Αναλογιστικά Μαθηματικά ΜΑΠ

Πέμπτη 9 - 12 - 2021

Μάθημα 10

Είδη ασφάλισης

Ποσό που δίνω = benefit

← για την οικογένεια

1) Ισόβια ασφάλιση — Whole life insurance

2) πρόσκαιρη ασφάλιση. — term insurance.

3) Ασφάλεια επιβίωσης — Pure endowment policy

4) Μικτές ασφάλειες

Αναλογιστική παρουσία αξία (Αναμενόμενη)

(αξία στο τώρα)

Expected present value.

E.P.V. (benefits) = E.P.V (premiums)

Αναμενόμενη Παρουσα αξία του ποσού που θα δοθεί

?

Στοιχεία από θεωρία ανατοκισμού

Έστω κεφάλαιο K_0, r ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο (%)

Σύνθετο ανατοκισμό

Κεφάλαιο από 1 έτος $K_1 = K_0 + K_0 \cdot r = K_0(1+r)$

'' μετά από 2 έτη $K_2 = K_1 + K_1 \cdot r = K_1(1+r)$

$= K_0(1+r)^2$

Επαγωγικά μπορούμε να δείξουμε ότι μετά από n έτη
Το κεφάλαιο είναι $K_n = K_0(1+r)^n$

→ Σε ένα έτος k ανατοκιστικές περιόδους
($k=2$ → ανά εξάμηνο, $k=12$ → ανά μήνα)
...

για n ανατοκιστικές περιόδους $K_n = \left(1 + \frac{r}{k}\right)^n$

$\frac{r}{k}$ επιτόκιο της ανατ. περιόδου

για $k=2$ $\quad n=4 \quad$ → t = χρόνια $= \frac{n}{k} = 2$ χρόνια)

$k=12$ $\quad n=6 \quad t = 0{,}5$ χρόνια

$t = \frac{n}{k}$

Μετα απο t έτη.

Το κεφαλαιο είναι $K(t) = K_0 \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{t \cdot k}$.

$K_0 = 1$.

i πραγματικό ισοδύναμο ετήσιο επιτόκιο

$$\left(1 + \frac{r}{k}\right)^k = 1 + i$$

$i = 0{,}03$

3%

1 ευρώ σε ένα έτος θα έχω

$1{,}03$

$$r = r(k) = k \cdot \left[(1+i)^{1/k} - 1\right]$$

$k \to \infty$

Συνεχή ανατοκισμό

$$\delta = \lim_{k \to \infty} r = \lim_{k \to \infty} \frac{(1+i)^{1/k} - 1}{1/k} = \lim_{k \to \infty} \frac{e^{\frac{1}{k}\log(1+i)} - 1}{\frac{1}{k}} \overset{\text{De l'hospital}}{=} \log(1+i)$$

$\ln(1+i)$

$$i + 1 = e^{\delta} \qquad i = e^{\delta} - 1$$

για συνεχή ανατοκισμό

$$K(t) = K_0 \underbrace{(1+i)}^{t} = K_0 e^{\delta t}$$

δεκτός και για t μη ακέραιο.

$a(t)$ συνάρτηση συσσώρευσης

για $K_0 = 1$ $\quad K(t) = a(t)$

$$\delta_t = \frac{a'(t)}{a(t)} = \lim_{dt \to 0} \frac{\frac{a(t+dt)-a(t)}{dt}}{a(t)} = \lim_{dt \to 0} \frac{a(t+dt)-a(t)}{dt \cdot a(t)}$$

$\frac{r}{k}$

$$= \lim_{dt \to 0} \frac{\text{ποσό που κερδίσαμε στο διάστημα } (t, t+dt)}{\text{χρονικό διάστημα} \cdot \text{ποσό τη στιγμή } t}$$

$$= \lim_{dt \to 0} \quad \cdot \text{ επιτόκιο περιόδου } (t, t+dt)$$

$$= \frac{[(1+i)^t]'}{(1+i)^t} = \ln(1+i) = \delta \quad = \text{ένταση επιτοκίου}$$

i ισοδύναμο ετήσιο επιτόκιο

$\delta = \log(1+i)$ $\quad 1+i = e^{\delta}$

ένταση ανατοκισμού

$k_0 = K(t)(1+i)^{-t} = K(t) \cdot v^{t}$

$\alpha(t) = (1+i)^{t}$ $\quad K(t) = k_0 (1+i)^{t} = k_0 e^{-\delta t}$

* $k_0 = ;$ σε $t = 1$ χρόνο $k(1) = 1$ $\Rightarrow k_0 = (1+i)^{-1} = v = e^{-\delta}$

συντελεστής προεξόφλησης

$d = 1 - v = 1 - \frac{1}{1+i} = \frac{i}{1+i} = i \cdot v$

$[\,(1+i)(1-d) \cdot P = P\,]$

l_x, p_x ...

$D_x = l_x v^{x}$

$N_x = \sum_{k=0}^{\infty} D_{x+k}$

Υπάρχουν σε πίνακες

Αναλογιστική παρούσα αξία ενός ποσού S που θα δοθεί μετά απο χρόνο T (εξαρτάται απο το θάνατο) (T τμ)

benefit

(Ενδέχεται να το πάρει)

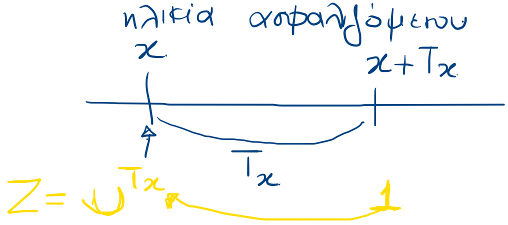
$$E(S \cdot u^T)$$

$Z_{(T)}$ παρούσα αξία πληρωμής (benefit) 1 €

Αναλογιστική παρούσα αξία $E(Z) =$;

ΙΣΟΒΙΑ ΑΣΦΑΛΙΣΗ

1. Πληρωμή τη στιγμή του θανάτου



$$\bar{A}_x = E(Z) = E\left(e^{-\delta T_x}\right)$$

$$= \int_0^\infty e^{-\delta t} f_{T_x}(t)\,dt$$

assurance → ηλικία του.

E.P.V.

$$g(t) = f_{T_x}(t) = {}_tp_x\,\mu_{x+t}$$

$$\boxed{\bar{A}_x = \int_0^\infty e^{-\delta t}\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}\,dt}$$

$$\delta = \ln(1+i)$$

$$E(sZ) = s\cdot\bar{A}_x$$

$$E(Z^2) = E\left[\left(e^{-\delta T_x}\right)^2\right] = E\left[e^{-2\delta T_x}\right] = \int_0^\infty e^{-2\delta t}\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}\,dt = {}^2\bar{A}_x$$

$$V(Z) = E(Z^2) - E(Z^2) = {}^2\bar{A}_x - \left(\bar{A}_x\right)^2$$

$$Var(sZ) = s^2\,Var(Z)$$

Άσκηση. $P(Z \leq 0,5) = ;$

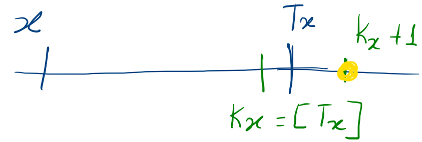
υΠχ.

$u = ;$

$$\bar{A}_x = 1 - \delta \int_0^{\infty} \frac{D_{x+t}}{D_x} \, dt.$$

② Ισόβια ασφάλιση – Πληρωμή στο τέλος του έτους θανάτου.

$$Z = v^{K_x + 1}$$



$$E(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} P(K_x = k)$$

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \, {}_{k|1}q_x$$

$$E(Z^2) = E\left(v^{2(K_x+1)}\right) = \ldots$$

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \, {}_{k|}q_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \frac{l_{x+k} - l_{x+k+1}}{l_x}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \frac{l_{x+k}}{l_x} \frac{v^x}{v^x} - \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \frac{l_{x+k+1}}{l_x}$$

$$= v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v^{k+x} l_{x+k}}{v^x l_x} - \qquad$$

$$= v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_{x+k}}{D_x} - \qquad$$

$$= v \frac{N_x}{D_x} - \left(\frac{N_x}{D_x} - 1 \right)$$

$$A_x = 1 - (1-v) \frac{N_x}{D_x}$$

$$A_x = 1 - d \frac{N_x}{D_x}$$

Εαν έχω ομοιόμορφη κατανομή θανάτων. $\bar{A}_x \simeq \frac{i}{\delta} A_x$ από πίνακες

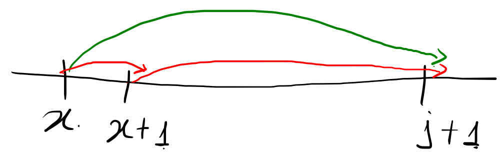
$$\bar{A}_x \simeq (1+i)^{0,5} A_x.$$

Άσκηση Δείξτε ότι $A_x = vq_x + vp_x A_{x+1}$

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \, {}_kp_x \, q_{x+k} = vq_x + v^2 p_x q_{x+1} + v^3 \, {}_2p_x \, q_{x+2} + \dots$$

$$= vq_x + vp_x \left(vq_{x+1} + v^2 p_{x+1} q_{x+2} + v^3 \, {}_2p_{x+1} \, q_{x+3} + \dots \right)$$

$${}_{j+1}p_x = {}_1p_x \; {}_jp_{x+1}$$



$$\boxed{A_x = vq_x + vp_x A_{x+1}}$$

ΠΡΟΣΚΑΙΡΗ ΑΣΦΑΛΙΣΗ

α) (συνεχή περίπτωση) η πληρωμή γίνεται τη στιγμή του θανάτου μόνο εάν ο θάνατος γίνει μέσα στα επόμενα n χρόνια

$$Z = \begin{cases} v^{T_x} = e^{-\delta T_x} & T_x \le n \\ 0 & T_x > n \end{cases}$$

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = E(Z) = \int_0^n e^{-\delta t} \, {}_tp_x \, \mu_{x+t} \, dt$$

$${}^2\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = E(Z^2)$$

β) (Διακριτή) Πληρωμή στο τέλος της χρονιάς θανάτου, μόνο Εάν ο θάνατος έγινε μέσα στα επόμενα n χρόνια

$$Z = \begin{cases} v^{K_x+1} & K_x \le n-1 \quad (K_x < n) \\ 0 & K_x \ge n. \end{cases}$$

$$A^1_{x:\overline{n|}} \quad E(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \, {}_{k|}q_x.$$

ΑΣΦΑΛΕΙΑ ΕΠΙΒΙΩΣΗΣ

$$Z = \begin{cases} 0 & T_x < n \\ v^n & T_x \geq n \end{cases}$$

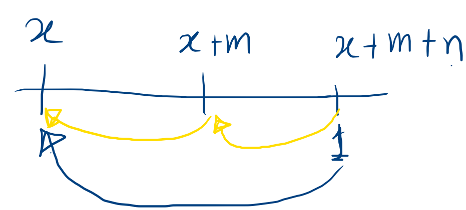
$${}_nE_x = A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = E(Z) = v^n P(T_x \geq n) = v^n \, {}_nP_x$$

$$= v^n \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

$$= \frac{v^{n+x}}{v^x} \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$${}_{n+m}E_x = {}_mE_x \cdot {}_nE_{x+m}$$

$${}_nE_{x+m} \cdot {}_mE_x$$



Ασκηση Ενας ασφαλιζομενος ηλικιας τωρα 25 ετών. ζητα να πληρωθεί 5.000 € ~~αν~~ όταν φτάσει στα 60

Την τωρινή αξία του ποσού που θα πάρει στα χέρια (αν το πάρει) θεωρωντας επιτόκιο ετήσιο (ισοδύναμο) 6%.

$$ {}_{35}E_{25} = A_{25:\overline{35|}}^{\;\;1} = v^{35}\,{}_{35}p_{25} \qquad \frac{S_{60}}{S_{25}} $$

$$ v = (1+i)^{-1} $$

$$ (1+0{,}06)^{-1} $$

πινακες

$$ = v^{35}\,\frac{l_{60}}{l_{25}} = 0{,}13011\,\frac{\;--\;}{---} $$

$$ = \frac{D_{60}}{D_{25}} = \text{πινακες}\ \ldots $$

$\boxed{\text{Μικτή ασφάλεια}}$ (πρόσκαιρη και επιβίωσης)

1) Συνεχή → Πληρωμή τη στιγμή του θανάτου (πριν τα n χρόνια) ή αν επιβιώσει n χρόνια

$$Z = \begin{cases} v^{T_x} & T_x < n \\ v^n & T_x \geq n \end{cases}$$

$$Z = v^{\min(T_x, n)}$$

Πληρωμή στιγμή $T_x \wedge n$

$$\bar{A}_{x:\overline{n|}} = E(Z) = \int_0^n e^{-\delta t} {}_tp_x \mu_{x+t} \, dt + \int_n^\infty e^{-\delta n} {}_tp_x \mu_{x+t} \, dt$$

$$= \int_0^n e^{-\delta t} {}_tp_x \mu_{x+t} \, dt + e^{-\delta n} {}_np_x$$

$$= \bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n|}} + A_{x:\overline{n|}}^{\;\;\;\;1}$$

2) Διακριτή (Πληρωμή στο τέλος έτους θανάτου) ή αν περάσει το n
αν γίνει πριν το n.

$$Z = \begin{cases} v^{K_x+1} & K_x \leq n-1 \\ v^n & K_x \geq n \end{cases}$$

$$A_{x:\overline{n|}} = A^{1}_{x:\overline{n|}} + A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}$$

Αναβαλλόμενες ασφάλειες

α) Πρόσκαιρη με αναβολή u ετών

$$Z = \begin{cases} e^{-\delta T_x} & u \le T_x < u+n \\ 0 & T_x < u \text{ ή } T_x \ge u+n \end{cases}$$

$$ {}_{u|}\bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}} = E(Z) = \int_u^{u+n} e^{-\delta t}\, {}_tP_x\, \mu_{x+t}\, dt $$

$x \qquad x+u \qquad x+u+n$

$$ {}_{s+u}P_x = {}_uP_x \; {}_sP_{x+u} $$

• $$ {}_{u|}\bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}} \overset{s=t-u}{=} \int_0^n e^{-\delta(s+u)}\, {}_{s+u}P_x\, \mu_{x+s+u}\, ds = $$

$$ = e^{-\delta u}\, {}_uP_x \int_0^n e^{-\delta s}\, {}_sP_{x+u}\, \mu_{x+s+u}\, ds = \underbrace{e^{-\delta u}\, {}_uP_x}_{{}_uE_x} \cdot \bar{A}^{1}_{x+u:\overline{n|}} $$

άρα

$$ {}_{u|}\bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}} = {}_uE_x\; \bar{A}^{1}_{x+u:\overline{n|}} $$

$A_{x:\overline{n|}}$

• $$ {}_{u|}\bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}} = \int_u^{u+n} e^{-\delta t}\, {}_tP_x\, \mu_{x+t}\, dt = \int_0^{u+n} e^{-\delta t}\, {}_tP_x\, \mu_{x+t}\, dt - \int_0^{u} e^{-\delta t}\, {}_tP_x\, \mu_{x+t}\, dt $$

$$ {}_{u|}\bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}} = \bar{A}^{1}_{x:\overline{u+n|}} - \bar{A}^{1}_{x:\overline{u|}} \quad \text{ή} $$

$$ \bar{A}^{1}_{x:\overline{u+n|}} = \bar{A}^{1}_{x:\overline{u|}} + {}_{u|}\bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}} $$

β) Αναβαλλόμενη (συνεχής)

$$Z = \begin{cases} v^{T_x} & T_x \geq u \\ 0 & T_x < u \end{cases}$$

$$_{u|}\bar{A}_x = \int_u^\infty e^{-\delta t} \, {}_tp_x \, \mu_{x+t} \, dt$$

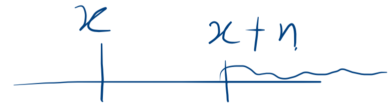
γ) Αναβαλλόμενη (διακριτή)

$$Z = \begin{cases} v^{K_x+1} & K_x \geq u \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$_{u|}A_x = \sum_{j=u}^{\infty} v^{j+1} \underbrace{{}_jp_x \, q_{x+j}}_{{}_{j|}q_x} \qquad v = (1+i)^{-1}$$

<u>Ασκηση</u>

$$ {}_nA_x = v^n \cdot {}_np_x \cdot A_{x+n} $$



$$ v = (1+i)^{-1} $$

$$ A_x = A^{\;1}_{x:\overline{n}|} + {}_{n|}A_x $$

Άσκηση $i = 0{,}06$

x	l_x	A_x
35	100.000	0.151375
36	99737.15	0.158245
40	98485,68	....

Υπολογίστε (άσκηση 4.1 Dickson)

α) ${}_5E_{35}$

β) $\bar{A}^{\,1}_{35:\overline{5}|}$

γ) ${}_{5|}A_{35}$

δ) $\bar{A}_{35:\overline{5}|}$ υποθέτοντας ομοιόμορφη κατανομή θανάτου

Λύση

$$v = (1+i)^{-1} = (1{,}06)^{-1} \simeq 0{,}94$$

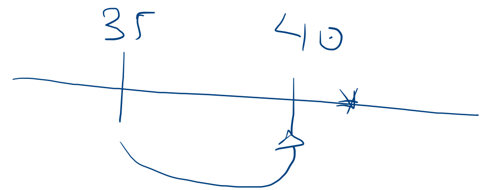
$$(\alpha)\ {}_5E_{35} = v^5\, {}_5p_{35} = v^5 \frac{s(40)}{s(35)} = v^5 \frac{\frac{l_{40}}{l_0}}{\frac{l_{35}}{l_0}} = v^5 \frac{l_{40}}{l_{35}}$$

(β) $\bar{A}^{\,1}_{35:\overline{5}|}$ από τύπο:

$$A_{35} = A^{\,1}_{35:\overline{5}|} + v^5\, {}_5p_{35}\, A_{40}$$

(ΔΕΙΤΕ ΤΟ! γιατί;)

5) $A_{35} = v^{5} \cdot {}_{5}p_{35} \cdot A_{40}$



Το βρίσκω V.

$$A_{35:\overline{5|}} = \bar{A}^{1}_{35:\overline{5|}} + A_{35:\overset{1}{\overline{5|}}} \qquad A_{35:\overset{1}{\overline{5|}}} = {}_{5}E_{35}$$

απο προηγούμενο ερώτημα

$$\bar{A}^{1}_{35:\overline{5|}} \overset{\text{ομοιόμορφη}}{\approx} \frac{i}{\delta} A^{1}_{35:\overline{5|}} \qquad \delta = \ln(1+i)$$

απο προηγούμενο ερώτημα

Άσκηση

Συν. επιβίωσης $S(x) = 1 - \frac{x}{100}$ $\quad x \in [0, 100]$ $\quad S'(x) = -1/100$

$i = 0{,}04$

α) σππ. T_{40} , συν. πιθ. K_{40}

β) Αναλ. παρούσα αξία, αν πληρωθεί 1 € τη στιγμή του θανάτου, μόνο αν αυτό συμβεί ως τα 75 χρόνια του

γ) '' '' '' στο τέλος του έτους θανάτου αν αυτό συμβεί ως τα 75 χρόνια

α) $$f_{T_{40}}(t) = {}_tP_{40}\,\mu_{40+t} = \frac{\cancel{S(40+t)}}{S(40)}\left[-\frac{S'(40+t)}{\cancel{S(40+t)}}\right] = \frac{\frac{1}{100}}{1-\frac{40}{100}} = \frac{1}{60}$$

$40+t \leq 100$, $t < 60$

Εαν $t > 60$ $\quad f_{T_{40}}(t) = 0$

β) $$P(K_{40} = k) = {}_kP_x - {}_{k+1}P_x \overset{x=40}{=} \frac{S(x+k)}{S(x)} - \frac{S(x+k+1)}{S(x)}$$

$$= \frac{\cancel{1} - \frac{40+k}{100} - \cancel{1} + \frac{40+k+1}{100}}{1 - \frac{40}{100}} = \frac{1}{60}$$

$k = 0, 1, 2, \dots, 59$

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{35}|} = \int_0^{35} v^t \underbrace{f_{T_{40}}}(t)\,dt = \int_0^{35} \underbrace{v^t}_{e^{t\log(u)}} \frac{1}{60}\,dt =$$

$$= \frac{1}{60}\,\frac{1}{\log u}\left(u^{35} - 1\right)$$

39

$$A^{1}_{40:\overline{35}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\, P\left(K(x) = k\right)$$