την οποία η καταβολή γίνεται υπό προϋποθέσεις, ας ονομάσουμε A_t το ενδεχόμενο να γίνει καταβολή το χρονικό διάστημα $[t, t + dt]$. Τότε η παρούσα της αξία είναι

$$Y = \int_0^\infty \upsilon^t \cdot \mathbf{1}_{A_t} \cdot r(t)\, dt.$$

Για να βρούμε την αναλογιστική παρούσα της αξία, περνάμε τη μέση τιμή μέσα από το ολοκλήρωμα και βρίσκουμε

$$\mathbf{E}(Y) = \int_0^\infty \upsilon^t r(t) \mathbf{P}(A_t)\, dt.$$

Στο υπόλοιπο του κεφαλαίου θα χρησιμοποιήσουμε αυτή τη μέθοδο πολλές φορές .

3.2.3 Πρόσκαιρη προκαταβλητέα ράντα ζωής n-ετών

Αυτή καταβάλλει ποσό αξίας 1 στην αρχή κάθε έτους από τα επόμενα n στο πλήθος έτη υπό την προϋπόθεση ότι ο (x) είναι ζωντανός τότε. Η παρούσα της αξία είναι

$$Y = \sum_{k=0}^{K_x \wedge (n-1)} \upsilon^k \equiv \ddot{a}_{\overline{(K_x+1) \wedge n}|}.$$

Η αναλογιστική παρούσα αξία της, $\mathbf{E}(Y)$, συμβολίζεται με $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$. Δίνουμε για αυτήν δύο τύπους.
1)

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \mathbf{E}\left(\sum_{k=0}^{K_x \wedge (n-1)} \upsilon^k \right) = \mathbf{E}\left(\frac{1 - \upsilon^{K_x \wedge (n-1) + 1}}{1 - \upsilon} \right) = \frac{1 - \mathbf{E}(\upsilon^{(K_x+1) \wedge n})}{d} = \frac{1 - A_{x:\overline{n}|}}{d}. \tag{3.3}$$

2) Αφού

$$Y = \sum_{k=0}^{n-1} \upsilon^k \mathbf{1}_{[T_x > k]}$$

και $\mathbf{P}(T_x > k) = {}_k p_x$, παίρνοντας μέση τιμή στο αθροισμα βρίσκουμε ότι

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} \upsilon^k {}_k p_x. \tag{3.4}$$

3.2.4 Ισόβια ληξιπρόθεσμη ράντα ζωής

Αυτή καταβάλλει ποσό αξίας 1 στο τέλος κάθε έτους που ο (x) ήταν ζωντανός. Η παρούσα της αξία είναι

$$Y = \sum_{k=1}^{K_x} \upsilon^k = \sum_{k=0}^{K_x} \upsilon^k - 1 \equiv \ddot{a}_{\overline{K_x+1}|} - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \upsilon^k \mathbf{1}_{T_x \geqslant k}.$$

Στο πρώτο άθροισμα, εννοείται ότι αν $K_x = 0$, τότε το άθροισμα ισούται με μηδέν (δεν έχει κάποιο προσθεταίο). Από αυτούς τους τύπους παίρνουμε για την αναλογιστική παρούσα αξία της ράντας τους τύπους

$$a_x := \mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(\ddot{a}_{\overline{K_x+1}|}) - 1 = \ddot{a}_x - 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \upsilon^k {}_k p_x - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \upsilon^k {}_k p_x.$$

3.2.5 Πρόσκαιρη ληξιπρόθεσμη ράντα ζωής n-ετών

Αυτή καταβάλλει ποσό αξίας 1 στο τέλος καθενός εκ των επόμενων n ετών κατά τα οποία ο (x) είναι ζωντανός. Η παρούσα της αξία είναι

$$Y = \sum_{k=1}^{(K_x+1)\wedge n} \upsilon^k = \sum_{k=1}^{n} \upsilon^k \mathbf{1}_{T_x > k}.$$

Αναλογιστική παρούσα αξία : $a_{x:\overline{n}|} = \mathbf{E}(Y) = \sum_{k=1}^{n} \upsilon^k {}_k p_x$.

Άσκηση: Να αποδειχθεί ότι $a_{x:\overline{n}|} = {}_1E_x \ddot{a}_{x+1:\overline{n}|}$.

Λύση

$$\begin{aligned} a_{x:\overline{n}|} &= \sum_{k=1}^{n} \upsilon^k {}_k p_x = \sum_{k=0}^{n-1} \upsilon^{k+1} {}_{k+1} p_x = \sum_{k=0}^{n-1} \upsilon^{k+1} {}_1 p_x \, {}_k p_{x+1} \\ &= \upsilon p_x \sum_{k=0}^{n-1} \upsilon^k {}_k p_{x+1} = \upsilon p_x \ddot{a}_{x+1:\overline{n}|} = {}_1E_x \ddot{a}_{x+1:\overline{n}|}. \end{aligned}$$

■

Άσκηση. (Παράδειγμα 5.2.1 στο [1]) Αν η ένταση θνησιμότητας μ και η ένταση επιτοκίου είναι σταθερές, να υπολογιστούν συναρτήσει των μ, δ οι ποσότητες (θέτουμε $T := T_x$)

(i) $\bar{a}_x = \mathbf{E}(\bar{a}_{\overline{T}|})$,

(ii) $\mathrm{Var}(\bar{a}_{\overline{T}|})$,

(iii) $\mathbf{P}(\bar{a}_{\overline{T}|} > \bar{a}_x)$.

Λύση

Βρίσκουμε την πυκνότητα της T. Για $t > 0$ ισχύει $\mathbf{P}(T > t) = {}_t p_x = e^{-\mu t}$, άρα η T έχει πυκνότητα $f_T(t) = \mu e^{-\mu t}$ για κάθε $t > 0$. Δηλαδή ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο μ.

(i)

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty \upsilon^s {}_s p_x \, ds = \int_0^\infty \upsilon^s e^{-\mu s} \, ds = \int_0^\infty e^{-(\delta+\mu)s} \, ds = \frac{1}{\delta+\mu}.$$

(ii)

$$\begin{aligned} \bar{a}_{\overline{T}|} &= \frac{1-\upsilon^T}{\delta} \Rightarrow \mathrm{Var}(\bar{a}_{\overline{T}|}) = \frac{1}{\delta^2} \mathrm{Var}(\upsilon^T) = \frac{1}{\delta^2} (\mathbf{E}(\upsilon^{2T}) - \{\mathbf{E}(\upsilon^T)\}^2) \\ &= \frac{1}{\delta^2} ({}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2). \end{aligned}$$

Υπενθυμίζουμε ότι το 2 στην έκφραση ${}^2\bar{A}_x$ σημαίνει ότι στην ποσότητα $\bar{A}_x$ βάζουμε όπου δ το 2δ. Υπολογίζουμε το $\bar{A}_x$ λοιπόν. Κατά τα γνωστά,

$$\mathbf{E}(e^{-\delta T}) = \bar{A}_x = 1 - \delta \bar{a}_x = \frac{\mu}{\delta + \mu}.$$

Μετά τις πράξεις, βρίσκουμε ότι η ζητούμενη διασπορά ισούται με $\frac{\mu}{(2\delta+\mu)(\delta+\mu)^2}$.

(iii) Πάλι η σχέση $\bar{a}_{\overline{T}|} = (1 - e^{-\delta T})/\delta$ δίνει ότι η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\mathbf{P}\left(e^{-\delta T} < \frac{\mu}{\delta + \mu}\right) = \mathbf{P}\left(T > -\frac{1}{\delta}\log\frac{\mu}{\delta+\mu}\right) = e^{\frac{\mu}{\delta}\log\frac{\mu}{\delta+\mu}} = \left(\frac{\mu}{\delta+\mu}\right)^{\mu/\delta}.$$

Χρησιμοποιήσαμε την $\mathbf{P}(T > t) = e^{-\mu t}$, που αποδείχθηκε στην αρχή της λύσης.

3.2.6 Ισόβια συνεχής ράντα ζωής

Αυτή πληρώνει συνεχώς με ρυθμό 1 έως τη στιγμή του θανάτου. Η παρούσα της αξία είναι

$$Y := \int_0^{T_x} \upsilon^t dt = \frac{1 - \upsilon^{T_x}}{\delta} = \int_0^\infty \upsilon^t \mathbf{1}_{T_x > t}.$$

Η αναλογιστική παρούσα αξία της είναι

$$\bar{a}_x = \frac{1 - \mathbf{E}(\upsilon^{T_x})}{\delta} = \frac{1 - \bar{A}_x}{\delta}.$$

Επίσης, παίρνοντας μέση τιμή στο τελευταίο ολοκλήρωμα πιο πάνω βρίσκουμε ότι

$$\mathbf{E}(Y) = \int_0^\infty \upsilon^t \mathbf{P}(T_x > t)\, dt = \int_0^\infty \upsilon^t {}_t p_x\, dt$$

3.2.7 Πρόσκαιρη συνεχής ράντα ζωής

Αυτή πληρώνει συνεχώς με ρυθμό 1 έως τον χρόνο $T_x \wedge n$. Η παρούσα της αξία είναι

$$Y := \int_0^{n \wedge T_x} \upsilon^t dt = \frac{1 - \upsilon^{n \wedge T_x}}{\delta} = \int_0^n \upsilon^t \mathbf{1}_{T_x > t}\, dt$$

Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, βρίσκουμε για την αναλογιστική παρούσα αξία της τους τύπους

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1 - \bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\delta} = \int_0^n \upsilon^t {}_t p_x\, dt.$$

Άσκηση. (Εξέταση Ιανουαρίου 2019)

(α) Ποια η παρούσα αξία μιας ράντας ζωής που καταβάλλει ποσό 1 σε καθέναν από τους χρόνους $0, 1, \ldots, n-1$ κατά τους οποίους το άτομο (x) είναι ζωντανό;

(β) Να υπολογιστεί η μέση τιμή, $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$, αυτής της παρούσας αξίας με τη βοήθεια της συνάρτησης ${}_t p_x$ και της παραμέτρου υ.

(γ) Να υπολογιστεί η

$$\frac{\partial}{\partial x}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

με τη βοήθεια των συναρτήσεων ${}_t p_x, \mu_x$ και της παραμέτρου υ.

Λύση

(α) Η παρούσα αξία της ράντας δίνεται απο τις εξής εκφράσεις

$$Y = \sum_{j=0}^{K_x \wedge (n-1)} \upsilon^j = \sum_{j=1}^{n-1} \upsilon^j \mathbf{1}_{[K_x \geqslant j]} = \frac{1 - \upsilon^{(K_x \wedge (n-1))+1}}{1 - \upsilon} = \frac{1 - \upsilon^{(K_x+1)\wedge n}}{d}.$$

(β) Παίρνοντας μέση τιμή στο δεύτερο άθροισμα βρίσκουμε ότι

$$E(Y) = \sum_{j=0}^{n-1} \upsilon^j \mathbf{P}(K_x \geqslant j) = \sum_{j=0}^{n-1} \upsilon^j {}_j p_x.$$

(γ)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} {}_j p_x &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{s(x+j)}{s(x)} = \frac{s'(x+j)s(x) - s(x+j)s'(x)}{s^2(x)} \\ &= \frac{s(x+j)}{s(x)} \left(\frac{s'(x+j)}{s(x+j)} - \frac{s'(x)}{s(x)} \right) = {}_j p_x (\mu_x - \mu_{x+j}).\end{aligned}$$

Άρα

$$\frac{\partial}{\partial x} \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{j=0}^{n-1} \upsilon^j {}_j p_x (\mu_x - \mu_{x+j}).$$

■

Άσκηση. (5.11 στο [1]) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{Var}(a_{\overline{K_x}|}) = \mathrm{Var}(\ddot{a}_{\overline{K_x+1}|}) = \frac{1}{d^2} \mathrm{Var}(\upsilon^{K_x+1})$.

Λύση

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $a_{\overline{n}|} = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \upsilon^k = \upsilon + \upsilon^2 + \cdots + \upsilon^n = \ddot{a}_{n+1} - 1$ (η ισότητα $a_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{n+1} - 1$ ισχύει και για $n = 0$). Επίσης $\ddot{a}_{n+1} = \frac{1-\upsilon^{n+1}}{1-\upsilon}$ με $1 - \upsilon = d$. Άρα

$$a_{\overline{K_x}|} = \ddot{a}_{\overline{K_x+1}|} - 1 = \frac{1 - \upsilon^{K_x+1}}{d} - 1.$$

Παίρνοντας τώρα διασπορά σε αυτές τις ισότητες και χρησιμοποιώντας τις γνωστές ιδιότητες της διασποράς έχουμε το ζητούμενο. Δηλαδή

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(a_{\overline{K_x}|}) &= Var(\ddot{a}_{\overline{K_x+1}|} - 1) = \mathrm{Var}(\ddot{a}_{\overline{K_x+1}|}) \\ &= \mathrm{Var}\left(\frac{1 - \upsilon^{K_x+1}}{d} \right) = \frac{1}{d^2} \mathrm{Var}(1 - \upsilon^{K_x+1}) = \frac{1}{d^2} Var(\upsilon^{K_x+1}).\end{aligned}$$

■

Άσκηση. Δίνεται ότι $i = 0$ και $\ell_x = 10^6(100 - x)$ για κάθε $x \in [0, 100]$. Να υπολογιστεί η αναλογιστική παρούσα αξία μιας ισόβιας ράντας που καταβάλλεται στον (80) και η οποία καταβάλλεται συνεχώς με ρυθμό 1 το πρώτο έτος και με ρυθμό 2 από το δεύτερο έτος και έπειτα.

Λύση

Ο ρυθμός καταβολής της ράντας είναι $r(t) = \begin{cases} 1 & \text{αν } t \in [0, 1], \\ 2 & \text{αν } t \in [2, 20]. \end{cases}$

Επειδή $i = 0$, έχουμε $\upsilon = 1/(1 + i) = 1$. Έτσι, η παρούσα αξία της ράντας είναι

$$Y = \int_0^{20} \upsilon^t r(t) \mathbf{1}_{T_{80} > t} dt = \int_0^{20} r(t) \mathbf{1}_{T_{80} > t} dt.$$

Η αναλογιστική παρούσα αξία είναι

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(Y) &= \mathbf{E}\left(\int_0^{20} r(t) \mathbf{1}_{T_{80} > t}\, dt \right) = \int_0^{20} r(t) {}_t p_{80} dt = \int_0^1 \frac{s(t+80)}{s(80)} dt + 2 \int_1^{20} \frac{s(t+80)}{s(80)} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\ell_0 s(t+80)}{\ell_0 s(80)} dt + 2 \int_1^{20} \frac{\ell_0 s(t+80)}{\ell_0 s(80)} dt = \int_0^1 \frac{\ell_{t+80}}{\ell_{80}} dt + 2 \int_1^{20} \frac{\ell_{t+80}}{\ell_{80}} dt \\ &= \int_0^1 \frac{10^6(100 - (t+80))}{10^6(100 - 80)} dt + 2 \int_1^{20} \frac{10^6(100 - (t+80))}{10^6(100 - 80)} dt \\ &= \int_0^1 \frac{20 - t}{20} dt + 2 \int_1^{20} \frac{20 - t}{20} dt = 1 - \frac{1}{40} + 2 \cdot 19 - \frac{1}{20}(400 - 1) = \frac{761}{40}.\end{aligned}$$

Άσκηση. (5.13 στο [1]) Για $n \in \mathbb{N}^+$ να αποδειχθεί ότι $A_{x:\overline{n}|} = \upsilon \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n-1}|}$.

Λύση

Για $k \geqslant 1$ ισχύει $\upsilon \ddot{a}_{\overline{k}|} = \upsilon + \upsilon^2 + \cdots + \upsilon^k$ και $a_{\overline{k-1}|} = \upsilon + \upsilon^2 + \cdots + \upsilon^{k-1}$, οπότε

$$\upsilon \ddot{a}_{\overline{k}|} - a_{\overline{k-1}|} = \upsilon^k.$$

Εφαρμόζουμε αυτή την ισότητα για $k := (K_x + 1) \wedge n (\geqslant 1)$ και παίρουμε μέση τιμή. Δηλαδή

$$\upsilon \mathbf{E}(\ddot{a}_{\overline{(K_x+1)\wedge n}|}) - \mathbf{E}(a_{\overline{K_x \wedge (n-1)}|}) = \mathbf{E}(\upsilon^{(K_x+1)\wedge n}).$$

Και κοιτώντας τους ορισμούς των $A_{x:\overline{n}|}, \ddot{a}_{x:\overline{n}|}, a_{x:\overline{n-1}|}$ βλέπουμε ότι η προηγούμενη σχέση είναι αυτό που θέλουμε να δείξουμε. ■

Άσκηση. (5.3 στο [2]) Δίνονται τα $\ddot{a}_{50:\overline{10}|}, a_{50:\overline{10}|}, {}_{10}p_{50}$. Ποιό είναι το ετήσιο επιτόκιο i;

Λύση

Παρατηρούμε ότι $\ddot{a}_{50:\overline{10}|} = \sum_{j=0}^{9} \upsilon^j {}_j p_{50}$ και

$$a_{50:\overline{10}|} = \sum_{j=1}^{10} \upsilon^j {}_j p_{50} = \ddot{a}_{50:\overline{10}|} - 1 + \upsilon^{10} {}_{10}p_{50}.$$

Το μόνο άγνωστο σε αυτή τη σχέση είναι το υ. Βρίσκουμε $\upsilon^{10} = \frac{1 + a_{50:\overline{10}|} - \ddot{a}_{50:\overline{10}|}}{{}_{10}p_{50}}$, επομένως

$$\upsilon = \left(\frac{1 + a_{50:\overline{10}|} - \ddot{a}_{50:\overline{10}|}}{{}_{10}p_{50}} \right)^{1/10}$$

και το i προκύπτει από τη σχέση $\upsilon = 1/(1+i)$. ■

3.2.8 Αναβαλλόμενες ράντες ζωής

Αυτές αρχίζουν να καταβάλλονται σε χρόνο u από σήμερα. Η αναβολή μπορεί να εφαρμοστεί σε όλα τα είδη ραντών ζωής που είδαμε ως τώρα.

Παράδειγμα: Ισόβια προκαταβλητέα ράντα ζωής με αναβολή u ετών.

Πληρώνει 1 στην αρχή κάθε χρονιάς που ο (x) είναι ζωντανός ξεκινώντας όμως u χρόνια από τώρα. Η παρούσα αξία της είναι

$$Y = \sum_{j=u}^{\infty} \upsilon^j \mathbf{1}_{T_x > j}.$$

Η αναλογιστική παρούσα αξία της είναι

$${}_{u|}\ddot{a}_x := E(Y) = \sum_{j=u}^{\infty} \upsilon^j \mathbf{P}(T_x > j) = \sum_{j=u}^{\infty} \upsilon^j {}_j p_x.$$

Σχετίζεται με δύο άλλες ράντες που γνωρίζουμε ως εξής

$$\ddot{a}_x = \ddot{a}_{x:\overline{u}|} + {}_{u|}\ddot{a}_x.$$

Αυτό αποδεικνύεται με ένα απλό οικονομικό επιχείρημα αλλά και αλγεβρικά από την πιο πάνω έκφραση για την ${}_{u|}\ddot{a}_x$ και τις

$$\ddot{a}_x = \sum_{j=0}^{\infty} \upsilon^j {}_j p_x, \qquad \ddot{a}_{x:\overline{u}|} = \sum_{j=0}^{u-1} \upsilon^j {}_j p_x.$$

Επίσης ισχύει

$$ {}_{u|}\ddot{a}_x = {}_uE_x \ddot{a}_{x+u}. \tag{3.5} $$

Απόδειξη

$$ {}_{u|}\ddot{a}_x = \sum_{j=0}^{\infty} \upsilon^{u+j}{}_{u+j}p_x = \upsilon^u \sum_{j=0}^{\infty} {}_up_x\, {}_jp_{x+u}\upsilon^j = \upsilon^u{}_up_x \sum_{j=0}^{\infty} {}_jp_{x+u}\upsilon^j = {}_uE_x\ddot{a}_{x+u}. $$

Χρησιμοποιήσαμε την ${}_{u+j}p_x = {}_up_x\, {}_jp_{x+u}$.

Άσκηση. (5.7 στο [2]) Δίνονται οι ποσότητες ${}_{10|}\ddot{a}_x = 4, \ddot{a}_x = 10, {}_{10}E_x = 0.375, \upsilon = 0.94$. Να βρεθεί η τιμή $A^{\;1}_{x:\overline{10}|}$.

Λύση

Κατ' αρχάς, έχουμε

$$ \ddot{a}_{10} = \ddot{a}_{x:\overline{10}|} + {}_{10|}\ddot{a}_x \Rightarrow \ddot{a}_{x:\overline{10}|} = \ddot{a}_{10} - {}_{10|}\ddot{a}_x = 10 - 4 = 6. $$

Έπειτα, η σχέση $\ddot{a}_{x:\overline{10}|} = \frac{1-A_{x:\overline{10}|}}{d}$ [δες (3.3)] δίνει

$$ A_{x:\overline{10}|} = 1 - d\ddot{a}_{x:\overline{10}|} = 1 - (1-\upsilon)\ddot{a}_{x:\overline{10}|} = 1 - 0,06 * 6 = 0.64 $$

Τέλος, από την $A_{x:\overline{10}|} = A^1_{x:\overline{10}|} + A_{x:\overline{10}|}^{\;\;1}$ παίρνουμε

$$ A^1_{x:\overline{10}|} = A_{x:\overline{10}|} - A_{x:\overline{10}|}^{\;\;1} = A_{x:\overline{10}|} - {}_{10}E_x = 0,64 - 0,375 = 0.265 $$

■

Άσκηση. (5.2 στο [2]) Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή

$$ Y = \begin{cases} \upsilon^{T_x}\bar{a}_{\overline{n-T_x}|} & \text{αν } T_x \leqslant n, \\ 0 & \text{αν } T_xT_x > n. \end{cases} $$

(α) Να περιγραφεί μια συνεχής ράντα για την οποία η παρούσα αξία είναι Y.
(β) Δείξτε ότι $\mathbf{E}(Y) = \bar{a}_{\overline{n}|} - \bar{a}_{x:\overline{n}|}$.
(γ) Εξηγήσετε το ερώτημα (β) με ένα οικονομικό επιχείρημα.

Λύση

(α) Μια τέτοια ράντα είναι η εξής. Αν $T_x \leqslant n$, τότε καταβάλλει συνεχώς με ρυθμό 1 από τη στιγμή του θανάτου εώς και τα n έτη, ενώ αν $T_x > n$ δεν καταβάλλει τίποτα.
(β) Υπενθυμίζουμε ότι

$$ \bar{a}_{\overline{y}|} = \frac{1-\upsilon^y}{\delta}. $$

Επομένως

$$ \begin{aligned} Y &= \upsilon^{T_x}\frac{1-\upsilon^{n-T_x}}{\delta}\mathbf{1}_{T_x<n} = \frac{\upsilon^{T_x}-\upsilon^n}{\delta}\mathbf{1}_{[T_x<n]} = \frac{\upsilon^{T_x\wedge n}-\upsilon^n}{\delta} \\ &= \frac{1-\upsilon^n-(1-\upsilon^{T_x\wedge n})}{\delta} = \bar{a}_{\overline{n}|} - \bar{a}_{\overline{T_x\wedge n}|}. \end{aligned} $$

Και παίρνοντας μέση τιμή βρίσκουμε τη ζητούμενη.

(γ) Θεωρούμε 2 ράντες. Την πρώτη την παίρνουμε ενώ τη δεύτερη την πληρώνουμε εμείς σε κάποιον άλλον. Η πρώτη πληρώνει με ρυθμό 1 σε όλο το διάστημα $[0, n]$. Στη δεύτερη πληρώνουμε από το 0 μέχρι το $T_x \wedge n$.
Το συνολικό τους αποτέλεσμα είναι η ράντα που περιγράψαμε στο (α). Η τιμή της πρώτης είναι $\bar{a}_{\overline{n}|}$ ενώ της δεύτερης είναι $\bar{a}_{\overline{T_x\wedge n}|}$. Άρα η αξία της θέσης μας πρέπει να είναι από τη μία $\mathbf{E}(Y)$ ενώ από την άλλη είναι προφανώς $\bar{a}_{\overline{n}|} - \bar{a}_{\overline{T_x\wedge n}|}$.

Άσκηση. (§5.2 στο [1]) Εγγυημένη ράντα ζωής. Μια ράντα πληρώνει συνεχώς με ρυθμό 1 στο διάστημα $[0, T_x \vee n]$ (δηλαδή ως το μέγιστο των T_x, n). Να δειχθεί ότι η αναλογιστική παρούσα αξία της, που τη συμβολίζουμε με $\bar{a}_{\overline{x:\overline{n}|}}$, δίνεται από τη σχέση

$$\bar{a}_{\overline{x:\overline{n}|}} = \bar{a}_{\overline{n}|} + \int_n^\infty \upsilon^t {}_tp_x \, dt.$$

<u>Λύση</u>

Η παρούσα αξία της ράντας είναι

$$Y = \int_0^{n \vee T_x} \upsilon^t \, dt = \int_0^\infty \upsilon^t \mathbf{1}_{t < n \vee T_x} \, dt.$$

Παίρνοντας μέση τιμή έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y) &= \int_0^\infty \upsilon^t \mathbf{P}(t < n \vee T_x) \, dt = \int_0^n \upsilon^t \, dt + \int_n^\infty \upsilon^t \mathbf{P}(t < T_x) \, dt \\ &= \bar{a}_{\overline{n}|} + \int_n^\infty \upsilon^t {}_tp_x \, dt. \end{aligned}$$

■

Κεφάλαιο 4

Ασφάλιστρα

Κάποιος αγοράζει μια ασφάλεια ζωής που πληρώνει ένα ποσό την στιγμή του θανάτου ή στο τέλος του έτους θανάτου. Η αγορά μπορεί να γίνει με μια εφ′ άπαξ πληρωμή τη στιγμή της υπογραφής του συμβολαίου και το ποσό της πληρωμής είναι η αναλογιστική αξία της παροχής, την οποία είδαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο πώς υπολογίζεται για συνηθισμένα συμβόλαια ασφάλειας ζωής. Συνήθως όμως η αγορά γίνεται με περιοδικές πληρωμές (ασφάλιστρα). Πόσο πρέπει να είναι αυτές οι πληρωμές; Αυτό είναι το θέμα αυτού του κεφαλαίου.

Ορισμος. **Ολική απώλεια** του ασφαλιστή λέγεται η ποσότητα

$$L := \text{παρούσα αξία παροχών} - \text{παρούσα αξία ασφαλίστρων}$$

Ο προσδιορισμός του μεγέθους των ασφαλίστρων μπορεί να γίνει με διάφορες μεθόδους (και κάθε μία δίνει διαφορετική πρόταση για τα ασφάλιστρα). Σε αυτές της σημειώσεις θα ακολουθήσουμε μόνο την αρχή της ισοδυναμίας, η οποία είναι η εξής.

Αρχή της ισοδυναμίας: Το ασφάλιστρα πρέπει να είναι τέτοια ώστε $\mathbf{E}(L) = 0$. Δηλαδή

$$\mathbf{E}(\text{παρούσα αξία παροχών}) = \mathbf{E}(\text{παρούσα αξία ασφαλίστρων})$$

Αυτή η αρχή καθορίζει μοναδικά τα ασφάλιστρα εάν οι πληρωμές είναι ισόποσες, κάτι το οποίο θα υποθέτουμε στο εξής εκτός να σημειώνεται διαφορετικά.

Η καταβολή των ασφαλίστρων μπορεί να γίνει με διακριτό ή συνεχή τρόπο. Όταν γίνεται με διακριτό τρόπο, το ασφάλιστρο που αντιστοιχεί σε μια περίοδο πληρώνεται στην αρχή της περιόδου. Το πρώτο ασφάλιστρο επομένως πληρώνεται τη στιγμή υπογραφής του συμβολαίου. Αυτό είναι φυσιολογικό γιατί αν υποθέσουμε ότι ο κάποιος υπογράφει σήμερα μια ισόβια ασφάλεια ζωής και πληρώνει το πρώτο ασφάλιστρο σε έναν χρόνο από σήμερα, το δέυτερο σε δύο χρόνια, κτλ, τότε στην περίπτωση που αποσυρθεί από το συμβόλαιο σε 10 μήνες, θα έχει απολάβει 10 μήνες κάλυψη χωρίς κανένα κόστος.

Παράδειγμα: (Διακριτή καταβολή) Ο (x) θέλει να αγοράσει ισόβια ασφάλιση που πληρώνει 1 στο τέλος του έτους θανάτου. Θα πληρώνει ποσό P στην αρχή κάθε έτους που είναι ζωντανός ξεκινώντας από την στιγμή υπογραφής του συμβολαίου (Δηλαδή θα πληρώνει P τις χρονικές στιγμές $0, 1, 2, \ldots, K_x$).

1) Να βρεθεί το P.

2) Να βρεθεί το $\mathrm{Var}(L)$.

<u>Λύση</u>

1) Έχουμε $L = \upsilon^{K_x+1} - P\ddot{a}_{\overline{K_x+1}|}$.
Οπότε $0 = \mathbf{E}(L) = \mathbf{E}(\upsilon^{K_x+1}) - P\,\mathbf{E}(\ddot{a}_{\overline{K_x+1}|}) = A_x - P\ddot{a}_x \Rightarrow P = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$.

2)

$$L = \upsilon^{K_x+1} - P\frac{\upsilon^{K_x+1} - 1}{\upsilon - 1} = \upsilon^{K_x+1}\left(1 + \frac{P}{1-\upsilon}\right) - \frac{P}{1-\upsilon} = \upsilon^{K_x+1}\left(1 + \frac{P}{d}\right) - \frac{P}{d}.$$

Άρα

$$\mathrm{Var}(L) = \left(1 + \frac{P}{d}\right)^2 \mathrm{Var}(\upsilon^{K_x+1}) = \left(\frac{\ddot{a}_x d + A_x}{\ddot{a}_x d}\right)^2 \mathrm{Var}(\upsilon^{K_x+1}) = \frac{1}{(\ddot{a}_x d)^2} \mathrm{Var}(\upsilon^{K_x+1}).$$

από την ιδιότητα $\mathrm{Var}(aY + b) = a^2 \mathrm{Var}(Y)$ της διασποράς (εδώ τα a, b είναι σταθερές ενώ το Y τυχαία μεταβλητή) και τη σχέση (3.1). ■

Παράδειγμα: (Συνεχής καταβολή) Ασφάλιση δίνει 1 τη στιγμή του θανάτου και πληρώνεται συνεχώς με ρυθμό $\bar{P}$ (ποσό $\bar{P}\,dt$ σε χρόνο dt). Ποιο είναι το $\bar{P}$;

Λύση

Η απώλεια του ασφαλιστή είναι

$$L = \upsilon^{T_x} - \int_0^{T_x} \upsilon^t \bar{P}\,dt = \upsilon^{T_x} - \bar{P}\,\frac{1-\upsilon^{T_x}}{\delta} = \upsilon^{T_x} - \bar{P}\,\bar{a}_{\overline{T_x}|}.$$

Άρα $0 = \mathbf{E}(L) = \mathbf{E}(\upsilon^{T_x}) - \bar{P}E(\bar{a}_{\overline{T_x}|}) = \bar{A}_x - \bar{P}\bar{a}_x \Rightarrow \bar{P} = \bar{A}_x/\bar{a}_x$. ■

Άσκηση. (6.4 στο [1]) Θεωρούμε μια ισόβια ασφάλιση που δίνει 1 την στιγμή του θανάτου για τον (x), ο οποίος έχει υπόλοιπο ζωής T_x τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κατανομή $\exp(1/50)$. Η ένταση επιτοκίου είναι $\delta = 0.06$. Ο (x) πληρώνει την ασφάλιση με συνεχή τρόπο με ρυθμό $\bar{P}$.

(α) Να βρεθεί ο ρυθμός πληρωμής $\overline{P}$ με βάση την αρχή της ισοδυναμίας.

(β) Να βρεθεί ο ρυθμός πληρωμής $\overline{P}$ αν θέλουμε να ισχύει $\mathbf{P}(L > 0) = \frac{1}{2}$.

(γ) Κάντε το (β) για $\delta = 0$.

Λύση

Θέτουμε $\lambda = 1/50$.

(α) Κατά τα γνωστά, $L = \upsilon^{T_x} - \bar{P}\,a_{\overline{T_x}|}$ και

$$0 = \mathbf{E}(L) = \bar{A}_x - \overline{P}\bar{a}_x \Rightarrow \overline{P} = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}.$$

Τώρα θα υπολογίσουμε τους όρους του κλάσματος. Παρατηρούμε πρώτα ότι αυτοί σχετίζονται. Δηλαδή

$$\bar{a}_x = \mathbf{E}\left(\frac{1-\upsilon^{T_x}}{\delta}\right) = \frac{1-\bar{A}_x}{\delta}.$$

Θα υπολογίσουμε λοιπόν το $\bar{A}_x$.

$$\begin{aligned}\bar{A}_x = \mathbf{E}(\upsilon^{T_x}) &= \int_0^\infty \upsilon^t f_{T_x}(t)\,dt = \int_0^\infty \upsilon^t \lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda \int_0^\infty e^{-\delta t} e^{-\lambda t} dt \\ &= \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda+\delta)t} dt = \lambda \frac{e^{-(\lambda+\delta)t}}{-(\lambda+\delta)}\bigg|_0^\infty = \lambda\left(0 - \frac{1}{-(\lambda+\delta)}\right) = \frac{\lambda}{\lambda+\delta}.\end{aligned}$$

Βρίσκουμε επομένως ότι $\bar{a}_x = 1/(\lambda+\delta)$, και έτσι $\bar{P} = \lambda = 1/50$.

(β) Έχουμε

$$L = \upsilon^{T_x} - \bar{P}\frac{1-\upsilon^{T_x}}{\delta} = \upsilon^{T_x}\left(1 + \frac{\bar{P}}{\delta}\right) - \frac{\bar{P}}{\delta}.$$

Έτσι, εφόσον $\upsilon = e^{-\delta}$,

$$\frac{1}{2} = \mathbf{P}(L > 0) = \mathbf{P}\left(\upsilon^{T_x} > \frac{\bar{P}}{\bar{P}+\delta}\right) = \mathbf{P}\left(-\delta T_x > \log\frac{\overline{P}}{\overline{P}+\delta}\right) = \mathbf{P}\left(T_x < -\frac{1}{\delta}\log\frac{\overline{P}}{\overline{P}+\delta}\right)$$

Για μια τυχαία μεταβλητή Y με κατανομή $\exp(\lambda)$ υπολογίζουμε (για $t > 0$) ότι

$$\mathbf{P}(Y \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda s}\,ds = e^{-\lambda s}\big|_0^t = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Άρα η πιο πάνω σχέση δίνει

$$\frac{1}{2} = \mathbf{P}(T_x < -\frac{1}{\delta}\log\frac{\bar{P}}{\bar{P}+\delta}) = 1 - \exp\left(\lambda\frac{1}{\delta}\log\frac{\bar{P}}{\bar{P}+\delta}\right) = 1 - \left(\frac{\bar{P}}{\bar{P}+\delta}\right)^{\lambda/\delta}$$
$$\Rightarrow \left(\frac{\bar{P}}{\bar{P}+\delta}\right)^{\lambda/\delta} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\bar{P}}{\bar{P}+\delta} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\delta}{\lambda}} \Rightarrow 1 + \frac{\delta}{\bar{P}} = 2^{\frac{\delta}{\lambda}} \Rightarrow \bar{P} = \frac{\delta}{2^{\frac{\delta}{\lambda}-1}} \simeq 0,00857$$

(γ) Αν $\delta = 0$ τότε $\upsilon = e^{-\delta} = 1$ και η συνάρτηση απώλειας του ασφαλιστή ισούται με $L = 1 - \bar{P}T_x$ αφού για κάθε σταθερό $y > 0$ έχουμε $a_{\overline{y}|} = \int_0^y \upsilon^t\,dt = \int_0^y 1\,dt = y$. Έτσι

$$\frac{1}{2} = \mathbf{P}(L > 0) = \mathbf{P}(1 - \bar{P}\,T_x > 0) = \mathbf{P}\left(T_x < \frac{1}{\bar{P}}\right) = 1 - e^{-\frac{\lambda}{\bar{P}}}.$$

Επομένως $e^{-\frac{\lambda}{\bar{P}}} = 1/2 \Rightarrow \lambda/\bar{P} = \log 2 \Rightarrow \bar{P} = \lambda/\log 2$. ■

Συμβολισμός: Για το ποσό της δόσης χρησιμοποιείται το σύμβολο P με διάφορα σύμβολα τοποθετημένα πάνω σε αυτό.

- Το $\bar{P}$ σημαίνει ότι η πληρωμή γίνεται με συνεχή τρόπο. Αν λείπει αυτή η γραμμή, τότε η πληρωμή γίνεται σε διακριτό χρόνο και κάθε δόση πληρώνεται στην αρχή της περιόδου που της αντιστοιχεί.
- Ο δείκτης h κάτω αριστερά σε ένα σύμβολο όπως το ${}_hP_x$ σημαίνει ότι η αγορά του συμβολαίου πραγματοποιείται στο χρονικό διάστημα $[0, h]$ από τη στιγμή υπογραφής.
- Όταν το P ακολουθεί τιμή ασφαλίστρου σε παρένθεση, όπως στο $\bar{P}(\bar{A}_x)$, αυτό σημαίνει ότι αγοράζουμε την ασφάλεια ζωής που δηλώνεται μέσα στην παρένθεση.

Άσκηση. (6.7 στο [1]) Αν $\delta = 0$, να δειχθεί ότι $\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{1}{\mathring{e}_x}$.

Λύση

Όπως στην προηγούμενη άσκηση, η συνάρτηση απώλειας του ασφαλιστή είναι $L = 1 - \bar{P}T_x$. Οπότε η

$$0 = \mathbf{E}(L) = \mathbf{E}(1 - \bar{P}T_x) = 1 - \bar{P}\,\mathbf{E}(T_x) = 1 - \bar{P}\,\mathring{e}_x$$

δίνει $\bar{P} = \frac{1}{\mathring{e}_x}$. ■

Άσκηση. (6.5 στο [1]) Αν η μ_x είναι γνησίως αύξουσα ως προς x να δειχθεί ότι $\bar{P}(\bar{A}_x) > \mu_x$ για κάθε $x > 0$.

Λύση

Κατά τα γνωστά, ισχύει $\bar{P}(\bar{A}_x) = \bar{A}_x/\bar{a}_x$ και $\bar{a}_x = \int_0^\infty \upsilon^t{}_tp_x dt$ Έπειτα έχουμε

$$\bar{A}_x = E(\upsilon^{T_x}) = \int_0^\infty \upsilon^t{}_tp_x\,\mu_{x+t}\,dt > \int_0^\infty \upsilon^t{}_tp_x\,\mu_x\,dt = \mu_x\int_0^\infty \upsilon^t{}_tp_x\,dt = \mu_x\bar{a}_x,$$

το οποίο δίνει το ζητούμενο. Η ανισότητα στα ολοκληρώματα ισχύει γιατί $\mu_{x+t} > \mu_x$ για κάθε $t \in (0, \infty)$. ■

Άσκηση. Ο (35) ασφαλίζεται για 10 χρόνια με τους εξής όρους. Έστω $T = T_{35}$.
Αν $T \in (0, 5)$, τότε οι κληρονόμοι του παίρνουν 10000 στο τέλος του έτους θανάτου.
Αν $T \in [5, 10]$, τότε οι κληρονόμοι του παίρνουν 20000 στο τέλος του έτους θανάτου.
Αν $T > 5$, τότε ο (35) παίρνει 5000 τη στιγμή 5.
Αν $T > 10$, τότε ο (35) παίρνει 10000 τη στιγμή 10.

Πληρώνει την ασφάλιση με ετήσιο προκαταβλητέο ασφάλιστρο που είναι P τα πρώτα 5 χρόνια και $2P$ τα επόμενα 5. Να υπολογιστεί το P ως συνάρτηση γνωστών αναλογιστικών συναρτήσεων, όχι αναβαλλόμενων.

Λύση

Έστω $K = K_{35} = [T_{35}]$. Η συνάρτηση απώλειας για τον ασφαλιστή είναι

$$L = 10^4 v^{K+1}\mathbf{1}_{[K\leqslant 4]} + 2*10^4 v^{K+1}\mathbf{1}_{[5\leqslant K\leqslant 9]} + 5*10^3 v^5 \mathbf{1}_{[T\geqslant 5]} + 10^4 v^{10}\mathbf{1}_{[T>10]}$$
$$- P\ddot{a}_{35:\overline{(K+1)\wedge 5}|} - 2P\mathbf{1}_{[T>5]} v^5 \ddot{a}_{40:\overline{(K-5+1)\wedge 5}|}.$$

Η αρχή της ισοδυναμίας δίνει:

$$0 = \mathbf{E}(L) = 10^4 A^{1}_{35:\overline{5}|} + 2*10^4 {}_{5|}A^{1}_{35:\overline{5}|} + 5*10^3 {}_5E_{35} + 10^4 {}_{10}E_{35} - P\ddot{a}_{35:\overline{5}|} - 2\cdot P {}_{5|}\ddot{a}_{35:\overline{5}|}$$
$$= 10^4 A^{1}_{35:\overline{5}|} + 2*10^4 {}_{5|}A^{1}_{35:\overline{5}|} + 5*10^3 {}_5E_{35} + 10^4 {}_{10}E_{35} - P(\ddot{a}_{35:\overline{5}|} - 2\cdot {}_{5|}\ddot{a}_{35:\overline{5}|})$$

Μένει να δώσουμε αποδεκτές εκφράσεις για τις ποσότητες ${}_{5|}A^{1}_{35:\overline{5}|}, {}_{5|}\ddot{a}_{35:\overline{5}|}$. Αυτές είναι ως εξής

$${}_{5|}A^{1}_{35:\overline{5}|} = {}_5E_{35}A^{1}_{40:\overline{5}|},$$
$${}_{5|}\ddot{a}_{35:\overline{5}|} = {}_5E_{35}\ddot{a}_{40:\overline{5}|}.$$

Η απόδειξή τους αφήνεται ως άσκηση. ■

Άσκηση. (Εξέταση Ιανουαρίου 2019) Ο (x) αγοράζει ασφάλεια ζωής που δίνει ποσό R τον χρόνο $n \wedge T_x$. Για την αγορά της, καταβάλλει ποσό P στην αρχή κάθε έτους από τα επόμενα n αν τότε είναι ζωντανός.

(α) Να βρεθεί το L.
(β) Αν η τιμολόγηση γίνεται με βάση την αρχή της ισοδυναμίας, να βρεθεί το P συναρτήσει συνηθισμένων αναλογιστικών συναρτήσεων.

Λύση

(α) $L = v^{n\wedge T_x}R - P\ddot{a}_{\overline{n\wedge(K_x+1)}|}$.

(β) $0 = \mathbf{E}(L) = R\,\mathbf{E}(v^{n\wedge T_x}) - P\,\mathbf{E}(\ddot{a}_{\overline{n\wedge(K_x+1)}|}) = R\bar{A}_{x:\overline{n}|} - P\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 0 \Rightarrow P = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}R.$ ■

Άσκηση. (Παράδειγμα 6.3.5 στο [1]) Να δειχθεί ότι $P_{x:\overline{n}|} = {}_nP_x + P_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}(1 - A_{x+n})$.

Τα σύμβολα σημαίνουν τα εξής.

$P_{x:\overline{n}|}$: δόση για την εξόφληση σε n έτη μεικτής ασφάλειας n ετών.
${}_nP_x$: δόση για την εξόφληση σε n έτη ισόβιας διακριτής ασφάλισης.
$P_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}$: δόση για την εξόφληση σε n έτη μεικτής διακριτής ασφάλισης n ετών (πληρώνει 1 τη στιγμή $(K_x + 1) \wedge n$).

Οι δόσεις πληρώνονται στην αρχή κάθε χρονιάς από το ασφαλισμένο άτομο εφόσον ζει.

Λύση

Τα μεγέθη των δόσεων δίνονται από τις εξής σχέσεις (αποδεικνύονται όπως σε προηγούμενες ασκήσεις)

$${}_nP_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}, \qquad P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}, \qquad P_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} = \frac{A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}.$$

Έτσι η ζητούμενη ισοδυναμεί με την

$$A_{x:\overline{n}|} = A_x + A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}(1 - A_{x+n}).$$

Από γνωστή άσκηση έχουμε $A_x = A^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}A_{x+n}$, οπότε το δεξί μέλος της πιο πάνω σχέσης, μετά τις απαλοιφές, ισούται με $A^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} = A_{x:\overline{n}|}$, που ισχύει. ■

Άσκηση. (6.11 στο [1]) Να δειχθεί ότι

$$ {}_{20}P^{\,1}_{x:\overline{30}|} - P^{\,1}_{x:\overline{20}|} = {}_{20}P({}_{20|10}A_x). $$

Λύση

Τρόπος 1. Εκφράζοντας τις ποσότητες στο ερώτημα ως συναρτήσεις τιμών ασφαλειών και ραντών ζωής (όπως έχουμε δει σε προηγούμενες ασκήσεις) γράφουμε τη ζητούμενη ως

$$ \frac{A^{\,1}_{x:\overline{30}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{20}|}} - \frac{A^{\,1}_{x:\overline{20}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{20}|}} = \frac{{}_{20|10}A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{20}|}}, $$

που ισοδυναμεί με την

$$ A^{\,1}_{x:\overline{30}|} - A^{\,1}_{x:\overline{20}|} = {}_{20|10}A_x. $$

Αυτή προκύπτει αν πάρουμε μέση τιμή στην ισότητα

$$ \upsilon^{K_x+1}\mathbf{1}_{T_x\leqslant 30} - \upsilon^{K_x+1}\mathbf{1}_{T_x\leqslant 20} = \upsilon^{K_x+1}\mathbf{1}_{20<T_x\leqslant 30}. $$

Τρόπος 2. Γράφουμε τη ζητούμενη ως

$$ {}_{20}P^{\,1}_{x:\overline{30}|} = P^{\,1}_{x:\overline{20}|} + {}_{20}P({}_{20|10}A_x). $$

Ας ονομάσουμε Σ_1 το συμβόλαιο με δόση $P^{\,1}_{x:\overline{20}|}$ και Σ_2 το συμβόλαιο με δόση ${}_{20}P({}_{20|10}A_x)$ (με τους ανάλογους όρους πληρωμής και ασφαλίσεις το καθένα). Ένα άτομο που κατέχει και τα δύο συμβόλαια Σ_1, Σ_2 πληρώνει δόση $\Delta := P^{\,1}_{x:\overline{20}|} + {}_{20}P({}_{20|10}A_x)$ στην αρχή καθενός από τα επόμενα 20 χρόνια αν τότε είναι ζωντανό (δηλαδή τις στιγμές $0, 1, \ldots, 19 \wedge K_x$) . Το πρώτο συμβόλαιο του δίνει ποσό 1 μόνο αν $T_x \leqslant 20$, ενώ το δεύτερο του δίνει ποσό 1 μόνο αν $20 < T_x \leqslant 30$. Δηλαδή το άτομο παίρνει 1 μόνο αν $T_x \leqslant 30$. Επομένως η δόση Δ πρέπει να ισούται με ${}_{20}P^{\,1}_{x:\overline{30}|}$. ■

Άσκηση. (6.12 στο [1]) Έστω ότι το ετήσιο επιτόκιο είναι $i = 0.06$ και για τον (x) γνωρίσουμε ότι ${}_{k|}q_x = (1-r)r^k$ για $k = 0, 1, \ldots$ όπου $r \in (0,1)$ δεδομένο. Να υπολογιστούν οι ποσότητες

$$ A_x, \ddot{a}_x, P_x, \frac{{}^2A_x - A_x^2}{(d\ddot{a}_x)^2} $$

ως συναρτήσεις των i, r.

Λύση

Μας δίνεται η ποσότητα $\mathbf{P}(K_x = j) = {}_{j|}q_x = (1-r)r^j$.

$$ A_x = \mathbf{E}(\upsilon^{K_x+1}) = \sum_{j=0}^{\infty} \upsilon^{j+1}(1-r)r^j = (1-r)\upsilon\frac{1}{1-\upsilon r}. $$

Το $\ddot{a}_x$ μπορεί να υπολογιστεί από τον δικό του τύπο [τον (3.2)] ή από τον

$$ \ddot{a}_x = \frac{1-A_x}{d} = \ldots = \frac{1}{1-r\upsilon}. $$

Χρησιμοποιήσαμε την $d = 1-\upsilon$. Επίσης, το υ είναι γνωστό αφού $\upsilon = 1/(1+i)$. Επειδή

$$ {}^2A_x = \mathbf{E}\{(\upsilon^2)^{K_x+1}\} = \frac{(1-r)\upsilon^2}{1-\upsilon^2 r}, $$

βρίσκουμε μετά από πράξεις ότι

$$ \frac{{}^2A_x - A_x^2}{(d\ddot{a}_x)^2} = \frac{\upsilon^2 r(1-r)(1-\upsilon r)}{1-r\upsilon^2}. $$

Για τον εναλλακτικό τρόπου υπολογισμού του $\ddot{a}_x$ χρειάζεται κανείς τις ποσότητες ${}_k p_x$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αυτές υπολογίζονται ως εξής

$$ {}_k p_x = \mathbf{P}(K_x \geqslant k) = \sum_{j=k}^{\infty} \mathbf{P}(K_x = j) = \ldots = r^k. $$

■

Κεφάλαιο 5

Αποθέματα

5.1 Ορισμός και παραδείγματα

Για μια δεδομένη ασφάλεια ζωής ενός ατόμου (x), εξετάζουμε τη θέση του ασφαλιστή για καθε μία μελλοντική στιγμή. Δηλαδή για κάθε στιγμή $t \geqslant 0$ μετά τη σύναψη του συμβολαίου, ορίζουμε

$$\begin{aligned} {}_tL = &\text{παρούσα αξία τον χρόνο } t \text{ των μελλοντικών παροχών} \\ &- \text{παρούσα αξία τον χρόνο } t \text{ των μελλοντικών ασφαλίστρων} \end{aligned} \tag{5.1}$$

Θα μελετήσουμε αυτή την ποσότητα κάτω από τη συνθήκη $T_x > t$, δηλαδή όταν ο ασφαλισμένος είναι ακόμα ζωντανός. Θα σχολιάσουμε αργότερα το σενάριο $T_x < t$. Ορίζουμε λοιπόν το απόθεμα τη χρονική στιγμή t ως

$${}_tV = \mathbf{E}({}_tL \mid T_x > t).$$

Παρατηρήσεις 1) Στο ${}_tL$ κανείς στέκεται λίγο πριν από τον χρόνο t, και υπολογίζει παροχές και υποχρεώσεις που καταβάλλονται στο διάστημα $[t, \infty)$. Δηλαδή μετράμε και γεγονότα που συμβαίνουν ακριβώς τη στιγμή t.

2) Το ${}_tV$ είναι το ποσό που πρέπει να έχει διαθέσιμο ο ασφαλιστής τον χρόνο t ώστε προσθέτοντάς το στα ασφάλιστρα που πρόκειται να εισπράξει να μπορεί να εκπληρώσει τις υποχρεώσεις του στον ασφαλισμένο. Και είναι ένα ποσό το οποίο προσβλέπει ο ασφαλισμένος να αποκτήσει.

3) Ο τρόπος προσδιορισμού των ασφαλίστρων επιβάλλει να ισχύει ${}_0V = 0$, όμως για $t > 0$ αυτό διαταράσσεται και έχουμε ${}_tV > 0$. Γιατί ο αριθμός των μελλοντικών ασφαλίστρων έχει μειωθεί (κάποια έχουν καταβληθεί ήδη) ενώ η αξία της παροχής συνήθως μεταβάλλεται λίγο. Το ${}_tV > 0$ είναι επιθυμητό ώστε ο ασφαλισμένος να έχει κίνητρο να παραμείνει στο συμβόλαιο (επειδή προσβλέπει σε θετικό μέσο όφελος από τον χρόνο t και μετά).

4) Ο υπολογισμός του ${}_tV$ γίνεται από τον ασφαλιστή τη χρονική στιγμή 0 ώστε να γνωρίζει πόσο είναι εκτεθειμένος σε απώλειες σε κάθε μελλοντική στιγμή t.

Οι παρατηρήσεις αυτές θα γίνουν περισσότερο κατανοητές στο Παράδειγμα 5 πιο κάτω.

Για τα αποθέματα των συνηθισμένων ασφαλίσεων που έχουμε συναντήσει ως τώρα, θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο ${}_kV$ τροποποιημένο με δείκτες τριγύρω από το V αυτούς που έχει η ασφάλιση. Π.χ., για την ασφάλιση επιβίωσης, το σύμβολο θα είναι ${}_kV_{\substack{1\\ x:\overline{n}|}}$.

Παράδειγμα 1. (Ισόβια διακριτή ασφάλιση που πληρώνεται μέσω διακριτής ράντας ζωής.) Ο (x) αγοράζει ισόβια ασφάλιση με παροχή 1 στο τέλος του έτους θανάτου. Την αγοράζει μέσω μιας ισόβιας προκαταβλητέας ράντας ζωής της οποίας κάθε δόση ισούται με $P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$ (το ότι κάθε δόση πρέπει να είναι τόσο το έχουμε δει στο προηγούμενο κεφάλαιο). Αν $k \in \mathbb{N}$ και $T_x > k$, έχουμε

$${}_kL = v^{K_x - k + 1} - P_x \, \ddot{a}_{\overline{K_x - k + 1}|}.$$

Παρατηρούμε ότι $K_x - k$ είναι μια τυχαία μεταβλητή με κατανομή $[X - x] - k | X > x$ (δηλαδή υπό τη δέσμευση $X > x$). Άν δευσμεύσουμε στο ενδεχόμενο $T_x > k$, είναι το ίδιο με το να δεσμεύουμε στο ενδεχόμενο $\{X > x\} \cap \{X - x > k\}$ το οποίο είναι το ίδιο με το $\{X > x + k\}$. Άρα θα έχει την ίδια κατανομή με την $[X - x] - k$ υπο τη δέσμευση $X > x + k$ (και βέβαια $[X - x] - k = [X - x - k]$ αφού το k είναι ακέραιος). Αυτή είναι η κατανομή της K_{x+k}. Άρα

$$ {}_kV_x = \mathbf{E}(\upsilon^{K_x-k+1} - P_x\, \ddot{a}_{\overline{K_x-k+1}|} | T_x > k) = \mathbf{E}(\upsilon^{K_{x+k}+1}) - P_x\, \mathbf{E}(\ddot{a}_{\overline{K_{x+k}+1}|}) = A_{x+k} - P_x\, \ddot{a}_{x+k}. $$

Παράδειγμα 2. (Διακριτή πρόσκαιρη ασφάλιση που πληρώνεται μέσω διακριτής ράντας ζωής.) Ο (x) αγοράζει πρόσκαιρη ασφάλιση διάρκειας n ετών με παροχή 1 στο τέλος του έτους θανάτου. Πληρώνει με ράντα ζωής προκαταβλητέα n ετών με κάθε δόση να ισούται με $P_{\stackrel{1}{x}:\overline{n}|} = \frac{A_{\stackrel{1}{x}:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$. Όμοια όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, μπορούμε να δείξουμε ότι για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n$ ισχύει

$$ {}_kV_{\stackrel{1}{x}:\overline{n}|} = A_{\stackrel{1}{x+k}:\overline{n-k}|} - P_{\stackrel{1}{x}:\overline{n}|}\, \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}. $$

Παράδειγμα 3. (Διακριτή ασφάλιση επιβίωσης που πληρώνεται μέσω διακριτής ράντας ζωής.) Ο (x) αγοράζει ασφάλεια επιβίωσης n ετών με παροχή 1 στο τέλος του έτους θανάτου. Πληρώνει με ράντα ζωής n ετών κάθε δόση της οποίας ισούται με $P = \frac{A_{x:\stackrel{1}{\overline{n}|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$. Όπως στα πιο πάνω παραδείγματα, δείχνουμε ότι για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n$ ισχύει

$$ {}_kV_{x:\stackrel{1}{\overline{n}|}} = A_{x+k:\stackrel{1}{\overline{n-k}|}} - P_{x:\stackrel{1}{n}}\, \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}. $$

Παράδειγμα 4. Θεωρούμε την ασφάλιση που δίνει ποσό 1 τη στιγμή του θανάτου αν αυτή συμβεί στο διάστημα $[0, n]$ από τώρα ($n > 0$ όχι ακέραιος απαραίτητα). Η αποπληρωμή γίνεται με συνεχή ράντα ζωής που έχει ρυθμό $\bar{P} := \bar{P}_{\stackrel{1}{x}:\overline{n}|} := \bar{A}_{\stackrel{1}{x}:\overline{n}|}/\bar{a}_{x:\overline{n}|}$. Για $t \in [0, n]$, αν $T_x > t$, έχουμε

$$ {}_tL = \upsilon^{T_x-t}\mathbf{1}_{T_x<n} - \bar{P}\, \bar{a}_{\overline{(T_x\wedge n)-t}|}. $$

Η κατανομή της $T_x - t$ δεδομένου ότι $T_x > t$ είναι η ίδια με την κατανομή της $(X - x) - t$ δεδομένου ότι $X > x + t$, που είναι η κατανομή της T_{x+t}. Άρα για κάθε $t \in [0, n]$ έχουμε

$$ {}_t\bar{V}_x = \mathbf{E}(\upsilon^{T_x-t}\mathbf{1}_{T_x<n} - \bar{P}\, \bar{a}_{\overline{T_x\wedge n-t}|} | T_x > t) = \mathbf{E}(\upsilon^{T_{x+t}}\mathbf{1}_{T_{x+t}<n-t}) - \bar{P}\, \mathbf{E}(\bar{a}_{\overline{T_{x+t}\wedge(n-t)}|}) \tag{5.2} $$

$$ = \bar{A}_{\stackrel{1}{x+t}:\overline{n-t}|} - \bar{P}\, \bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}. \tag{5.3} $$

Παράδειγμα 5. Θα μελετήσουμε με συγκεκριμένους αριθμούς το απόθεμα των ασφαλίσεων των παραδειγμάτων 1-3 πιο πάνω. Αφορούν ένα άτομο ηλικίας 50 ετών, καθεμία έχει παροχή $C = 10000$, και είναι οι εξής:

Α: Ισόβια διακριτή.

Β: Πρόσκαιρη διάρκειας 15 ετών.

Γ: Επιβίωσης διάρκειας 15 ετών.

Και για τις τρεις η αγορά γίνεται με διακριτή προκαταβλητέα ράντα ζωής. Το άτομο πληρώνει ένα σταθερό ποσό στην αρχή κάθε χρονιάς που είναι ζωντανό και δεν έχει λήξει ακόμα το συμβόλαιο (δηλαδή για τα Β, Γ, πληρωμές γίνονται καθέναν από τους χρόνους 0, 1, ..., 14 από τώρα κατά τον οποίο το άτομο ζει).

Υποθέτουμε ότι ότι το ετήσιο επιτόκιο είναι $i = 0.05$ και ότι ο (50) έχει ένταση θνησιμότητας $\mu_x = A + Bc^x$ (δηλαδή Makeham) με παραμέτρους $A = 0.00022, B = 2.7 \times 10^{-6}, c = 1.124$. Έτσι,

$$ \upsilon = \frac{1}{1.05}, \text{ και } s(x) = e^{-Ax-(c^x-1)(B/\log c)} $$

για κάθε $x > 0$

Με αυτά τα δεδομένα, και χρησιμοποιώντας τους τύπους από τα παραδείγματα 1-3, βρίσκουμε ότι τα ασφάλιστρα για καθεμία από τις Α, Β, Γ είναι αντίστοιχα

$$P_A := C \times P_{50} = 111.19, \qquad P_B := C \times P^{\ 1}_{50:\overline{15}|} = 23.74, \qquad P_\Gamma := P_{50:\overline{15}|}^{\quad\ 1} = 428.47$$

Ο πολλαπλασιασμός με το C γιατί η παροχή είναι C αντί 1. Όμοια και οι συναρτήσεις για το απόθεμα των τριών ασφαλίσεων προκύπτουν πολλαπλασιάζοντας με C τις τιμές ${}_kV_{50}$,${}_kV^{\ 1}_{40:\overline{15}|}$,${}_kV_{50:\overline{15}|}^{\quad\ 1}$ των παραδειγμάτων 1-3. Για τον προσδιορισμό αυτών των τιμών, υπολογίζουμε τις ποσότητες

$$\ddot{a}_{50+k}, \ddot{a}_{50+k:\overline{15-k}|}, A_{50+k}, A^{\ 1}_{50+k:\overline{15-k}|}, A_{50+k:\overline{15-k}|}^{\qquad\ 1}$$

χρησιμοποιώντας τους γνωστούς τύπους από τα προηγούμενα κεφάλαια. Τα αποτελέσματα όλων αυτών των υπολογισμών περιέχονται στον εξής πίνακα.

Πίνακας 5.1: Οι συναρτήσεις του Παραδείγματος 5

k	$\ddot{a}_{50+k}$	$\ddot{a}_{50+k:\overline{15-k}\|}$	$C \times A_{50+k}$	$C \times A^{\ 1}_{50+k:\overline{15-k}\|}$	$C \times A_{50+k:\overline{15-k}\|}^{\qquad\ 1}$	${}_kV_{50}$	${}_kV^{\ 1}_{50:\overline{15}\|}$	${}_kV_{50:\overline{15}\|}^{\quad\ 1}$
0	17.02	10.77	1893.08	255.75	4615.15	0	0	0
1	16.84	10.27	1978.04	256.76	4851.77	104.79	12.86	450.44
2	16.66	9.74	2066.38	256.63	5101.15	213.76	25.15	924.09
3	16.46	9.19	2158.18	255.15	5364.08	327.00	36.71	1422.29
4	16.26	8.62	2253.51	252.08	5641.45	444.60	47.32	1946.46
5	16.05	8.01	2352.44	247.16	5934.19	566.63	56.75	2498.17
6	15.84	7.38	2455.03	240.07	6243.34	693.17	64.72	3079.12
7	15.62	6.71	2561.33	230.46	6570.04	824.29	70.92	3691.14
8	15.39	6.01	2671.37	217.92	6915.55	960.03	74.99	4336.26
9	15.15	5.28	2785.19	202.01	7281.25	1100.44	76.51	5016.69
10	14.90	4.51	2902.82	182.18	7668.69	1245.53	75.02	5734.91
11	14.64	3.70	3024.26	157.85	8079.58	1395.33	69.96	6493.62
12	14.38	2.84	3149.50	128.31	8515.85	1549.81	60.70	7295.86
13	14.11	1.94	3278.52	92.78	8979.65	1708.96	46.53	8145.04
14	13.83	1	3411.27	50.36	9473.45	1872.72	26.61	9044.97
15	13.54	0	3547.72	0	10000.00	2041.02	0	10000.00

Κάποια σχόλια σχετικά με τις τρεις τελευταίες στήλες του πίνακα.

- Η πρώτη από τις τρεις στήλες μπορεί να συνεχιστεί και για $k > 15$ αφού αφορά ισόβια ασφάλιση.
- Στην δεύτερη, έχουμε ${}_{15}V^{\ 1}_{50:\overline{15}|} = 0$ γιατί τη στιγμή που ο (50) έχει φτάσει στην ηλικία 65 το συμβόλαιο δεν προβλέπει κάποια παροχή στο μέλλον. Στην τρίτη στήλη έχουμε ${}_{15}V_{50:\overline{15}|}^{\quad\ 1} = 10000$ γιατί με βάση τη σύμβαση για το ${}_kV$, η παροχή των 10000, που δίνεται τη στιγμή 15 από την αρχή του συμβολαίου θεωρείται εκείνη τη στιγμή μελλοντική παροχή.
- Η πρώτη και η τρίτη στήλη είναι αύξουσες ως προς k. Αυτό γιατί και στις δύο ασφαλίσεις η παροχή θα δοθεί οπωσδήποτε. Καθώς περνάει ο χρόνος, η παρούσα αξία της παροχής μεγαλώνει ενώ τα μελλοντικά ασφάλιστρα λιγοστεύουν σε αριθμό, οπότε αυξάνει το ποσό που πρέπει να έχει διαθέσιμο ο ασφαλιστής ώστε να μπορέσει να ανταποκριθεί στην υποχρέωσή του.
- Η δεύτερη στήλη αρχικά αυξάνει αλλά μετά μειώνεται. Σε αυτή την ασφάλιση, καταβάλλεται παροχή μόνο αν ο (50) πεθάνει μέσα στα επόμενα 15 χρόνια. Καθώς περνάει ο χρόνος η πιθανότητα αυτού του ενδεχομένου μειώνεται και έτσι δεν χρειάζεται σημαντικό απόθεμα. Στην αρχή η στήλη αυξάνει γιατί μειώνεται το πλήθος των μελλοντικών δόσεων.

- Ας σχολιάσουμε την τιμή ${}_{14}V^{\,1}_{50:\overline{15}|} = 26.61$, το προτελευταίο στοιχείο της δεύτερης στήλης. Ο ασφαλιστής παίρνει αυτό το απόθεμα μαζί με το ασφάλιστρο P_B που πληρώνεται τη στιγμή 14 και τα καταθέτει στην τράπεζα. Τον χρόνο 15, η αξία τους έχει γίνει $(26.61 + 23.74) \times 1.05 = 52.86$. Η μέση τιμή της παροχής που πρέπει να καταβάλει τη στιγμή 15 είναι $10000 \times q_{64} = 10000 \times (1 - s(65)/s(64)) = 52.86$

  Η λειτουργία των προηγούμενων τιμών, π.χ. της ${}_{13}V^{\,1}_{50:\overline{15}|} = 46.53$, θα γίνει κατανοητή στην Παράγραφο 5.2 παρακάτω [σχέση (5.6)].

5.1.1 Το απόθεμα για μια ισόβια ασφάλιση

Για το απόθεμα της ισόβιας διακριτής ασφάλισης (Παράδειγμα 1 πιο πάνω) έχουμε τους εξής τύπους.

$$
\begin{aligned}
{}_kV_x &= 1 - (P_x + d)\ddot{a}_{x+k} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x} = \frac{A_{x+k} - A_x}{1 - A_x} && (5.4)\\
&= \left(1 - \frac{P_x}{P_{x+k}}\right) A_{x+k} = (P_{x+k} - P_x)\ddot{a}_{x+k} = \frac{P_{x+k} - P_x}{P_{x+k} + d}. && (5.5)
\end{aligned}
$$

Η απόδειξη τους αφήνεται ως άσκηση και γίνεται με χρήση των τύπων $A_x + d\ddot{a}_x = 1, P_x = A_x/\ddot{a}_x, P_x + d = 1/\ddot{a}_x$.

5.2 Η αναδρομική σχέση

Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε πώς σχετίζονται τα στοιχεία κάθε μιας από τις τρεις τελευταίες στήλες του πίνακα 5.1. Θεωρούμε μια διακριτή ασφάλιση που έχει τους εξής όρους

- Πληρώνει το ποσό c_{k+1} αν ο θάνατος του (x) συμβαίνει στο διάστημα $[k, k+1)$ από τώρα.

- Το ασφάλιστρο που αντιστοιχεί στο διάστημα $[k, k+1)$ είναι Π_k και πληρώνεται στην αρχή του διαστήματος.

- Το ετήσιο επιτόκιο είναι i, το ίδιο για όλες τις μελλοντικές περιόδους.

Όλα τα συμβόλαια που είδαμε πιο πάνω είναι αυτής της μορφής. Στο Παράδειγμα 2, έχουμε

$$
c_k = \begin{cases} 1 & \text{αν } k = 1, 2, \ldots, n, \\ 0 & \text{αν } k \geqslant n, \end{cases}
$$

ενώ το επιτόκιο και το ασφάλιστρο είναι τα ίδια σε κάθε διάστημα. Έστω $\upsilon_k := 1/(1 + i_k)$ ο συντελεστής προεξόφλησης στο διάστημα $[k, k+1)$.

Πρόταση: Για τη συνάρτηση αποθέματος ${}_kV$ ισχύει η εξής αναδρομική σχέση

$$
{}_kV + \Pi_k = \upsilon(c_{k+1} q_{x+k} + {}_{k+1}V p_{x+k}). \tag{5.6}
$$

για κάθε $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Απόδειξη

Θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση ${}_{r+1}p_{x+k} = p_{x+k}\, {}_rp_{x+k+1}$ (για την τέταρτη ισότητα)

$$
\begin{aligned}
{}_kV &= \sum_{j=0}^{\infty} \upsilon^{j+1} c_{k+j+1\,j}p_{x+k}q_{x+k+j} - \sum_{j=0}^{\infty} \Pi_{k+j}\,\upsilon^j{}_jp_{x+k}\\
&= \upsilon c_{k+1\,0}p_{x+k}q_{x+k} - \Pi_k\,{}_0p_{x+k} + \sum_{j=1}^{\infty} \upsilon^{j+1} c_{k+j+1\,j}p_{x+k}\,q_{x+k+j} - \sum_{j=1}^{\infty} \Pi_{k+j}\,\upsilon^j{}_jp_{x+k}\\
&\overset{r=j-1}{=} \upsilon c_{k+1}\,q_{x+k} - \Pi_k + \upsilon\sum_{r=0}^{\infty} \upsilon^{r+1} c_{k+1+r+1\;r+1}p_{x+k}\,q_{x+k+1+r} - \upsilon\sum_{r=0}^{\infty} \Pi_{k+r+1}\,\upsilon^r{}_{r+1}p_{x+k}\\
&= \upsilon c_{k+1}\,q_{x+k} - \Pi_k + \upsilon p_{x+k}\sum_{r=0}^{\infty} \upsilon^{r+1} c_{k+1+r+1\;r}p_{x+k+1}\,q_{x+k+1+r} - \upsilon p_{x+k}\sum_{r=0}^{\infty} \Pi_{k+1+r}\,\upsilon^r{}_rp_{x+k+1}\\
&= \upsilon c_{k+1}\,q_{x+k} - \Pi_k + \upsilon p_{x+k}\,{}_{k+1}V.
\end{aligned}
$$

■

Η οικονομική ερμηνεία της αναδρομικής σχέσης είναι η εξής. Την χρονική στιγμή $k+1$ ο ασφαλιστής πρέπει ή να αποταμιεύσει ποσό ${}_{k+1}V$ (αν ο (x) ζει εκείνη τη στιγμή) ή να δώσει ποσό αποζημίωσης c_{k+1} στους κληρονόμους του (x) αν αυτός έχει πεθάνει στο διάστημα $[k, k+1)$. Η σχέση αναδρομής λέει ότι αναλογιστική παρούσα αξία τη στιγμή k των υποχρεώσεών του ασφαλιστή τη στιγμή $k+1$ είναι ακριβώς το άθροισμα του αποθέματος τη στιγμή k και του ασφαλίστρου που καταβάλλεται εκείνη τη στιγμή.

Διάσπαση του ασφαλίστρου

Λύνοντας την (5.6) ως προς Π_k και αντικαθιστώντας $p_{x+k} = 1 - q_{x+k}$, βρίσκουμε

$$\Pi_k = \upsilon\{c_{k+1}q_{x+k} + {}_{k+1}V(1-q_{x+k})\} - {}_kV = {}_{k+1}V\upsilon - {}_kV + (c_{k+1} - {}_{k+1}V)\upsilon q_{x+k}.$$

Έτσι οι ποσότητες

$$\Pi_k^s := {}_{k+1}V\upsilon - {}_kV, \tag{5.7}$$

$$\Pi_k^r := (c_{k+1} - {}_{k+1}V)\upsilon q_{x+k}, \tag{5.8}$$

αποτελούν διάσπαση του ασφαλίστρου ($\Pi_k = \Pi_k^s + \Pi_k^r$). Το λέγεται Π_k^s λέγεται ασφάλιστρο αποταμίευσης ενώ το Π_k^r λέγεται ασφάλιστρο κινδύνου. Ο ρόλος του Π_k^s είναι μαζί με το απόθεμα ${}_kV$ να δημιουργήσει το απόθεμα ${}_{k+1}V$ τον χρόνο $k+1$. Αυτό γίνεται γιατί τοκίζοντας για ένα χρόνο το ποσό ${}_kV + \Pi_k^s$ παίρνουμε το ποσό $({}_kV + \Pi_k^s)(1+i) = {}_{k+1}V\upsilon(1+i) = {}_{k+1}V$. Ο ρόλος του Π_k^r είναι να αποτελέσει συμπλήρωμα στο απόθεμα ${}_{k+1}V$ και τα δυο μαζί να εκπληρώσουν την υποχρέωση του ασφαλιστή αν ο θάνατος συμβεί στο διάστημα $[k, k+1)$.

5.3 Ασκήσεις

Άσκηση. ([3]) Αν ${}_{10}V_{25} = 0.1$ και ${}_{10}V_{35} = 0.2$, να υπολογιστεί το ${}_{20}V_{25}$.

Λύση

Έχουμε

$$0.1 = 1 - \frac{\ddot{a}_{35}}{\ddot{a}_{25}}, \qquad 0.2 = 1 - \frac{\ddot{a}_{45}}{\ddot{a}_{35}}.$$

Άρα

$${}_{20}V_{25} = 1 - \frac{\ddot{a}_{45}}{\ddot{a}_{25}} = 1 - \frac{\ddot{a}_{45}}{\ddot{a}_{35}}\frac{\ddot{a}_{35}}{\ddot{a}_{25}} = 1 - 0.8 \cdot 0.9 = 0.28$$

■

Άσκηση. ([3]) Αν $i = 0.06$, $q_x = 0.65$, $q_{x+1} = 0.85$, $q_{x+2} = 1$, να υπολογιστεί το ${}_1V_x$.

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο ${}_1V_x = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+1}}{\ddot{a}_x}$. Εφόσον $q_{x+2} = 1$, έχουμε $\ddot{a}_{x+2} = 1$. Έπειτα, από τη σχέση

$$\ddot{a}_y = 1 + \upsilon p_y \, \ddot{a}_{y+1}$$

βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{x+1} &= 1 + \upsilon p_{x+1} = 1 + 0.15\upsilon = 1.1415, \\ \ddot{a}_x &= 1 + \upsilon p_x \ddot{a}_{x+1} = 1 + \upsilon\, 0.35(1 + \upsilon\, 0.15) = 1.3769, \end{aligned}$$

και έτσι ${}_1V_x = 0.1709$. ■

Άσκηση. ([3]) Αν $P_x = 4/11$, $V_x = 0.5$, και $\ddot{a}_{x+t} = 1.1$, να υπολογιστεί το υ.

Λύση

Θα υπολογίσουμε το υ από τη σχέση $1 = A_x + d\ddot{a}_x$ (αφού $d = 1 - \upsilon$). Έχουμε

$$0.5 = V_x = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x} \Rightarrow \ddot{a}_x = 2\ddot{a}_{x+t} = 2.2$$

και $A_x = P_x \ddot{a}_x = (4/11) \cdot 2.2 = 4/5$. Έτσι $\upsilon = 10/11$. ■

Άσκηση. ([2]) Δίνονται οι εξής τιμές από έναν πίνακα θνησιμότητας ενός πληθυσμού

$$\ell_{41} = 99802, \quad \ell_{42} = 99686, \quad \ell_{43} = 99502, \quad \ell_{44} = 99283, \quad \ell_{45} = 99033.$$

Υποθέτουμε ότι το ετήσιο επιτόκιο είναι 6%. Ο (41) ανήκει στον πιο πάνω πληθυσμό και αγοράζει μια πρόσκαιρη ασφάλιση τριων ετών με παροχή $C = 200000$ στο τέλος του έτους θανάτου. Πληρώνει με προκαταβλητέα διακριτή ράντα ζωής τριών ετών.

(α) Να δειχθεί ότι το ετήσιο ασφάλιστρο είναι $P = 323.59$

(β) Υπολογίστε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της τυχαίας μεταβλητής ${}_1L$ [σχέση (5.1)] δεδομένου ότι $T_{41} > 1$.

(γ) Θεωρούμε μεικτή ασφάλιση τριών ετών (δηλαδή η παροχή δινεται στο τέλος του έτους θανάτου ή σε τρια χρόνια από τώρα, όποιο έρθει νωρίτερα) που έχει το ίδιο ετήσιο ασφάλιστρο όπως στο ερώτημα (α). Ποιο είναι το ποσό της παροχής αυτής της ασφάλισης;

(δ) Για την μεικτή ασφάλιση του (γ), υπολογίστε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της τυχαίας μεταβλητής ${}_1L$ δεδομένου ότι $T_{41} > 1$.

(ε) Σχολιάστε τις διαφορές στις τιμές των αντίστοιχων μεγεθών (ποσό παροχής, μέση τιμή και τυπική απόκλιση της ${}_1L|T_{41} > 1$) για τις ασφαλίσεις των ερωτημάτων (α) και (γ).

Λύση

Θέτουμε $x = 41$. Ο παράγοντας προεξόφλησης είναι $\upsilon = 1/1.06$.

(α) Το ασφάλιστρο ισούται με

$$P = C\frac{A_{\overset{1}{x}:\overline{3}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{3}|}}.$$

Υπολογίζουμε

$$A_{\overset{1}{x}:\overline{3}|} = \sum_{k=0}^{2} \upsilon^{k+1}{}_k p_x (1 - p_{x+k}).$$

Οι πιθανότητες στο άθροισμα υπολογίζονται κατά τα γνωστά ως ${}_kp_x = \ell(x+k)/\ell(x)$, $p_{x+k} = \ell(x+k+1)/\ell(x+k)$ και έτσι το άθροισμα ισούται με 0.00457816. Επίσης

$$\ddot{a}_{x:\overline{3}|} = \sum_{k=0}^{2} \upsilon^k {}_kp_x = ... = 2.82965$$

Έτσι προκύπτει ότι $P = 323.585$

(β) Κατά τα γνωστά (δες Παράδειγμα 2), η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητης $\Lambda := ({}_1L|T_x > 1)$ είναι

$$ {}_1V = CA_{\substack{1\\x+1:\overline{2}|}} - P\,\ddot{a}_{x+1:\overline{2}|}. $$

Όπως στο (α), υπολογίζουμε $A_{\substack{1\\x+1:\overline{2}|}} = 0.00372483, \ddot{a}_{x+1:\overline{2}|} = 1.9416$, και έτσι $\mathbf{E}(\Lambda) = 116.68$. Η Λ παίρνει τις τιμές

$$ \begin{cases} Cv - P & \text{αν } K_{x+1} = 0, \\ Cv^2 - (P + vP) & \text{αν } K_{x+1} = 1, \\ 0 - (P + vP) & \text{αν } K_{x+1} \geqslant 2, \end{cases} = \begin{cases} Cv - P & \text{με πιθανότητα } q_{x+1} \approx 0.001875, \\ Cv^2 - (P + vP) & \text{με πιθανότητα } p_{x+1}q_{x+2} \approx 0.002196, \\ 0 - (P + vP) & \text{με πιθανότητα } {}_2p_{x+1} \approx 0.995927. \end{cases} $$

Έτσι βρίσκουμε $\mathbf{E}(\Lambda^2) = \mathbf{E}({}_1L^2|T_x > 1) \approx 136057341.8$,

$$ \mathrm{Var}(\Lambda) = \mathbf{E}(\Lambda^2) - \{\mathbf{E}(\Lambda)\}^2 \approx 136043726.6 $$

και η τυπική απόκλιση είναι $\sigma(\Lambda) = \sqrt{\mathrm{Var}(\Lambda)} \approx 11663.8$

(γ) Αν C' είναι η παροχή της ασφάλισης, τότε κατά τα γνωστά (αρχή ισοδυναμίας) βρίσκουμε ότι το ασφάλιστρο πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση

$$ P = C'\frac{A_{x:\overline{3}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{3}|}} = C'\frac{A_{\substack{1\\x:\overline{3}|}} + v^3{}_3p_x}{\ddot{a}_{x:\overline{3}|}}. $$

Βρίσκουμε έτσι ότι $C' = 1090.26$

(δ) Σε αυτή την περίπτωση, η $\Lambda' = ({}_1L|T_x > 1)$ παίρνει τις τιμές

$$ \begin{cases} C'v - P & \text{αν } K_{x+1} = 0, \\ C'v^2 - (P + vP) & \text{αν } K_{x+1} \geqslant 1, \end{cases} = \begin{cases} C'v - P & \text{με πιθανότητα } q_{x+1} \approx 0.001875, \\ C'v^2 - (P + vP) & \text{με πιθανότητα } p_{x+1} \approx 0.998125. \end{cases} $$

Βρίσκουμε ότι $\mathbf{E}(\Lambda') = 342.155, \mathbf{E}(\Lambda'^2) = 117317.58, \mathrm{Var}(\Lambda') = 247.54, \sigma(\Lambda') = 15.73$

(ε) Στην πρόσκαιρη ασφάλιση το ασφάλιστρο έχει μια σχετικά χαμηλή τιμή γιατί η παροχή έχει πολύ μικρή πιθανοτητα να πληρωθεί γιαυτό και είναι πολύ μεγάλη. Στη μεικτή ασφάλιση αγοράζουμε με το ίδιο ασφάλιστρο μια παροχή που όμως θα πληρωθεί οπωσδήποτε (σε 1 ως 3 χρόνια από σήμερα) και έτσι αναγκαστικά θα είναι κατά πολύ μικρότερη.

Σχετικά με τις μέσες τιμές $\mathbf{E}(\Lambda), \mathbf{E}(\Lambda')$, εφαρμόζουμε την (5.6) για τα δύο συμβόλαια και για $k = 0$.

$$ P = v\,Cq_x + v\,\mathbf{E}(\Lambda)p_x, \tag{5.9} $$
$$ P = v\,C'q_x + v\,\mathbf{E}(\Lambda')p_x. \tag{5.10} $$

Το ίδιο ασφάλιστρο διασπάται σε δύο μέρη. Το πρώτο μέρος είναι η αναλογιστική παρούσα αξία της παροχής ενώ το δεύτερο είναι η αναλογιστική παρούσα αξία του αποθέματος. Επειδή στο πρώτο συμβόλαιο η αναλογιστική αξία της παροχής είναι κατά πολύ μεγαλύτερη από ότι στο δεύτερο (αφού $C >> C'$) το απόθεμα του πρώτου συμβολαίου βγαίνει αισθητά μικρότερο του δεύτερου (είναι περίπου το ένα τρίτο του). Δηλαδή περισσότερο μέρος του ασφαλίστρου χρησιμοποιείται για την ενδεχόμενη αποζημίωση παρά για αποταμίευση από ότι στο δεύτερο συμβόλαιο.

Αν και οι μέσες τιμές $\mathbf{E}(\Lambda), \mathbf{E}(\Lambda')$ είναι της ίδιας τάξης, δεν συμβαίνει το ίδιο και με τις τυπικές απολίσεις των Λ, Λ'. Η μαθηματική αιτία είναι ότι η Λ παίρνει δύο τεράστιες τιμές με πολύ μικρή πιθανότητα [τις τιμές $Cv - P, Cv^2 - (P + vP)$]. Στη μέση τιμή οι μεγάλες αυτές τιμές εξισορροπούνται από τις πιθανότητες, στην διασπορά όμως, αυτές οι τιμές υψώνονται στο τετράγωνο και οι πιθανότητες δεν μπορούν πλέον να τις φέρουν σε μικρές τιμές (οι πιθανότητες δεν υψώνονται στο τετράγωνο). Πρακτικά, οι τιμές της Λ έχουν πολύ μεγαλύτερη διασπορά, από τον σχετικά μικρό αριθμό $-(P + vP)$ στον τεράστιο $Cv - P$. Το πρώτο συμβόλαιο έχει μεγάλη αβεβαιότητα, ενώ το δεύτερο έχει πολύ μικρή αφού η παροχή θα πληρωθεί σίγουρα.

Παράρτημα Α′

Στοιχεία πιθανοτήτων

Α′.1 Πιθανότητες

Αν $A_1, A_2, \dots, A_n$ είναι ξένα ανα δύο ενδεχόμενα, τότε ισχύει

$$\mathbf{P}(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \mathbf{P}(A_1) + \cdots + \mathbf{P}(A_n).$$

Για A, B ενδεχόμενα με $B \subset A$, ισχύει

$$\mathbf{P}(A \backslash B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(B).$$

Για A, B ενδεχόμενα με $\mathbf{P}(B) > 0$, η **δεσμευμένη πιθανότητα**, $\mathbf{P}(A|B)$, του A δεδομένου ότι πραγματοποιήθηκε το B ορίζεται ως

$$\mathbf{P}(A|B) := \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Έτσι, συχνά γράφουμε την πιθανότητα της τομής δύο γεγονότων A, B ως $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A|B)$ με την προϋπόθεση ότι $\mathbf{P}(B) > 0$.

Δέσμευση δεσμευμένης πιθανότητας. Υπενθυμίζουμε ότι T_x είναι η δεσμευμένη τυχαία μεταβλητή $X - x | X > x$. Θέλουμε τώρα να δείξουμε ότι δεσμεύοντας αυτήν στο γεγονός $T_x > t$ παίρνουμε την $T_{x+t} + t$. Με σύμβολα

$$(T_x | T_x > t) = T_{x+t} + t. \tag{Α′.1}$$

Δηλαδή ο χρόνος ζωής μετά την ηλικία x με δεδομένο ότι είναι τουλάχιστον t ισούται με τον εγγυημένο χρόνο ζωής t συν τον επιπλέον χρόνο μετά την ηλικία $x + t$. Ασχολούμαστε με το γενικότερο ερώτημα πώς δεσμεύουμε μια ήδη δεσμευμένη πιθανότητα.

Έστω B, Γ ενδεχόμενα με $\mathbf{P}(B \cap \Gamma) > 0$. Αν δεσμεύσουμε στο γεγονός ότι το B συνέβη, τότε παίρνουμε μια νέα συνάρτηση πιθανότητας, την $\mathbf{P}_B$, που δίνει την τιμή $\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A|B)$ σε κάθε ενδεχόμενο A. Πώς δεσμεύουμε την $\mathbf{P}_B$ στο γεγονός ότι συμβαίνει το Γ; Φαίνεται διαισθητικά προφανές ότι είναι σαν να δεσμεύουμε την $\mathbf{P}$ στο ότι συνέβη η τομή $B \cap \Gamma$. Πράγματι, για οποιοδήποτε ενδεχόμενο A έχουμε

$$(\mathbf{P}_B)_\Gamma(A) = \mathbf{P}_B(A|\Gamma) = \frac{\mathbf{P}_B(A \cap \Gamma)}{\mathbf{P}_B(\Gamma)} = \frac{\mathbf{P}(A \cap \Gamma \cap B)/\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(B \cap \Gamma)/\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(A \cap \Gamma \cap B)}{\mathbf{P}(B \cap \Gamma)} = \mathbf{P}_{B \cap \Gamma}(A).$$

Τώρα θα δείξουμε την (Α′.1). Η δέσμευση $T_x > t$ ζητάει $X - x > t$, δηλαδή $X > x + t$. Άρα η $T_x | T_x > t$ είναι η ποσότητα $X - x$ με τη δέσμευση $\{X > x\} \cap \{X > x + t\} (= \{X > x + t\}$, η τομή ισούται με το μικρότερο σύνολο), δηλαδή η ποσότητα $t + (X - x - t)$ με τη δέσμευση $X > x + t$, που είναι η $t + T_{x+t}$.

Α΄.2 Τυχαίες μεταβλητές

Συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής X λέμε τη συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ με

$$F(x) := \mathbf{P}(X \leqslant x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ισχύει

$$\mathbf{P}(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a) = s(a) - s(b).$$

για κάθε $a < b$.

Διακριτή λέμε κάθε τυχαία μεταβλητή X για την οποία οι τιμές που είναι δυνατόν να πάρει αποτελούν αριθμήσιμο σύνολο, για παράδειγμα, το σύνολο των ακεραίων ή των φυσικών αριθμών. Μια διακριτή τυχαία μεταβλητή κωδικοποιείται από τη **συνάρτηση πιθανότητάς** της. Αυτή είναι η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(a) = \mathbf{P}(X = a)$$

για κάθε $a \in \mathbb{R}$. Η f είναι θετική μόνο για τα a που είναι δυνατές τιμές της X, για τα υπόλοιπα ισούται με 0.

Συνεχή λέμε κάθε τυχαία μεταβλητή X για την οποία υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ με $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ ώστε

$$\mathbf{P}(X \in A) = \int_A f(x)\,dx$$

για κάθε $A \subset \mathbb{R}$. Η f λέγεται **πυκνότητα** της X. Εδώ η f **δεν** έχει την ερμηνεία $\mathbf{P}(X = a) = f(a)$. Μάλιστα ισχύει $\mathbf{P}(X = a) = 0$ για κάθε a.

Για μια τυχαία συνεχή μεταβλητή X, η συνάρτηση κατανομής της, F, είναι συνεχής. Για τις συνεχείς τυχαίες μεταβλητές που θα μας απασχολήσουν, η F είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο σε όλο το $\mathbb{R}$ εκτός από ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων. Και τότε η πυκνότητα υπολογίζεται ως

$$f(x) = F'(x)$$

στα σημεία παραγωγισιμότητας ενώ στα υπόλοιπα την ορίζουμε όπως μας βολεύει (π.χ., $= 0$). Επίσης, εφόσον για όλα τα a έχουμε $\mathbf{P}(X = a) = 0$, η ποσότητα $\mathbf{P}(a < X \leqslant b)$ παραμένει η ίδια αν αντικαταστήσουμε το $<$ με $\leqslant$ και το $\leqslant$ με $<$. Και προφανώς

$$\mathbf{P}(a < X < b) = \int_a^b f(t)\,dt$$

για κάθε $a < b$.

Α΄.3 Μέση τιμή

Στον επόμενο πίνακα, η γραμμή 2 είναι ο ορισμός της μέσης τιμής. Οι υπόλοιπες γραμμές είναι ιδιότητες.

	X Διακριτή	X Συνεχής	
			(Α΄.2)
$\mathbf{P}(X \in A)$	$\sum_{x \in A} f(x)$	$\int_A f(x)\,dx$	(Α΄.3)
$\mathbf{E}(X)$	$\sum_{x \in \mathbb{R}} x f(x)$	$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$	(Α΄.4)
$\mathbf{E}(X)$	$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(X \geqslant k)$	$\int_0^{\infty} \mathbf{P}(X > x)\,dx$	(Α΄.5)
$\mathbf{E}\{h(X)\}$	$\sum_{x \in \mathbb{R}}^{\infty} h(x) f(x)$	$\int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x)\,dx$	(Α΄.6)

Στη γραμμή 3 υποθέτουμε για διακριτή X ότι παίρνει τιμές στο $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots, \}$ ενώ για συνεχή X ότι παίρνει τιμές στο $[0, \infty)$. Τέτοιες τιμές παίρνουν οι τυχαίες μεταβλητές K_x, T_x αντίστοιχα. Μάλιστα, ο δεύτερος τύπος ισχύει για κάθε τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $[0, \infty)$ και εύκολα συνεπάγεται τον πρώτο.

Στις γραμμές 1, 2, 4, για διακριτή τυχαία μεταβλητή, το άθροισμα είναι πάνω σε αριθμήσιμο σύνολο. Δηλαδή είναι πάνω στα x που είναι δυνατές τιμές της X.

Στις γραμμές 1, 2, 4 δεν έχουμε τον περιορισμό $X \geqslant 0$ στις τιμές που παίρνει η X.

Η τυχαία μεταβλητή X κωδικοποιείται από την f με τον τρόπο που λέει η πρώτη γραμμή του πίνακα. Αλλά η f έχει άλλη σημασία και άλλο όνομα στην περίπτωση διακριτής και άλλο στην περίπτωση συνεχούς τυχαίας μεταβλητής.

Ειδική περίπτωση διακριτής τυχαίας μεταβλητής: Αν A είναι ένα τυχαίο γεγονός και θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$X := \mathbf{1}_A := \begin{cases} 1 & \text{αν το } A \text{ αυμβαίνει,} \\ 0 & \text{αν το } A \text{ δεν αυμβαίνει,} \end{cases}$$

τότε η X είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή με δύο τιμές, τις 1 και 0. Τις παίρνει με πιθανότητες $\mathbf{P}(A), 1-\mathbf{P}(A)$ αντίστοιχα. Άρα η μέση της τιμή είναι $1 \times \mathbf{P}(A) + 0 \times (1 - \mathbf{P}(A)) = \mathbf{P}(A)$. Δηλαδή

$$\mathbf{E}(\mathbf{1}_A) = \mathbf{P}(A).$$

Μέση τιμή σειράς.

$$\mathbf{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} X_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}(X_k).$$

Ο ορισμός της διασποράς είναι

$$\mathrm{Var}(X) := \mathbf{E}\{(X - \mathbf{E}(X))^2\}.$$

Για $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ σταθερές και X τυχαία μεταβλητή, ισχύει

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \mathbf{E}(X^2) - \{\mathbf{E}(X)\}^2, \\ \mathrm{Var}(\lambda x) &= \lambda^2 \,\mathrm{Var}(x), \\ \mathrm{Var}(X + \mu) &= \mathrm{Var}(x). \end{aligned}$$

Οι δυό τελευταίες σχέσεις γράφονται μαζί ως $\mathrm{Var}(\lambda X + \mu) = \lambda^2 \,\mathrm{Var}(X)$.

Βιβλιογραφία

[1] Bower, N. L., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D. A., Nesbitt, C. J. *Actuarial Mathematics*, second edition, (1997).

[2] Dickson, D. C., Hardy, M. R., Waters, H. R. *Actuarial mathematics for life contingent risks*. Cambridge University Press, second edition, (2013).

[3] Gerber, H. U. *Life insurance mathematics.* Springer, third edition, (1997).

[4] Olivieri, A., Pitacco, E. *Introduction to insurance mathematics: technical and financial features of risk transfers.* Springer, second edition, (2015).

[5] Χατζόπουλος, Π. *Μαθηματικά ασφαλίσεων ζωής*. Εκδόσεις Συμμετρία, (2011).