$$0,7 = u(r_3) = \alpha u(r_4) + (1-\alpha)u(r_2) = 0,6\alpha + (1-\alpha),$$

που δίνει $\alpha = 0,75$. Αυτό όμως δεν συμφωνεί με το $\alpha = 0,6$ που εκτιμήσαμε συγκρίνοντας (την r_3) απευθείας με τις r_4 και r_2. Άρα έχουμε ασυνέπεια και πρέπει να επανεξετάσουμε τις προηγούμενες συγκρίσεις, μέχρις ότου καταλήξουμε σε συμβιβαστές τιμές της $u(r)$. Εν πάση περιπτώσει, ας υποθέσουμε ότι καταλήξαμε σε

$$u(r_4) = 0,6 \qquad u(r_3) = 0,8.$$

Μπορούμε τώρα, έχοντας την ωσ $u(r)$, να βρούμε την Bayes αναμενόμενη ωφελιμότητα της d_1 (κατά την a priori π):

$$E_\pi^{d_1}[u(r)] = \pi_1 u(r_1) + \pi_2 u(r_2) = 0,3(0) + 0,7(1) = 0,7$$

αφού η d_1 λαμβάνεται μόνο στις $r_1 = (d_1, \theta_1)$ και $r_2 = (d_1, \theta_2)$· ομοίως της d_2:

$$E_\pi^{d_2}[u(r)] = \pi_1 u(r_3) + \pi_2 u(r_4) = 0,3(0,8) + 0,7(0,6) = 0,66.$$

Έτσι η καλύτερη απόφαση (πράξη) (***που μεγιστοποιεί την αναμενόμενη ωφελιμότητα***) είναι να πάω στην Επίδαυρο.

Είναι προφανείς οι δυσκολίες όταν το σύνολο R των αμοιβών r είναι μεγάλο. Αν όμως το R είναι διάστημα, οπότε κατά κανόνα η $u(r)$ θα είναι ομαλή (διαφορίσιμη) καμπύλη, για την κατασκευή της επαρκεί η γνώση μερικών σημείων. Τέτοιο σημαντικό παράδειγμα είναι η περίπτωση χρηματικών αμοιβών, όπως στην περίπτωση ασφαλίστρων και ζημιών που εξετάσαμε στις προηγούμενες παραγράφους. Γενικά, στις περιπτώσεις αυτές ***οδηγούμεθα σε φραγμένες μη φθίνουσες*** $u(r)$ που επιπλέον είναι ***κοίλες*** (κινδυνοφοβικές).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Το ***παράδοξο του St. Petersburg***[1] . Στο παιγνίδι ρίψεων (συμμετρικού) νομίσματος με πιθανότητα κορώνας $p = \frac{1}{2}$, ο παίκτης παίρνει $X = 2^N$ δρχ. όταν φέρει κορώνα για πρώτη φορά τη N-οστή ρίψη, (όποτε και τερματίζεται το παιγνίδι), $N = 1,2,\ldots$. Να βρεθεί η μέση τιμή και η διασπορά της N και να δειχθεί ότι:

   α) $E(X) = E(2^N) = \infty$, και

   β) Αν η ωφελιμότητα $u(w) = \log w$, τότε

   $$E[u(X)] = 2\log 2.$$

[1] τέως Λένινγκραντ, πρώην Αγία Πετρούπολη και πάλιν Πετρούπολη. Για το παράδοξο του Petersburg, βλ. W. Feller: An Introduction to Probability Theory and its Applications, Τομ. I, Wiley, 1957

2. ***Κινδυνοφιλία.*** Αν $u'(w) > 0$ και $u''(w) > 0$ (η σω u κυρτή), κάνοντας χρήση της (3), δείξτε ότι ο ασφαλιζόμενος είναι "κινδυνόφιλος" (ριψοκίνδυνος), δηλ. το μέγιστο ασφάλιστρο G που πρέπει να καταβάλει δεν υπερβαίνει την $E(X) = \mu$,

$$G \le \mu$$

$E(u-G) = E[u(w-X)]$

3. Να δειχθεί ότι η $u(w) = \log w$ είναι κινδυνοφοβική

4. Δείξε ότι για $u(w) = k \log w$ και ζημιοκατανομή ομοιόμορφη στο $(0,1)$ το μέγιστο ασφάλιστρο G (βλ. (3)) είναι

$$G = w - \frac{w^w}{e(w-1)^{w-1}}$$

5. Αν η $u(w) = e^{-aw}$ και η ζημιοκατανομή είναι η χ^2_n με σππ

η σπη της X όπου X η ζημιά

$$f(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \qquad x > 0$$

τότε το μέγιστο ασφάλιστρο $G > n = \mu = E(X)$.

6. Επαναλάβετε το Παράδειγμα β) με

$$u(w) = -e^{-w/150}$$

και δείξτε ότι το $G = 150 \log 1{,}5 = 60{,}82$.

7. ***Αντασφάλιση.*** Μικροασφάλεια με κεφάλαιο 1(δισ.) και $u(w) = \log w$ ασφαλίζει δίτιμη ζημιά X με κατανομή

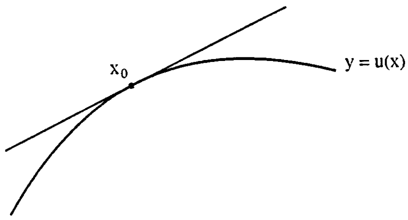
$$P[X=0] = P[X=0{,}51] = \frac{1}{2}.$$

α) Να δειχθεί ότι το μέγιστο ασφάλιστρο G που πρέπει να πληρώσει σε μια ***μεγαλοασφάλεια (για αντασφάλιση) για 100% κάλυψη*** της ζημιάς X, είναι $G = 0{,}3$.

β) Μια μεγαλοασφάλεια με $u(w) = \log w$ με κεφάλαιο 6,50 και την ίδια σω $u(w) = \log w$ σκέπτεται να αναλάβει την προηγούμενη ζημιά (ρίσκο) X. Να δειχθεί ότι το ελάχιστο ασφάλιστρο H που πρέπει να ζητήσει για την αντασφάλιση 100% της ζημιάς X είναι $H = 0{,}26$.
Υπάρχει εφικτή ασφαλιστική πολιτική;

8*. Υπό τις ωφελιμοσυναρτήσεις (16) και (17), να δειχθεί ότι το $G = G(w)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του w.

9. Δείξε (γεωμετρικά) την (23) κάνοντας χρήση α) του σχήματος,



και β) του αναπτύγματος της $u(x)$ περί το x_0 μεχρι υπόλοιπο 2ας τάξεως.

10. Παίρνοντας το $x_0 = \mu = E(X)$ στην προηγούμενη Άσκηση 9, δείξτε την ***ανισότητα Jensen***: Για κοίλη u,

$$E[u(X)] \le u(E(X)) = u(\mu).$$

Σημ. Ισότητα ισχύει αν η X είναι εκφυλισμένη ($P[X=c]=1$) ή η u είναι γραμμική.

$I_d(x) = \begin{cases} 0 & x<d \\ x-d & x \geq d \end{cases}$

11. Έστω ***αναλογική ασφάλεια,*** με κάλυψη της μορφής

$$I_p^*(x) = px, \qquad 0<p<1$$

και η $I_d(x)$ της (21). Για ποιά p και d το ασφάλιστρο P είναι 12,5 και στις δυο περιπτώσεις, όταν η ζημιοκατανομή είναι ομοιόμορφη στο (0,100); Επίσης δείξε ότι (βλ. Ασκ. 12)

$$\Delta[X - I_p^*(X)] > \Delta[X - I_d(X)].$$

Απάντηση

$$p = 0{,}25,\ d = 50,\quad \Delta[X - I_p^*(X)] = 468{,}75 > 260{,}42 = \Delta[X - I_d(X)]$$

12*. Με τις υποθέσεις του Θεωρήματος, δείξε ότι

$$\min_I \Delta[X - I(X)] = \Delta[X - I_d(X)],$$

δηλ. η πολιτική I_d ελαχιστοποιεί την διασπορά της απλήρωτης ζημιάς $X - I(X)$ για δεδομένο ασφάλιστρο P.

13. Υπάρχει μοναδική λύση d της (22).

Υπόδειξη. $\quad P = \int_d^\infty (x-d)f(x)dx = \int_d^\infty [1-F(x)]dx$

14. α) Να δειχθεί ότι η γραμμική και τετραγωνική, προσέγγιση (στο ανάπτυγμα Taylor):

$$u(w-G) \approx u(w-\mu) + (\mu - G)u'(w-\mu),$$

$$u(w-X) \approx u(w-\mu) + (\mu - X)u'(w-\mu) + \frac{1}{2}(\mu - X)^2 u''(w-\mu),$$

δίνει κατά προσέγγιση το ασφάλιστρο

$$\text{(i)} \qquad G \approx \mu - \frac{1}{2}\frac{u''}{u'(w-\mu)}\sigma^2,$$

όπου $\mu = E(X)$, $\quad \sigma^2 = \Delta(X)$.

β) Για $u(w) = k\log w$ της Ασκ. 4 η (i) δίνει

$$G \approx \mu + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{w-\mu}.$$

Πως συγκρίνεται αυτό με το G της Ασκ. 4;

15. Ένα άτομο έχει περιουσιακά στοιχεία $w_0 = 100$ και συνάρτηση ωφελιμότητας $u(w) = w^2$, $w \geq 0$ και αντιμετωπίζει μια τυχαία απώλεια ομοιόμορφη κατανεμημένη στο [0, 100]. Να υπολογιστεί το μέγιστο ασφάλιστρο που δέχεται να πληρώσει το άτομο για κάλυψη της ***μισής*** απώλειας.

Ασκήσεις Παραρτήματος

1.1. Έστω ότι το σύνολο R των αμοιβών αποτελείται από 3 αμοιβές r_1, r_2, r_3 και $r_3 < r_2 < r_1$ και $u(r_3) = 0$, $u(r_2) = p$, $0 < p < 1$, $u(r_1) = 1$.

α) Αν $P = (p_1, p_2, p_3)$ και $P' = (p_1', p_2', p_3')$ είναι δύο κατανομές (επί του R), ποιά σχέση πρέπει να ισχύει μεταξύ p_i, p_j' και p 'ωστε $P \prec P'$;

β) Έστω ότι $(0{,}3,\ 0{,}3,\ 0{,}4) < (0{,}5,\ 0,\ 0{,}5)$. Τι μπορείτε να πείτε για τη σχέση μεταξύ των $(0{,}2,\ 0{,}5,\ 0{,}3)$ και $(0{,}4,\ 0{,}2,\ 0{,}4)$; Τι λέτε για το p;

1.2. (i) Εκτιμήστε την προσωπική σας ωφελιμοσυνάρτηση u_0 για χρηματικές (σε χιλ. δρχ) αυξομειώσεις (διαφορική ωσ) στο διάστημα $[-100, 100]$.

(ii) Χωρίς να λάβετε υπόψη το (i), δείτε τι προτιμάτε μεταξύ των ζευγών (τζόγων):

α) $\quad \frac{1}{4}(20) + \frac{3}{4}(0)$ ή $\frac{1}{2}(40) + \frac{1}{2}(60)$

β) $\quad \frac{1}{2}(40) + \frac{1}{2}(-10)$ ή $\frac{2}{3}(15) + \frac{1}{3}(0)$

(γ) $\quad \frac{1}{2}(100) + \frac{1}{2}(-100)$ ή $\frac{1}{2}(10) + \frac{1}{2}(-10)$.

(iii) Καθορίστε τώρα τις προτιμήσεις σας στο (ii) βάσει της ωσ που κατασκευάσατε στο (i).

1.3. Συνέχεια. Βρείτε σταθερές α, b ώστε για $0 \le r \le 10$ η

$$u(r) = \alpha \log(br+1)$$

να πλησιάσει την u_0.

1.4. Ο κ. Χ προσδιόρισε ότι η ωσ του u για αυξομειώσεις του κεφαλαίου του στο διάστημα $[-100, 500]$ είναι η

$$u(r) = \alpha \log(br+1).$$

α) Τι πρέπει να προτιμήσει μεταξύ του να του δοθεί το ποσό των 100 και του "παιγνιδιού"

$$(0)x\frac{1}{3} + (500)x\frac{2}{3},$$

δηλ. να κερδίσει 0 με πιθανότητα 0 ή 500 με πιθανότητα $\frac{2}{3}$;

β) Αν υποτεθεί ότι, εναλλακτικά, του προτείνεται να πληρώσει 100 για συμμετοχή στο παιγνίδι, τι να διαλέξει;

1.5. Οι A και B έχουν την ίδια ωσ u για αυξομειώσεις x των χρημάτων τους και $u(x) = x^{1/3}$.

Έστω ότι ο ένας από τους A και B παίρνει, σαν δώρο, ένα λαχείο που κερδίζει r δρχ. με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ ή 0 (με πιθανότητα $\frac{1}{2}$). Να δειχθεί ότι υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε, ανεξάρτητα του ποιός παίρνει το λαχείο, μπορεί να το πουλήσει στον άλλο για c δρχ. και να συμφέρει και στους δύο.

1.6. Στο παιγνίδι του παραδόξου του St. Petersburg ας υποθέσουμε ότι η ωσ u για αυξομειώσεις (κεφαλαίου) είναι η

$$u(x) = \begin{cases} 100, & x > 100 \\ x, & |x| \le 100 \\ -100, & x < -100 \end{cases}$$

Να βρεθεί το μεγαλύτερο c που θα πληρώσει ένας για να παίξει το παιγνίδι.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω ότι η συνολική ζημιά (αποζημίωση) εβδομαδιαίων τροχαίων ατυχημάτων είναι σύνθετη Poisson με $\lambda = 2$ και σπ ατομικής ζημιάς
$$p(x) = 0,1x \qquad x = 1,2,3,4.$$
Να δειχθεί ότι οι πιθανότητες $P[S = k]$, $k = 0,1,2,3,4$ είναι e^{-2}, $0,2e^{-2}$, $0,42e^{-2}$, $0,68e^{-2}$, $1,01e^{-2}$.

2. Αν η S είναι σύνθετη Poisson(λ) με σπ ατομ. ζημιάς
$$p(x) = [\cancel{-\ln(1-\theta)}]\frac{\theta^x}{x}, \qquad x = \cancel{0},1,2,\ldots, \qquad 0 < \theta < 1 \qquad p(x) = \frac{-1}{\ln(1-\theta)} \cdot \frac{\theta^x}{x}$$
να δειχθεί ότι η S είναι αρνητική διωνυμική με παραμέτρους p και r:
$$p = 1-\theta, \qquad r = \frac{\lambda}{-\log(1-\theta)}.$$

3. Αν η $S^{(1)}$ είναι σύνθετη Poisson (2) με
$$p^{(1)}(1) = p^{(1)}(3) = 0,2, \qquad p^{(1)}(2) = 0,6$$
και η $S^{(2)}$ σύνθετη Poisson (6) με
$$p^{(2)}(3) = p^{(2)}(4) = 0,5,$$
ποιά η κατανομή της $S = S^{(1)} + S^{(2)}$;

4. Να δειχθεί ότι η σύνθετη Poisson(λ) με ζημιοκατανομή $p(x)$, $x = 1,2,\ldots$, και η σύνθετη Poisson (λ/α) με 3κ
$$\tilde{p}(x) = \begin{cases} \alpha\, p(x) & x = 1,2,\ldots \\ 1-\alpha, & x = 0 \end{cases}, \qquad 0 < \alpha < 1$$
είναι ισόνομες. Πως εξηγείται λογικά;

5. Επεκτείνετε τις (13) και (14) για N αρνητική διωνυμική.

X 6*. Εξετάστε το $S_{N(t)}$, όπου αντί του N Poisson(λ) η $N(t)$ είναι ανέλιξη Poisson·

7. ***Συντελεστής απώλειας** R.* Έστω S η συνολική ζημιά (αποζημίωση) και G τα συνολικά ασφάλιστρα για δεδομένη ασφαλιστική περίοδο. Ο λόγος S/G λέγεται συντελεστής απώλειας.
Αν $G = (1+\theta)E(N)E(X) = (1+\theta)\mu E(N)$, $\theta > 0$ (κινδυνοφοβούμενοι πελάτες, βλ. Κεφ. 1), να δειχθεί
$$E(R) = \frac{1}{1+\theta}, \qquad V(R) = \frac{E(N)V(X) + \mu^2 V(N)}{(\mu E(N)(1+\theta)\cancel{^{2}})^2}$$
και να βρεθεί η $V(R)$ για σ. Poisson(λ) και σ. $NB(p,r)$, καθώς και οι αντίστοιχες πιθανότητες (κατά προσέγγιση) να ζημιωθεί η εταιρεία:

$$P[R>1].$$

8*. Η πιθανότητα πυρκαγιάς σε κάθε ένα από 240 κτίσματα είναι $\frac{1}{2}$, το δε ύψος της αποζημίωσης, αν συμβεί πυρκαγιά, είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στο διάστημα $(0, A]$. Αν οι συνολικές αποζημιώσεις είναι S, να βρεθεί το διάστημα $(\mu_s - 3\sigma_s,\ \mu_s + 3\sigma_s)$:

(A) (50,5A, 69,5A) (B) (48,4A, 71,6A)
(Γ) (45,0A, 75,0A) (Δ) (42,0A, 78,0A)
(E) (39,9A, 80,1A).

9. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των συνολικών αποζημιώσεων, είναι $f(x) = \frac{3}{x^4}$, $1 \le x$. Επιλέγουμε σταθερές $\theta > 0$ και $\lambda > 0$ τέτοιες ώστε $\Pr[S \le (1+\theta)E(S)] = \Pr[S \le E(S) + \lambda Var(S)] = \ = 0{,}95$. Ποιά από τα παρακάτω είναι σωστά;

I. $\theta\frac{2}{3}\sqrt[3]{20}-1$ II. $\lambda = \theta\sqrt{3}$ III. $Var(S) = 2E(S)$

(A) Κανένα (B) Μόνον το I (Γ) Μόνον το II
(Δ) Μόνον το III (E) Μόνον τα I, II.

10. Για κάθε ένα από n ασφαλιστήρια, η πιθανότητα ζημιάς είναι $\frac{1}{2}$, το δε ύψος της αποζημίωσης, αν συμβεί ζημιά, έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = x$, $0 < x \le \sqrt{2}$. Ο ασφαλιστής χρησιμοποιεί την κανονική κατανομή για να βρει $\theta > 0$ τέτοιο ώστε οι συνολικές αποζημιώσεις S να ικανοποιούν τη συνθήκη $\Pr[S > (1+\theta)E(S)] = k$. Αν η τ.μ. Z είναι $N(0,1)$ και $0 < \lambda < 1$ γράφουμε z_λ για τον αριθμό για τον οποίο $\Pr(Z \le z_\lambda) = \lambda$. Για δοθείσα τιμή του k, ποιό από τα παρακάτω είναι η αντίστοιχη τιμή του θ;

(A) $\frac{z_{1-k}}{2}\sqrt{\frac{5}{n}}$ (B) $z_{1-k}\sqrt{\frac{1}{n}}$ (Γ) $\frac{z_{1-k}}{2}\sqrt{\frac{1}{n}}$
(Δ) $z_k\sqrt{\frac{5}{n}}$ (E) $\frac{z_k}{2}\sqrt{\frac{5}{n}}$.

11. Έστω σύνθετη Poisson, κατανομή συνολικών αποζημιώσεων, S με $\lambda = 5$ και $p(1) = 0{,}6$, $p(2) = 0{,}4$. Να βρεθεί η τιμή του $f_S(4)$ με ***κάθε μια*** από τις τρεις μεθόδους υπολογισμού της σύνθετης Poisson (δηλαδή, με την ***βασική μέθοδο και με την εναλλακτική μέθοδο και με την***

* Ασκήσεις, όπως αυτή, με πολλαπλή επιλογή (multiple choice) είναι από τις Αναλογιστικές Εξετάσεις.

αναδρομική μέθοδο). Τέλος, να επαληθευτεί το αποτέλεσμα καθαρά συνδυαστικά (χωρίς τη χρήση συνελίξεων).

12. Να βρεθεί $F_S(x)$, η συνάρτηση κατανομής των συνολικών αποζημιώσεων, αν $\Pr(N=0)=\Pr(N=1)=\Pr(N=2)=\frac{1}{3}$ και $p(x)=e^{-x}$, $0<x$.

(Α) $1-1\frac{1}{3}e^{-x}$ (Β) $1-\frac{1}{3}xe^{-x}$ (Γ) $1-\frac{1}{3}(x+1)e^{-x}$

(Δ) $1-\frac{1}{3}(x+2)e^{-x}$ (Ε) $1-(x+1)e^{-3x}$.

13. Να βρεθεί η ργ $M_S(t)$, των συνολικών αποζημιώσεων, αν $\Pr(N=n)=\frac{(n+2)(n+1)}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}$, $n=0,1,2,\ldots$ (Pascal) και $p(x)=e^{-x}$, $x>0$.

(Α) $\left(\frac{1-e^t}{1-2e^t}\right)^3$ (Β) $\left(\frac{1}{2-e^t}\right)^3$ (Γ) $\left(\frac{1}{1-t}\right)^t$

(Δ) $\left(\frac{1}{1-2t}\right)^3$ (Ε) $\left(\frac{1-t}{1-2t}\right)^3$

14. Να βρεθούν $E(S)$ και $\sigma^2(S)$, αν $\Pr(N=n)=pq^n$, $n=0,1,2,\ldots$ $(0<p<1,\ p+q=1)$, και το ύψος X μιας αποζημίωσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στο (0,1).

	$E(S)$	$\sigma^2(S)$
(Α)	$\frac{q}{2p}$	$\frac{(3+p)q}{12p^2}$
(Β)	$\frac{q}{p}$	$\frac{(3+p)q}{12p^2}$
(Γ)	$\frac{q}{2p}$	$\frac{(1+p)q}{12p^2}$
(Δ)	$\frac{q}{p}$	$\frac{(1+p)q}{12p^2}$
(Ε)	$\frac{q}{2p}$	$\frac{q}{12p^2}$

15. Η S_1 είναι σύνθετη Poisson με $\lambda=2$ και $p_1(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $x=1,2,3,\ldots$, και η S_2 είναι σύνθετη Poisson με $\lambda=1$ και $p_2(x)=2\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $x=1,2,3,\ldots$.

Ποιό από τα παρακάτω είναι η $p(x)$ για τη σύνθετη Poisson $S_1 + S_2$ (S_1, S_2 ανεξάρτητες);

(Α) $\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x\right]$ (Β) $\frac{2}{3}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x\right]$

(Γ) $\frac{2}{3}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}\right]$ (Δ) $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$

(Ε) $\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$.

16. Οι συνολικές αποζημιώσεις S έχουν $E(S) = 27$, $\sigma^2(S) = 44$ και τρίτη κεντρική ροπή 176.

Ποιό από τα παρακάτω αποτελεί (μετατοπισμένη) κατανομή Γάμμα προσεγγιστική της κατανομής της S;

(Α) $\frac{1}{10!}(x-5)^{10} e^{-\frac{1}{2}x}$ (Β) $\frac{1}{2^{11}.10!}(x-5)^{10} e^{-\frac{1}{2}x}$

(Γ) $\frac{e^{\frac{5}{2}}}{2^{11}.10!}(x-5)^{10} e^{-\frac{1}{2}x}$ (Δ) $\frac{2^{10}}{10!}(x-5)^{10} e^{-2x}$

(Ε) $\frac{(2e)^{10}}{10!}(x-5)^{10} e^{-2x}$.

17. Δυό χαρτοφυλάκια Ι και ΙΙ διαφέρουν κατά το ότι το Ι έχει προκαθορισμένα ύψη αποζημιώσης b_x, ενώ το ΙΙ έχει τυχαία ύψη αποζημιώσης για τα οποία δίνονται οι μέσοι μ_x και οι διασπορές σ_x^2.

	n_x	g_x	b_x
Ι	2000	0,05	1
	500	0,10	2

	n_x	g_x	μ_x	σ_x^2
ΙΙ	2000	0,05	1	1
	500	0,10	2	4

Να βρεθεί ο λόγος $\frac{\sigma_{II}^2(S)}{\sigma_I^2(S)}$, όπου S οι συνολικές αποζημιώσεις για το κάθε χαρτοφυλάκιο.

(Α) $\frac{12}{11}$ (Β) $\frac{13}{11}$ (Γ) $\frac{23}{11}$ (Δ) 2 (Ε) $\frac{25}{11}$.

18. Μια διαδικασία αποζημιώσεων περιγράφεται από $\Pr(N = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$, $n = 0,1,2,\ldots$, και $\Pr(X = 0) = \Pr(X = 1) = \frac{1}{2}$. Ποιό από τα παρακάτω είναι η σ.π. $\Pr(S = n)$ των συνολικών αποζημιώσεων S;

(A) $e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$ (B) $e^{-\frac{\lambda}{2}}\frac{\lambda^n}{n!}$ (Γ) $e^{-\frac{\lambda}{2}}\frac{\lambda^n}{2^n}$

(Δ) $e^{-\lambda}\frac{(\lambda|2)^n}{n!}$ (E) $e^{-\frac{\lambda}{2}}\frac{(\lambda|2)^n}{n!}$.

19. Η διαδικασία S είναι σύνθετη Poisson με $\lambda = 4$ και $p(x) = e^{-x}$, $0 \le x$. Το ασφάλιστρο G ορίζεται ως $E(S) + \theta\sqrt{Var(S)}$, $\theta > 0$. Ο δείκτης ζημιών (loss ratio) R ορίζεται ως $\frac{S}{G}$. Ποιό από τα παρακάτω είναι $E(R)$;

(A) $\frac{1}{1+\theta}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\theta}$ (Γ) $\frac{\theta}{\sqrt{2}+\theta}$

(Δ) $\frac{2}{2+\theta}$ (E) $\frac{\theta}{2+\theta}$

20. Η πιθανότητα 0,1,2 ζημιών είναι, αντιστοίχως, 0,50, 0,25, 0,25. Τα ύψη αποζημίωσης 1 και 2 έχουν πιθανότητα 0,50 το καθένα. Ποιό από τα παρακάτω όρίζει τη συνάρτηση κατανομής των συνολικών αποζημιώσεων;

X	(A)	(B)	(Γ)	(Δ)	(E)
0	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
1	0,6250	0,6250	0,5625	0,6250	0,6875
2	0,7500	0,7500	0,6875	0,8125	0,8125
3	0,8750	0,9375	0,8750	0,9375	0,8750
4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

21. Μια σύνθετη αρνητική διωνυμική διαδικασία αποζημιώσεων δίνεται από $\Pr(N = n) = 4(n+1)(n+2)\left(\frac{1}{3}\right)^{n+3}$, $n = 0,1,2,\ldots$, και $p(x) = \frac{1}{120.000}$, $0 \le x \le 120.000$. Να βρεθούν $E(S)$ και $\sigma^2(S)$.

	$E(S)$	$\sigma^2(S)$
(A)	$6 \cdot 10^4$	$45 \cdot 10^8$
(B)	$6 \cdot 10^4$	$51 \cdot 10^8$
(Γ)	$9 \cdot 10^4$	$99 \cdot 10^8$
(Δ)	$9 \cdot 10^4$	$126 \cdot 10^8$
(E)	$9 \cdot 10^4$	$153 \cdot 10^8$

Πρέπει φυσικά να σημειωθεί ότι όλα τα ποσά, που υπεισέρχονται σε μια αναλογιστική πράξη, να αναχθούν σε αξίες την ίδια δεδομένη χρονική στιγμή. Εδώ βασικό ρόλο παίζει η λεγόμενη

Εξίσωση αξίας : Για δεδομένη σειρά K_i, $i=1,\dots,n$ ***και*** εισπράξεων ***και*** πληρωμών (δηλ. θετικών και αρνητικών K_i) που γίνονται τις στιγμές t_i, $i=1,\dots,n$, αντίστοιχα, αν η ***εξόφληση είναι "οικονομικά ορθή"***, τότε ισχύει η ***εξίσωση αξίας***:

$$\sum_{i=1}^{n} K_i v^{t_i} = 0. \tag{26}$$

(Ο ασφαλιζόμενος θα ήθελε $\sum K_i v^{t_i} \geq 0$, ενώ ο ασφαλιστή, $\sum K_i v_i^{t_i} \leq 0$, ώστε το "παιγνίδι" να γίνεται δίκαιο όταν ισχύει η (26)).

Ένα ισοδύναμο πρόβλημα είναι ο καθορισμός ενός μοναδικού ποσού K καταβλητέου τη στιγμή t ώστε να έχει την ίδια αξία με τα K_i, $i=1,\dots,n$, καταβλητέα τις στιγμές $t_1,\dots,t_n$. Τότε το K θα ικανοποιεί την εξίσωση

$$Kv^t = \sum K_i v^{t_i}.$$

Αν τα v, K_i, t_i είναι πάλι δεδομένα, αλλά αντί του t, δίδεται το K, τότε ο χρόνος t ικανοποιεί την

$$t = \frac{1}{\delta}\ell n\left(K / \sum K_i v^{t_i}\right).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ποιά κατάθεση με ανατοκισμό είναι συμφερότερη;
   α) 8% μηνιαία ή 9% εξαμηνιαία;
   β) 10% ετήσια ή 9,5% συνεχώς;
   γ) 18% ετήσια ή 18,80% μηνιαία;

2. Εξετάστε κατά πόσο οι σχέσεις
   α) $(1+r)^t$, $0<t<1$,   β) e^{rt}, $0<t<1$
   υποτιμούν ή υπερτιμούν τον τόκο για δεδομένο ετήσιο επιτόκιο r.
   Ομοίως συγκρίνετε τις $(1+rk)^t$, $(1+r)^{kt}$, $k>0$, $t>0$. Τι συμβαίνει όταν το $r \to 0$;

3. Δείξτε τις (16) και (17).

4. Δείξτε ότι η συσσωρευμένη αξία συνεχούς ράντας διάρκειας t περιόδων είναι

$$\bar{s}_t = \frac{e^{\delta t} - 1}{\delta}.$$

5. Να δειχθεί η (20). (Για τη $d < \delta$ εξετάστε το $\int_0^i (1+x)^{-1} dx$).

6. Να δειχθούν οι (αντίστοιχες των) (16) (17) και (19) για τις συσσωρευμένες αξίες ράντας.

7. Να δειχθούν οι (25) και (26), υπολογιστικά και συλλογιστικά.

8. Πρωτοδιοριζόμενος μαθηματικός δανείζεται 3.500.000 για αγορά αυτοκινήτου (χωρίς απόσυρση...!) με ετήσιο επιτόκιο 24%, ανατοκιζόμενο, με το μήνα. Συμφωνεί να ξεπληρώσει (***αποσβέσει***) το χρέος του με (ληξιπρόθεσμες) μηνιαίες δόσεις των 100 χιλ. η καθεμιά. α) Πόσο καιρό θα τον πάρει να ξοφλήσει το δάνειο; β) μετά $2\frac{1}{2}$ χρόνια (30 μήνες) πόσα ακόμα οφείλει;

9. ***Η (ατέλειωτη) ιστορία - περιπέταμα ενός Ι.Χ.***
Την 1/8/1979 ο Α έδωσε 190 χιλ. δρχ. για εκτελωνισμό (δασμό) του αυτοκινήτου του και 60 χιλ. δρ. για πληρωμή των εκκρεμούντων από τετραετίας (15 χιλ. ετησίως) τελών κυκλοφορίας. Ο εκτελωνιστής απέφυγε ("μπάρκαρε") να εκτελωνίσει εμπρόθεσμα το Ι.Χ. και να πληρώσει τα τέλη κυκλοφορίας (επεστράφη το ποσό αργότερα με απόφαση Δικαστηρίου το 1983).
Αποτέλεσμα του μη εκτελωνισμού ήταν ο καταλογισμός προσθέτων τελών (προστιμο για "παράνομη κυκλοφορία" του Ι.Χ.) για όλο το διάστημα 1976-1987 (11 έτη).
Κατά την εξαγωγή του (ατελώνιστου) Ι.Χ. την 1/8/1987, ο Α κατέβαλε 400 χιλ. έναντι των προσθέτων τελών (πρόστιμου) καθώς και όλα τα οφειλόμενα τέλη κυκλοφορίας (των 11 ετών 76-87) δηλ. $11 \times 15 = 165$ (υποθέστε ότι ήταν πληρωτέα, ληξιπρόσθετα, την 1/8 κάθε έτους).
Ύστερα από εκδίκαση προσφυγής (σε Διοικητικό δηκαστήριο) επεβλήθη μηνιαία κατακράτηση 100 χιλ. (από τις αποδοχές) μέχρι την εξόφληση του (υπολοίπου) πρόστιμου (που με τις μηνιαίες επιβαρύνσεις 102%, ανήλθε στα) 4.400 χιλ.! Η κατακράτηση άρχισε από 1/8/91 (και συνεχίζεται).

Υπόδ.: Υποθέστε (ετήσιο) επιτόκιο 16%, σε ετήσια βάση για όλα τα ποσά (δασμός, τέλη κυκλοφορίας, κ.λπ) μέχρι την 1/6/95, και σε μηνιαία βάση 1,5% (18% επιτόκιο) (μόνο) για τις μηνιαίες δόσεις των 100 χιλ. από 1/8/91 - 1/5/95

Σημ.: Παραλείπονται δικηγορικά, η απώλεια από την καθυστερημένη (και μερική) επιστροφή των 250 χιλ. του εκτελωνιστή, κ.ά. καθώς και η "ατίμητη" 15-χρονη ταλαιπωρία!

10. ***Δημογραφική εφαρμογή*** (του Νόμου ***Αναπαραγωγής*** (5)).
Έστω ότι οι πρωτόπλαστοι (το ζεύγος Αδάμ και Εύα) έζησαν πριν 1 εκατομμύριο χρόνια. Ο πληθυσμός του 1975 σε (ζεύγη) ήταν 2.300 εκατ. $\approx 2^{31,1}$ "ζεύγη". Με την υπόθεση σταθερού ετήσιου ρυθμού r αυξήσεως του πληθυσμού (ζευγών) α) Υπολογίστε το χρόνο διπλασιασμού του ανθρώπινου γένους και συμπεράνετε ότι $r = 22\times 10^{-6} = 0{,}022\,‰$ β) Υποθέτοντας ότι η θνησιμότητα d (όπως μέχρι τις αρχές του αιώνα σε πολλά μέρη) ήταν $d = 4\%$, δείξτε ότι τη (μέση) γεννητικότητα (ανά τους αιώνες) έπρεπε να είναι
$$b = r + d \approx 40{,}022\,‰.$$
Σήμερα, εκτός Ασίας και Αφρικής, $b \approx 10‰$ και $d = 8‰$.

11. Υποθέτοντας την ίδια θνησιμότητα 40‰ την περίοδο από την εποχή του Καίσαρα Αυγούστου (0 μΧ)[1] με παγκόσμιο πληθυσμό 250 εκ. έως το 1750 μΧ, με πληθυσμό 790 εκ., υπολογίστε την αντίστοιχη γεννητικότητα και συμπεράνετε ότι και πάλι (προϊστορικά και ιστορικά) το b ήταν κοντά στο d.

12. ***Πόσοι έζησαν (ή απέθαναν)*** επί της Γης! Α n_1 είναι οι γεννήσεις το χρόνο t_1 και n_2 τον χρόνο $t_2 > t_1$, να δειχθεί ότι (με καλή προσέγγιση) ο ετήσιος ***συνεχής ρυθμός αυξήσεως*** r δίδεται από την
$$r = \frac{\ell n\, n_2 - \ell n\, n_1}{t_2 - t_1}, \qquad \text{(i)}$$
ενώ ο ***συνολικός αριθμός γεννήσεων στο διάστημα*** (t_1, t_2) είναι
$$\int_{t_1}^{t_2} n_1 e^{r(t-t_1)}\,dt = \frac{n_2 - n_1}{r}. \qquad \text{(ii)}$$
και, από τις (i) και (ii), συμπεράνετε ότι οι ζήσαντες (γεννηθέντες) στο (t_1, t_2) είναι

[1] Οι ιστορικοί τοποθετούν την γέννηση του Χριστού 2 πΧ!

$$\frac{(n_2 - n_1)(t_2 - t_1)}{\ln n_2 - \ln n_1} \qquad \text{(ανεξάρτητο του } r\text{)}$$

Με βάση τους αριθμούς των γεννήσεων $n_i(t_i)$ σε 4 χρονολογίες (άλλος Αδάμ!):

t (έτος)	***Γεννήσεις***
$t_1 =$ 600.000 πΧ	1 (Αδάμ)
$t_2 =$ 6.000 πΧ	250 χιλ.
$t_3 =$ 1.650 μΧ	25 εκατομ.
$t_4 =$ 1962 μΧ	110 εκατομ.

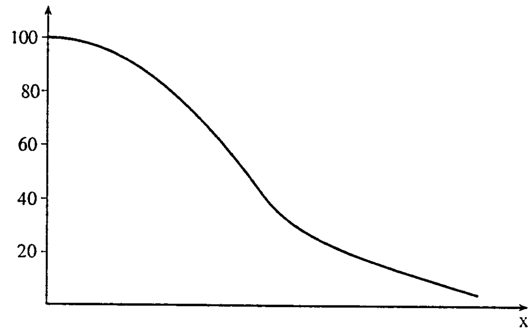
υπολογίστε τον συνολικό αριθμό *N*(1962) των (γεννηθέντων) μέχρι το 1962. Επαληθεύσετε ότι *N*(1962)=70,9 δισ.

Υπολογίστε το *N*(1962) υποθέτοντας ότι ο Αδάμ είναι όπως στην Ασκ. 10.

Τι παρατηρείτε;

η οποία δίνει τον αριθμό των επιζώντων σε ηλικία x, προφανώς αυτή έχει το ίδιο σχήμα με την (ομόσχημή της) ***συνάρτηση κατανομής ουράς*** (επιβιώσεως) $s(x) = 1 - F(x)$.

$y = \ell_x(\text{χιλ.})$ $(\ell_0 = 100$ χιλ.$)$



Σχήμα 3. Καμπύλη επιβιώσεως (επιζώντων)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Βρίσκοντας την αντίστοιχη συνάρτηση επιβίωσης $s(x)$, επαληθεύσετε ότι καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις μπορεί να θεωρηθεί ως ένταση θνησιμότητας μ_x.

   α) $B2^x$ (Gompertz), β) $(1+x)^{-1}$ (Pareto), γ) x^3.

2*. Να δειχθούν οι εξής ισοδύναμες εκφράσεις της $s(x)$:

   (i) $s(x+t) = s(x)\exp\left[-\int_0^t \mu_{x+u}du\right]$,

   (ii) $s(x) = s(x+t) + \int_0^t \mu_{x+u}s(x+u)du$,

   (iii) $s(x) - s(x+t) = s(x)\int_0^t {}_u p_x\, \mu_{x+u}du$.

   Από την (iii) έπεται η σκ της T_x,

$$ {}_t q_x = \int_0^t {}_u p_x\, \mu_{x+u}du $$

   και η σππ της T_x (βλ. (13))

$$ g(x) = {}_t p_x\, \mu_{x+t}. $$

Επιστρέφοντας στο κεφάλαιο (μέλλουσα αξία) τη στιγμή t, $K(t)$ υπό ένταση ανατοκισμού δ_t (βλ. Κεφ. 4), επαληθεύσετε την αντιστοιχία των (i) και (ii) (για $x=0$) με τις

$$K(t)=\exp[\int_0^t \delta_u du], \qquad K(t)=1+\int_0^t K(u)\delta_u du.$$

Αυτές αντανακλούν την αντιστοιχία των μ_x και δ_x:

$$\mu_x = \lim_{t\to 0}\frac{{}_tq_x}{t}, \qquad \delta_x = \lim_{t\to 0}\, {}_ti_x$$

με ${}_ti_x$ το πραγματικό επιτόκιο της περιόδου $(x,x+t)$:

$${}_ti_x=\frac{K(x+t)-K(x)}{t\,K(x)}.$$

3. Από την (2) ή συλλογιστικά, συμπεράνετε την

$${}_tp_x=({}_sp_x)({}_{t-s}p_{x+s}), \qquad 0\le s\le t.$$

4. (i) Εξετάστε γιατί οι παρακάτω συναρτήσεις δεν μπορούν να είναι αυτό που συμβολίζουν.

α) $\mu_x=(1+x)^{-1} \qquad x\ge 0$

β) $s_x=1-\dfrac{22x}{12}+\dfrac{11x^2}{8}-\dfrac{7x^3}{24}, \qquad 0\le x\le 3$

(ii) Να δειχθεί ότι

$$\int_0^\infty \mu_x dx=\infty$$

5. Αν $\mu_x=0{,}001$ για $20\le x\le 25$, υπολογίστε τις ${}_2q_{20}$, ${}_{2|2}q_{20}$.

6. Υποθέτοντας ότι η ℓ_{x+t} είναι φθίνουσα για $0\le t\le 1$, δείξτε ότι

α) αν η ℓ_{x+t} είναι κοίλη, τότε $q_x>\mu_x$,

β) αν η ℓ_{x+t} είναι κυρτή, τότε $q_x<\mu_x$.

7. ***Μέση μερική μελλοντική ζωή.*** Έστω $\overset{\circ}{e}_{x,n}$ η μέση μέλλουσα ζωή του (x) μεταξύ ηλικίας x και $x+n$. Δείξτε ότι

$$\overset{\circ}{e}_{x,n}=\int_0^n t\;{}_tp_x\;\mu_{x+t}dt+n\;{}_np_x=\int_0^n {}_tp_x\,dt.$$

8. Αν η υπόλοιπη ζωή T του (x) έχει εκθετική πυκνότητα υπολογίστε:

α) $\overset{\circ}{e}_x=E(T)$ β) $\varDelta(T)$ γ) διάμεσο (T).

Τι παρατηρείτε;

9. Αν $\mu_{x+t}=t$, $t\ge 0$, υπολογίστε:

α) ${}_{t}p_x\mu_{x+t}$, β) $\overset{0}{e}_x$.

10. Αν η συνάρτηση επιβίωσης

$$s(x)=\frac{\sqrt{100-x}}{10},\qquad 0\le x\le 100,$$

υπολογίστε τα

α) ${}_{17}p_{19}$ β) ${}_{15}q_{36}$ γ) ${}_{15|13}q_{36}$ δ) μ_{36} ε) $\overset{0}{e}_{36}$

11. Άτομο ηλικίας 55 ετών υπόκειται σε extra κίνδυνο στο ηλικιακό διάστημα (55,56). Αν η κανονική (γενική) πιθανότητα θανάτου στο (55,56) είναι $q_{55}=0{,}006$ και ο extra κίνδυνος μπορεί να εκφρασθεί με επιπρόσθετη θνησιμότητα που μειώνεται από 0,03 στην αρχή του έτους ως το 0 στο τέλος του έτους, υπολογίστε την πιθανότητα επιβιώσεως του (55) να φθάσει τα 56. (Απ. 0,979).

12. Δείξτε ότι ο αριθμός L_x, των επιζώντων μέχρι την ηλικία x, δίδεται από τις

α) $L_x=\int_0^1 t\,\ell_{x+t}\,\mu_{x+t}dt+\ell_{x+1}$ β) $L_x=\alpha(x)\ell_x+[1-\alpha(x)]\ell_{x+1}$

όπου $\ell_x=E(L_x)$.

13. Αν η θνησιμότητα μ_{x+t}, $0\le t\le 1$, μεταβληθεί σε $\mu_{x+t}-c$, $c>0$, να προσδιορισθεί το c ώστε η πιθανότητα του (x) να αποθάνει σε ένα έτος υποδιπλασιάζεται. Δείξτε ότι το ζητούμενο c ικανοποιεί την

$$\log(1-q_x/2)-\log(1-q_x)$$

14. Αν $q_{70}=0{,}04$ και $q_{71}=0{,}05$, υπολογίστε την πιθανότητα του να αποθάνει μεταξύ των ηλικιών $70\frac{1}{2}$ και $71\frac{1}{2}$, υποθέτοντας ότι οι θάνατοι είναι ομοιόμορφα κατανεμημένοι σε κάθε ηλικιακό έτος.

Απάντηση: 0,044

15. Από συνήθη πίνακα ζωής κατασκευάζουμε άλλο πίνακα διπλασιάζοντας την αρχική ένταση θνησιμότητας μ_x. Είναι ο νέος ρυθμός θανάτων q_x' μεγαλύτερος, μικρότερος ή ίσος του διπλασίου του q_x;

16. Αν η ένταση θνησιμότητας

$$\mu_x=\frac{Ac^x}{1+Bc^x},$$

να δειχθεί ότι η συνάρτηση επιβίωσης είναι η

$$s(x) = \left(\frac{1+Bc^x}{1+B}\right)^{-A/(B\log c)},$$

με κορυφή x_0 της κατανομής της X,

$$x_0 = \frac{\log(\log c) - \log A}{\log c}.$$

17. Υπό την ομοιόμορφη κατανομή θανάτων (de Moivre), να δειχθεί ότι:
   α) η διάμεσος υπόλοιπη ζωή

$$m_x = \frac{q_x}{1-0,5x} \quad \text{και} \quad q_x = \frac{m_x}{1+0,5m_x}$$

   β) η m_x υπό σταθερή ένταση θανάτων είναι

$$m_x = -\log(1-q_x)$$

   γ) για $\ell_x = 100 - x$, $0 \le x \le 100$, η

$$_{10}m_{50} = \frac{1}{45}$$

   όπου ετέθη

$$_nm_x = \frac{\int_0^n \ell_{x+t}\mu_{x+t}dt}{\int_0^n \ell_{x+t}dt}.$$

18. Αν

$$_up_x = \exp[-(u^2 + 2ux)/1250]$$

   να βρεθούν:
   α) η θνησιμότητα μ_x,
   β) η κατανομή της διάρκειας ζωής X και της υπόλοιπης ζωής T_x,
   γ) η $E(X) = E(T_0)$ και η $E[T_x]$.

19. Να δειχθεί ότι

$$\text{α)}\ \frac{\partial}{\partial x}\,{}_tq_x = {}_tp_x(\mu_{x+t} - \mu_x) \qquad \text{β)}\ \frac{d}{dx}\mathring{e}_x = \mathring{e}_x\,\mu_x - 1.$$

20. Επαληθεύσετε ότι (πρβλ (19))

$$_{k|}q_0 = -\Delta s(k) \quad \text{και} \quad \sum_{k=0}^{\infty} {}_{k|}q_0 = 1.$$

21*. Στην κατασκευή πινάκων Ζωής (επόμενο Κεφάλαιο) για x ακέραιο και $0 \le t \le 1$ στον υπολογισμό της κατανομής της $T(x+t)$, δεδομένων των $T(k) = K(k)$, $k = 0,1,\ldots$, έχουν υιοθετηθεί διάφορες υποθέσεις. Για ομοιόμορφη κατανομή των θανάτων στο $(x, x+1)$, να δειχθούν:
   ${}_tq_x = tq_x$, $\mu_{x+t} = q_x/(1-tq_x)$, $g(t) = q_x$ (βλ. (13)).