Σάββατο 20-11-2021

Μάθημα 7.

Μέτρα Κινδύνου $\boxed{m(S)}$ $\rightarrow$? αρχικό αποθεματικό κεφάλαιο

$$m(S+c) = m(S) + c$$

$S \leq S'$ $\quad m(S) \leq m(S')$

$$m(cS) = c\,m(S)$$

$$m(S+S') \leq m(S) + m(S')$$

$$m(2S) \leq 2m(S)$$

$m(S)$ $\quad E(S)$ $\quad Var(S)$ $\quad P(S)$

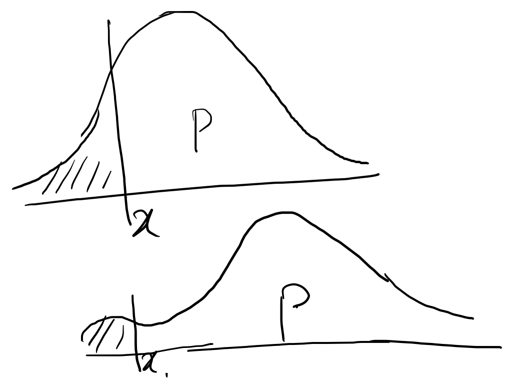
Value-at-Risk αξία σε κινδύνου

$$VaR(S, p) = \inf\{x : F_S(x) \geq p\}$$

$$P(S > x) \leq 1-p$$

$\sigma_{min}(2X) > 2\sigma_{min}(X)$

u exponential.



Tail Value-at Risk TVaR

$$\boxed{TVaR(S;p) = \frac{1}{1-p}\int_p^1 VaR(S;t)\,dt}$$

$$\boxed{TVaR(S;p) = VaR(S;p) + \frac{1}{1-p} ES(S;p)}$$

$$TVaR(S;p) = \inf_d \left\{ d + \frac{1}{1-p} P_S(d \right\}$$

$G(d)$

TVaR είναι υποπροσθετική

$S, \quad T \qquad p \in (0,1)$

$d_1 = VaR(S;p) \qquad d_2 = VaR(T;p)$

$d = d_1 + d_2$

$$TVaR(S+T;p) \leq d + \frac{1}{1-p} P_{S+T}(d)$$

$$= d_1 + d_2 + \frac{1}{1-p} E\left[\left((S+T-d_1-d_2)_+\right)\right]$$

$$\leq d_1 + d_2 + \frac{1}{1-p}\left[E\,(S-d_1)_+ + (T-d_2)_+\right]$$

$$= TVaR(S;p) + TVaR(T;p)$$

Conditional Tail Expectation

$$CTE(S;p) = E(S \mid S > VaR(S;p))$$

$$CTE(S;p) = VaR(S;p) + \frac{1}{1-F_S(VaR(S,p))} ES(S;p)$$

S συνεχής $\quad CTE = TVaR$

Kaas ασκηση 5.6.2 $\quad VaR, \ TVaR$

$$E(S;p) = E\left[\left(S - \underbrace{\mathrm{VaR}(S;p)}_{d}\right)_+\right]$$

$$\bar{G}(d) = E\left[(X-d)_+\right]$$

Άσκηση 5.6.6 kaas

$S \sim U(a,b)$ $a,b \in \mathbb{R}$ VaR? ES? TVaR? CTE?

Λύση

$$VaR(S;p) = F_S^{-1}(p)$$

$$F_S(t) = \frac{t-a}{b-a}$$ Θέτω $F_S(t) = p$ $0<p<1$

$$\frac{t-a}{b-a} = p \Rightarrow t = p(b-a)+a$$

$$VaR(S,p) = \begin{cases} p(b-a)+a & p \in (0,1] \\ -\infty & p=0 \end{cases}$$

$$ES(S;p) = E\big[(S - \underbrace{VaR(S,p)}_{s_0})_+\big]$$

$$= \int_a^b (t-s_0)_+ \frac{dt}{b-a} = \int_{s_0}^b (t-s_0)\frac{dt}{b-a} =$$

$$= \frac{(b-a)(1-p)^2}{2}$$

$$S \sim U(a,b) \qquad \boxed{S \sim (b-a)X + a} \qquad X \sim U(0,1)$$

$$ES(X;p) = E\big[(X - x_0)_+\big]$$

$$VaR(X;p) \overset{?}{=} p$$

$$ES(X;p) = E\big[(X-p)_+\big] = \int_p^1 [1 - F_X(t)]\,dt =$$

$$= \int_p^1 (1-t)\,dt = \frac{1}{2}(1-p)^2$$

$$ES(S;p) = (b-a)\,ES(X;p) = (b-a)\,\frac{1}{2}(1-p)^2$$

$$TVaR(X,p) = \frac{1}{1-p}\int_p^1 VaR(X,t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{1-p}\int_p^1 t\,dt = \frac{1+p}{2}$$

$$TVaR(S;p) = (b-a)\,TVaR(X;p) + a =$$

$$= \frac{(b-a)(1+p)}{2} + a = \frac{b+a+p(b-a)}{2}$$

? κατευθεία ? Hw

$$TVaR(S;p) = VaR(S;p) + \frac{1}{1-p} ES(S,p)$$

$CTE(S;p)$?

ή S συνεχής $\quad CTE(S;p) = TVaR(S;p)$

ή $CTE(S;p) = (b-a)\, CTE(X;p) + a$

$$CTE(X;p) = E\left(X \mid X > VaR(X;p)\right)$$

$$= \frac{E\left(X \cdot 1_{\{X > \overset{x_0}{VaR}(X;p)\}}\right)}{E(X)} =$$

$$= \frac{\int_{x_0}^{1} t\,dt}{1-p} = \frac{1+p}{2}$$

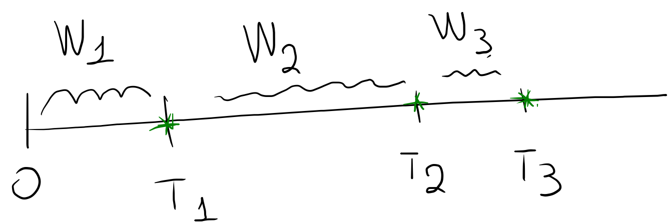
Θεωρία χρεοκοπίας

Ruin theory.

Αν οι ζημιές συμβαίνουν τις χρ. στιγμές

$T_1, T_2, \dots$ $\quad$ $T_1 < T_2 < \dots$

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} W_i$$



$W_i = T_i - T_{i-1} \quad i \geq 1$

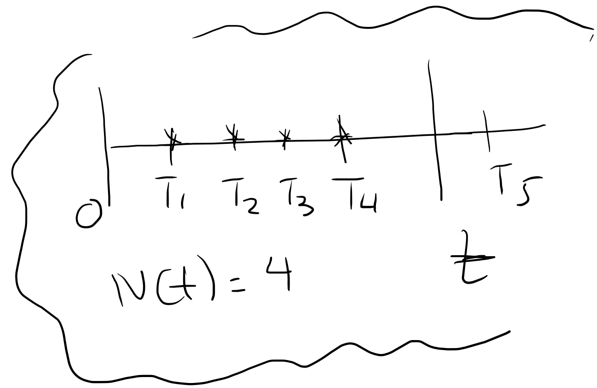
$T_0 = 0$

$\{T_n ; n \geq 0\}$ σημειακή διαδικασία

Η απαριθμήτρια στοχαστική διαδικασία

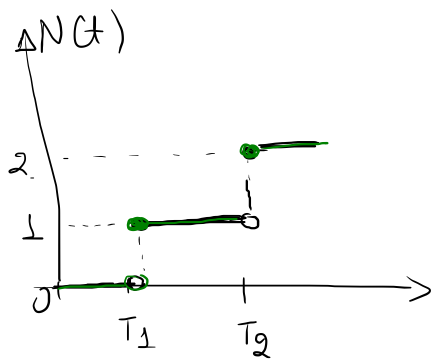
$\{N(t)\,;\,t \geq 0\}$ της $\{T_n\,;\, n \geq 0\}$

$$N(t) = \sup\{n \geq 0 : T_n \leq t\}$$



αριθμός των ζημιογόνων γεγονότων στο $(0,t]$

$N(0) = 0$



Δεξιά συνεχής

Ανανεωτική συνάρτηση

$\underline{m(t)} = E[N(t)]$

Εστω $P(t)$ συνολικό ποσό ασφαλίστρων στο $[0,t]$ (εσοδα)

$S(t)$ συνολο ποσο κινδύνου. (εξοδα)

$R(t) = (P(t), S(t))$ κινδυνοανέλιξη.

$\underbrace{P(t) - S(t)}_{\text{με ενδιαφέρει}}$

$P(t) = c \cdot t$

c : ασφαλιστρο στη μοναδα του χρόνου (premium rate)

αν $c(t)$

$P(t) = \int_0^t c(u)\,du$

$c \cdot t - S(t)$

u. αρχικό αποθεματικό

$$U(t) = u + c\,t - S(t)$$

έσοδα   έξοδα

$\{U(t);\, t \geq 0\}$ στοχαστική ανέλιξη Πλεονάσματος

Surplus process   (risk process)

$U(t)$ Πλεόνασμα τη χρονική στιγμή t

$U(0) = u$

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

X_i την εκφράζει το ποσό της i-αποζημίωσης

Θα υποθέτουμε ότι η $N(t)$

Διαδικασία Poisson

$N(t)$ διαδικασία Poisson με ρυθμό λ όταν.

(i) $N(0)=0$

(ii) Για $s<t$ η μεταβλητή $N(t)-N(s)$ ανεξ. της μεταβλητής $N(s)$ (ανεξ. προσαυξήσεις)

(iii) $P[N(t+h)-N(t)=1]=\lambda\cdot h+o(h)$ $h>0$ πολύ μικρό

$P[N(t+h)-N(t)=0]=1-\lambda h+o(h)$ $o(h)$: $\lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h}=0$

$(P(N(t+h)-N(t)\geq 2=o(h))$

(iii)′ για $0\leq s<t$ η τμ $N(t)-N(s)\sim \text{Poisson}(\lambda(t-s))$ $\lambda>0$

$$P(N(t)-N(s)=k)=e^{-\lambda(t-s)}\frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!}\quad k=0,1,\ldots$$

$$P(N(t)=k)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\quad k=0,1,\ldots$$

λ ένταση της Poisson

$\{N(t),\ t \geq 0\} \iff \{W_k\ ;\ k \in \mathbb{N}\}$

Poisson διαδικασία ρυθμού λ έντασης.

$W_1, W_2, \ldots$ ανεξ. & ισόνομες $\sim \exp(\lambda)$

Υπέρθεση σ. δ Poisson $\Big\}$: $\{N_1(t)\}_{t\geq 0}$, $\{N_2(t)\}_{t\geq 0}$ ανεξ. διαδ. Poisson

με ρυθμούς λ_1 λ_2 αντίστοιχα.

Τότε $\{N(t);\ t\geq 0\}$ $N(t)=N_1(t)+N_2(t)$

διαδ. Poisson με ρυθμό $\lambda_1+\lambda_2$

<u>Διάσπαση</u> Αν $\{N(t);\ t\geq 0\}$ διαδ. Poisson με ρυθμό λ

γεγονός είναι τύπου i με πιθανότητα p_i $i=1,2$ $(p_1+p_2=1)$

Τότε $\{N_1(t),\ t\geq 0\}$, $\{N_2(t),\ t\geq 0\}$ ανεξ. στοχ. διαδ. Poisson

με ρυθμούς λp_1 , λp_2 αντίστοιχα.

Μη ομογενή Διαδικασία Poisson

ρυθμό $\lambda(t)$ μη σταθερό

Ορ. διαδικ. μη-ομογενή Poisson με ρυθμό $\lambda(t)$

(i) $N(0)=0$

(ii) $\{N(t): t\geq 0\}$ ανεξ. προσ.

(iii) $P[N(t+h)-N(t)=1] = \lambda(t)h+o(h)$

$P(=0) = 1-\lambda(t)h+o(h)$

$ \geq 2 \quad = o(h)$

(iii)' $P(N(t+h)-N(t)=n) = e^{-(\Lambda(t+h)-\Lambda(t))} \dfrac{(\Lambda(t+h)-\Lambda(t))^n}{n!}$

$\Lambda(t)=\int_0^t \lambda(u)\,du$

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

Διαδικασία Poisson

Σύνθετη διαδικασία Poisson

ρυθμού λ

$X_1, X_2, \ldots$ ανεξ & ισόνομες τμ. με σκ $F_X(x)$

Άσκηση

Οι ζημιές σε μια ασφ. εταιρεία λόγω αυτοκ. ατυχημάτων

γίνονται σύμφωνα με ομογενή διαδ. Poisson με ρυθμό

30 ατυχήματα ανά μήνα

? χρόνος αναμ. ατυχήματα

Στο 10% των ατυχημάτων εμπλέκεται φορτηγό

90% μόνο ΙΧ

Στα ατυχήματα με φορτηγό, X ύψος ζημιά, X τ.μ. $f_X(x) = \frac{1}{5000} e^{-\frac{x}{5000}}$ $x>0$

" " " ΙΧ, Y " " Y τ.μ. $f_Y(y) = \frac{1}{1000} e^{-y/1000}$

1. Η πιθ. να συμβούν τουλ. 200 ατυχήματα σ' ένα χρόνο
2. " " " " 30 ατυχήματα με φορτηγό, και 270 ατυχήματα με μόνο ΙΧ
3. " " μη συμβεί ατύχημα σ' ένα 15μερο
4. " " να συμβούν 20 ατυχήματα, στα οποία εμπλέκονται μόνο ΙΧ σ' ένα μήνα, δεδομένου ότι σημειώθηκαν 50 συνολικά ατυχήματα
5. Το μέσο ύψος ζημιάς ανά ατύχημα
6. Η διασπορά του ύψους ζημιάς ανά ατύχημα
7. Το μέσο συνολικό ύψος ζημιάς από ατυχήματα σ' ένα χρόνο

t μετριεται σε μηνες , Χρηματα σε ευρώ

$N_1(t) =$ # ατυχ. που εμπλεκεται φορτηγό σε t μηνες

$N_2(t)$ " " μονο με ΙΧ σε t μηνες

$X_1, X_2 \ldots$ τα ύψη ζημιών για ατυχήματα που εμπλ. φορτηγό

$Y_1, Y_2 \ldots$ " " " " με μονο ΙΧ

$Z_1, Z_2, \ldots$ τα ύψη ζημιών ατυχηματων

$\{N_1(t), ; t \geq 0\}$ στοχ. διαδ. Poisson με ρυθμό $30 \cdot \frac{10}{100} = 3$ Το μηνα

$\{N_2(t) ; t \geq 0\}$ " " " $30 \cdot \frac{90}{100} = 27$ "

(i) $P(\underbrace{N_1(12)+N_2(12)}_{N(12)}=200) = e^{-30\cdot 12}\dfrac{(30\cdot 12)^{200}}{200!}$

$N(t)$ στοχ. διαδ. με ρυθμό 30 το μήνα

(ii) $P[N_1(12)=30,\ N_2(12)=270] =$

$P(N_1(12)=30)\cdot P(N_2(12)=270)$

$e^{-3\cdot 12}\dfrac{(3\cdot 12)^{30}}{30!}\cdot e^{-27\cdot 12}\dfrac{(27\cdot 12)^{270}}{270!}$

$P(N(t)=k) = e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}$

(iii) $P(\underbrace{N_1(0,5)+N_2(0,5)}_{N(0,5)}=0) = e^{-30\cdot 0,5} = e^{-15}$

(iv) $P(N_2(1)=20 / N_1(1)+N_2(1)=50) = \dfrac{P(N_2(1)=20,\ N_1(1)+N_2(1)=50)}{P(N_1(1)+N_2(1)=50)}$

$= \dfrac{P(N_2(1)=20,\ N_1(1)=30)}{P(N(1)=50)} = \dfrac{P(N_2(1)=20)P(N_1(1)=30)}{P(N(1)=50)}$

$= \dfrac{e^{-3}\dfrac{3^{20}}{20!}\ e^{-27}\dfrac{(27)^{30}}{30!}}{e^{-30}\ 30^{50}/50!}$

V) $E(Z) = \frac{10}{100} E(X) + \frac{90}{100} E(Y)$

$f_X(x) = \frac{1}{5000} e^{-\frac{x}{5000}} \quad x > 0 \qquad V(X) = 5000^2 \qquad E(X) = 5000$

$f_Y(y) = \frac{1}{1000} e^{-y/1000} \quad y > 0 \qquad E(Y) = 1000 \qquad Var(Y) = 1000^2$

$E(Z) = \frac{10}{100} \cdot 5000 + \frac{90}{100} \cdot 1000 = 1400$

VI $Var(Z) = \frac{10}{100} Var(X) + \frac{90}{100} Var(Y) = \ldots$

VII) $E\left(\sum_{i=1}^{N(12)} Z_i\right) = E(N(12)) \cdot E(Z) = \underbrace{30 \cdot 12} \cdot 1400 = 504.000$

$N(t)$ δ. Poisson $(\lambda t) \qquad E(N(t)) = \lambda t$

$W_i \sim \exp(\lambda) \Longleftrightarrow N(t)$ στ. διαδ. Poisson
ρυθμού λt

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \qquad X_i \text{ ανεξ \& ισον. τμ.}$$

$S(t) =$ Compound Poisson Process

(i) $$M_{S(t)}(t) = e^{\lambda t (M_X(t) - 1)} \qquad M_X(t) < \infty \quad t \in \mathbb{R}$$

$$E(S(t)) = \lambda \cdot t \cdot E(X)$$
$$Var(S(t)) = \lambda t \, E^2(X) + \lambda \cdot t \cdot Var(X) = \lambda \cdot t \, E(X^2)$$

$$P(S(t) \le x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} F^{*(n)}(x) \quad x \in \mathbb{R}$$

$X_1 \; X_2 \ldots$

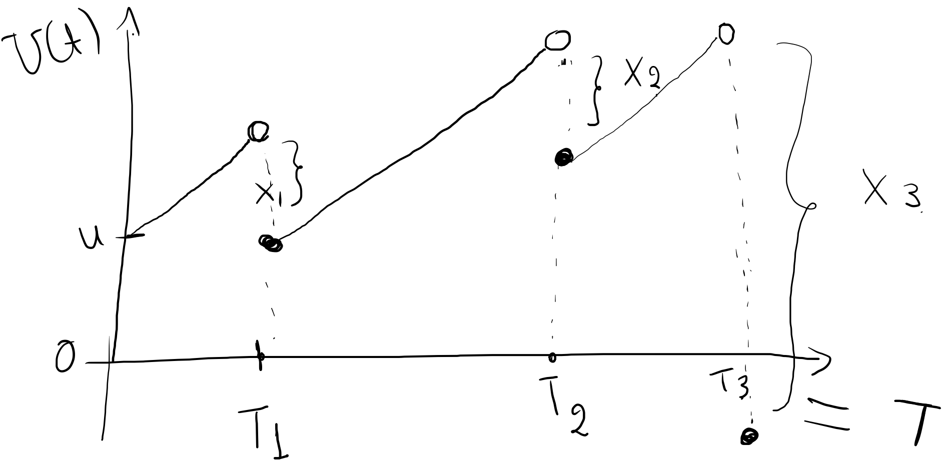
$S(t)$ $\qquad E(S(t))$ $\qquad Var(S(t))$

$$\frac{S(t) - E(S(t))}{\sqrt{Var(S(t))}} = \frac{S(t) - \lambda t E(X)}{\sqrt{\lambda t E(X^2)}} \xrightarrow{d} Z$$

$$Z \sim N(0,1)$$

$$T := \inf\{t \geq 0 \; : \; U(t) < 0\}$$

$$U(t) = u + ct - S(t) \qquad t \geq 0$$



$U(T_3^-)$

$U(T)$

Eor $U(t) \geq 0 \quad \forall \, t \geq 0 \qquad T = \infty$

$T \,/\, U(0) = u. \qquad (\mathcal{F}_T$ - stopping time$)$

$$U(t) = u + ct - S(t)$$

$$E(U(t)) = u + c \cdot t - \lambda \cdot t \cdot E(X) \qquad E(X) = \mu$$

$$E[U(t)] \geq 0 \quad \forall u. \quad \forall t.$$

(γεγονότω)

μεσος ρυθμός αποζημιώσεων στη μο

$$C - \lambda\mu \geq 0$$

$$C \geq \lambda \cdot \mu.$$

μεσο ποσό αποζημιας

μεσο ποσό εισοδων (ασφαλιστρα) στη μοναδα τον χρονου

$$E\left(\text{εσοδων μοναδα χρονου}\right) > E\left(\text{εξοδων μοναδα χρονου}\right)$$

Εαr $c > \lambda \mu$. $\lim_{u \to \infty} \psi(u) = 0$

$c \leq \lambda \mu$. $\psi(u) = 1 \quad u \geq 0$

$C \geq \lambda \mu.$

$C = \lambda\mu + \theta \cdot \lambda\mu$

$$\boxed{C = (1+\theta)\lambda\mu.}$$

θ premium
loading factor.

συντελεστής ασφαλειας

$$\boxed{\theta = \frac{c}{\lambda\mu} - 1}$$

Premium

$P(S) = (1+\theta)\, E(S)$

Ποσοστό κέρδους

$$E(U(t)) = u + ct - \lambda t \mu.$$

$$= u + (1+\theta)\lambda\mu \cdot t - \lambda t \mu$$

$$E(U(t)) = u + \theta \cdot \lambda \cdot \mu \cdot t$$

$$Var(U(t)) = \lambda t(\mu^2 + \sigma^2)$$

$$M_{U(t)}(r) = E[e^{U(t) \cdot r}] = E[e^{(u+ct - S(t)) \cdot r}]$$

$$= e^{u \cdot r + c \cdot t \cdot r} \cdot E[e^{-S(t) \cdot r}]$$

$$= e^{u \cdot r + c \cdot t \cdot r} M_{S(t)}(-r)$$

$$= e^{u \cdot r + c \cdot t \cdot r} e^{\lambda t [M_X(-r) - 1]}$$

Άσκηση

Έστω η κατανομή των αποζημιώσεων στο κλασικό μοντέλο έχει σ.π.π $f_X(x) = \frac{2}{3} x^{-2/3} e^{-2x/3}$ $x \geq 0$

$N(t)$ $CP(\lambda t)$ με ρυθμό $\lambda = 2$

α) Υπολογίστε το c (ένταση ασφαλίστρων) ώστε η χρεοκοπία να είναι βέβαιη.

β) Ποια η μέγιστη τιμή του c ώστε το περιθώριο ασφαλείας $\theta \leq 1$.

$$\begin{cases} \theta = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 \\ c < \lambda\mu \end{cases}$$

α) $C \le \lambda \mu$. $\qquad \lambda = 2$

$\mu = E(X)$ $\qquad X \sim \text{Weibul}(k, a)$

$f_X(x) = \frac{2}{3} x^{-x/3} e^{-2x/3}$ $\qquad f_X(x) = k \cdot a \, (ax)^{k-1} e^{-(ax)^k}$

$E(X) = \frac{1}{a} \Gamma\left(\frac{1}{k} + 1\right)$

$k = 1/3 \quad a = 8$

$E(X) = \frac{3}{4}$

β) $\theta \le 1$ $\qquad \dfrac{C}{\lambda \cdot \mu} - 1 \le 1$ $\qquad \dfrac{C}{\frac{3}{2}} - 1 \le 1$ $\qquad \underline{\underline{C \le 3}}$

$\frac{3}{4} \cdot 2$

X ζημιά $X_1, X_2 \ldots$

$M_X(r) = E(e^{rX}) \quad -\infty < r < \gamma \quad \gamma > 0$

Έστω $\lim_{r \to \gamma^-} M_X(r) = +\infty \quad \mu = E(X)$

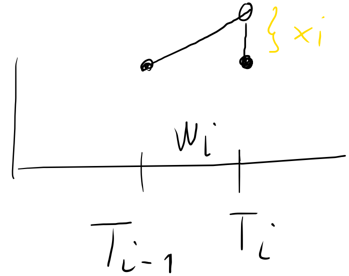
ορίζουμε το <u>συντελεστή Προσαρμογής R</u>

τη θετική λύση της εξίσωσης $M_X(r) = 1 + \frac{c}{\lambda} \cdot r$

ή $M_X(r) = 1 + (1+\theta)\mu \cdot r$

$$Y_i = X_i - cW_i$$

Έξοδα Έσοδα



Y_i $\quad i = 1, 2 \ldots$ ισονομείς

(κάτω από τις υποθέσεις μας)

$$ct - \sum_{i=1}^{N(t)} x_i$$

$\{x_i\}, \{w_i\}$ ανεξ.

$$M_Y(r) = E\left(e^{(X-cW)r}\right) =$$

X,W ανεξ.

$$= E\left(e^{X\cdot r}\right) \cdot E\left(e^{-cW\cdot r}\right) \overset{W \sim exp(\lambda)}{=}$$

$$= M_X(r) \cdot M_W(-cr) = M_X(r) \cdot \frac{\lambda}{\lambda + c\cdot r}$$

R θετ. λύση της $M_Y(r) = 1$

Συνθήκη του Lundberg

$$\psi(u) = P(T < \infty \mid U(0) = u)$$

$$P(\exists i : T_i = T \mid U(0) = u)$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό u.