$2^{\underline{\eta}}$ ώρα ☺

Έστω n ασφαλισμένοι, μ ίδια συν. ωφελιμότητας

$i = 1 \dots n$. μ με παράμετρο λ_i

$$P(S_i) = \frac{1}{\lambda_i} \log M_{S_i}(\lambda)$$

S_i ο κίνδυνος του i-ασφαλισμένου

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} \log E(e^{\lambda_i S_i})$$

$$S = S_1 + \dots + S_n$$

$\uparrow$?

για ποια $S_1, \dots S_n$ ώστε P ελαχιστοποιηθεί

$$S = \underline{\underline{\tilde{S}_1}} + \dots + \underline{\underline{\tilde{S}_n}} \qquad \tilde{S}_i = \frac{\lambda}{\lambda_i} S \qquad \frac{1}{\lambda} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i}$$

$$\tilde{P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} \log E(e^{\lambda_i \tilde{S}_i}) \leq P$$

Εφαρμογή $n = 2$

Ασφάλιστρο με αρχή (τροποποιημένη) μαθηματική ελπίδα

$$P(X) = (1+\theta)E(X)$$

θ premium load factor

Περιθώριο ασφαλεία

Ατομικό πρότυπο $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$\theta = \;;$

$$P(S > (1+\theta)E(S)) = a$$

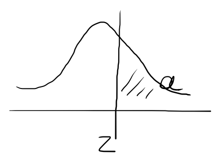
a μικρό

θέλω

ΚΟΘ : $\frac{S-E(S)}{\sqrt{Var(S)}} \xrightarrow{d} N(0,1)$ $\quad P\left(\frac{S-E(S)}{\sqrt{Var(S)}} \le x\right) \simeq \Phi(x)$ $\quad n>30$

σκ. $N(0,1)$

άρα $P\left(\underbrace{\frac{S-E(S)}{\sqrt{Var(S)}}}_{Z} > \underbrace{\frac{\theta \cdot E(S)}{\sqrt{Var(S)}}}_{Z_a}\right) = a$



$\frac{\theta \cdot E(S)}{\sqrt{Var(S)}} = Z_a$ ή $\theta = Z_a \frac{\sqrt{Var(S)}}{E(S)}$

a μικρό

$\frac{\sqrt{Var(S)}}{E(S)}$ συντελεστής διακύμανσης της S

(Ατομικό) Άσκηση

$P(I_i=1)$

Έστω $\underline{\underline{500}}$ ανεξ. & ισόνομοι κίνδυνοι

με πιθανότητα πραγματοποίησης $q_i = 0{,}01$

και κατανομή ατομικής αποζημίωσης

$$X_i \sim \underset{\text{σππ}}{f(x)} = \begin{cases} \frac{4}{5} \cdot \underbrace{\frac{6}{4} 10^{-12} \sqrt{x}} & \text{συνεχή } 0 \le x \le 10^8 \\ \frac{1}{5} \quad \underbrace{1} & \text{διακριτό } x = 10^8 \end{cases}$$

Μεικτή

$$\frac{\sqrt{Var(S)}}{E(S)}$$

$$E(S) = n \cdot q \cdot \mu$$

$$V(S) = \mu^2 n \cdot q(1-q) + \sigma^2 n q$$

$\mu = E(X) \quad \sigma^2 = Var(X)$

$$E(X) = \int_0^{10^8} x \cdot \underbrace{\frac{4}{5}\frac{6}{4} 10^{-12} \sqrt{x}}\, dx + 10^8 \cdot \frac{1}{5} = \frac{17}{25} 10^8$$

$$E(X^2) = \int_0^{10^8} x^2 \frac{4}{5} \frac{6}{4} 10^{-12} \sqrt{x}\, dx + 10^{16} \frac{1}{5} = \frac{19}{35} 10^8$$

$$\mu = \frac{17}{25} 10^8 \qquad \sigma^2 = E(X^2) - E^2(X) = \frac{352}{4375} 10^6$$

$$E(S) = 500 \cdot 0{,}01 \cdot \frac{17}{25} 10^8$$

$$V(S) = 500 \; 0{,}01 \cdot 0{,}99 \cdot \left(\frac{17}{25} 10^8\right)^2 + 500 \cdot 0{,}01 \cdot \frac{352}{4375} 10^6$$

$$\frac{\sqrt{Var(S)}}{E(S)} \simeq 0{,}48$$

θ ? $\qquad P(S) = (1+\theta) E(S)$

$$P(S > P(S)) = a = 0{,}05$$

$$\theta = \underbrace{Z_{0,05}}_{a} \cdot \frac{\sqrt{Var(S)}}{E(S)} = 1{,}645 \cdot 0{,}48 = \ldots$$

Ασκηση

Για $p, \varepsilon \in (0,1)$ δεδομένα, να υπολογιστεί το ασφάλιστρο μέγιστης απώλειας σε κίνδυνο X με πυκνότητα

α) $f(x) = e^{-x}$ $x>0$

β) $f(x) = \dfrac{a}{(1+x)^{a+1}}$ $x>0$, $a>1$

Λύση

$P_{p,\varepsilon}(X)$

$$\Pi_{p,\varepsilon}(X) = p \cdot E(X) + (1-p)\xi_\varepsilon$$

$$\xi_\varepsilon = \inf\{x : P(X > x) \le \varepsilon\}$$

$$\left(\delta = \inf\{x : P(X \le x) = 1\} \right.$$

$$E(X), \quad \xi_\varepsilon$$

α) $E(X) = \int_0^\infty x e^{-x} dx = 1$

Έστω $x>0$ $\quad P(X>x) = \int_x^\infty f(t)dt = \int_x^\infty e^{-t} dt = e^{-x}$

$$\xi_\varepsilon = \inf\{x : \underbrace{P(X>x)}_{e^{-x}} \leq \varepsilon\}$$

$$e^{-x} \leq \varepsilon \iff x \geq \log\frac{1}{\varepsilon} \qquad \xi_\varepsilon = \log\frac{1}{\varepsilon}$$

$$P_{p,\varepsilon} = p \cdot 1 + (1-p)\log\frac{1}{\varepsilon}$$

(β)

(β) $E(X) = \int_0^{\infty} x \frac{a}{(1+x)^{a+1}} = \frac{1}{1-a} \quad a>1$

Για $x>0$

$$P(X>x) = \int_x^{\infty} \frac{a}{(1+t)^{a+1}} dt = (1+x)^{-a}$$

$$(1+x)^{-a} \leq \varepsilon \iff x \geq \varepsilon^{-1/a} - 1$$

$$\zeta_\varepsilon = \varepsilon^{-1/a} - 1$$

$$P_{p,\varepsilon}(X) = p \cdot \frac{1}{1-a} + (1-p)\, \varepsilon^{-1/a} - 1$$

S.3.1 $X \sim exp(1)$ Premium ;

S.3.3.

S.3.7.

S.3.16 ♡

Μέτρα Κινδύνου

$\underset{\text{Τμ}}{S} \longrightarrow m(S)$

→ Premium

→ $E(S)$ $\quad\quad\quad \sup(S)$

→ $Var(S)$
- $Var(S) = Var(-S)$
- $P(|S-E(S)| \geq z) \leq \dfrac{Var(S)}{z^2}$
- $S \leq S'$ $\quad Var(S) > Var(S')$ (πχ S' σταθερά)

→ $Var_+(S) = \int_{\mu}^{\infty} (x-\mu)^2 \, dF_X(x)$

→ ! Η ουρά της κατανομής (Να μη χαθεί μεγάλο ποσό)

→ χρεοκοπία

Το πιο συχνό μετρο κινδυνου στη πράξη

Value-at-Risk   VaR

σε κάποιο επίπεδο εμπιστοσύνης p   V@R

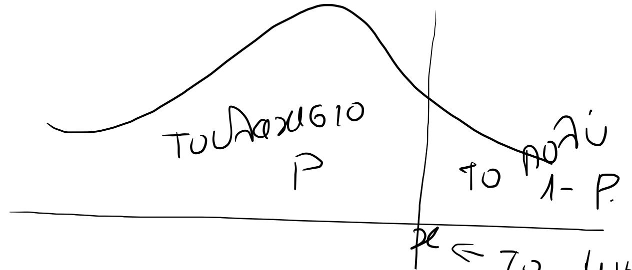
Confidence level

$$\text{Value}(S,p) = \inf\{x : \overbrace{F_S(x)}^{= P(S \le x)} \geq p\}$$

$$= \inf\{x : P(S > x) \leq 1-p\}$$

Εκφράζει το "μικρότερο ποσό" για το οποίο η πιθανότητα η S να το ξεπεράσει να είναι το πολύ 1-p

$S \sim N(\mu, \sigma^2)$



$x \Leftarrow$ το μικρότερο $=$ $VaR(S, p)$

Έστω F αύξουσα $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$F^{\leftarrow}(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_S(x) \geq y\}$$

Ποσοστιαία συνάρτηση της F.

Εάν $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ σ.κ.

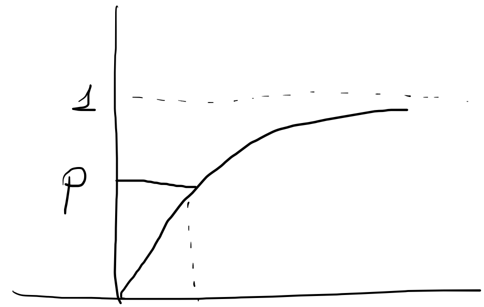
$F^{\leftarrow}(p)$ το p-ποσοστιαίο σημείο της F.

$$VaR(S,p) = F^{\leftarrow}(p)$$

$F^{\leftarrow}$ αύξουσα & αριστερά συνεχής

F συνεχής και γνησίως αύξουσα.

$$F^{*} = F^{-1}$$



$$F^{-1}(p) = x_p$$

F συνεχής $\quad P(S \geq x_p) = 1 - p$

$$P(S \leq x_p) = p$$

$i \cdot d + E[(S-d)_+]$. total cost.

Εζύσιο

d optimal $\to \mathrm{VaR}(S; 1-i]$.

πχ Για

$$S = \begin{cases} 0 & \text{με πιθ } 0{,}85 \\ 10 & 0{,}10 \\ 50 & 0{,}045 \\ 1000 & 0{,}005 \end{cases}$$

$\qquad\qquad\qquad\qquad 1$

$VaR(S,p)$

$p = 0{,}99 \quad 99\%$

$p = 95\%$

$p = 0{,}90$

$p = 0{,}80$

$$VaR(S,p) = \inf\{x : \underbrace{P(S \le x)}_{F_S(x)} \ge p\}$$

x	$F_S(x)$
0	0,85
10	0,95
50	0,995
100	1

$p = 0{,}99 \quad x_0 ; \quad P(S \le x_0) = 0{,}99$

Το μικρότερο x με την ιδιότητα

$P(S < x) \ge 0{,}99$

$VaR(S, 0{,}99) = 50$

$VaR(S, 0{,}95) = 10$

$VaR(S, 0{,}90) = 10$

$VaR(S, 0{,}80) = 0$

$\underline{\underline{\text{nx}}}$ $S \sim N(33, 109^2)$ $p = 95\%$ $VaR(S, p)$

$\in \mathbb{R}$
x_0 τω $P(S \leq x_0) = 0{,}95$

$$P\left(\frac{S-33}{109} \leq \frac{x_0-33}{109}\right) = 0{,}95$$

$$\Phi\left(\frac{x_0-33}{109}\right) = 0{,}95$$

$$\frac{x_0-33}{109} = \Phi^{-1}(0{,}95) = 1{,}6449$$

$x_0 = 212{,}29$;

$$VaR(S, 0{,}95) = 212{,}29$$

$\underline{\underline{Πχ}}$ $S \sim \exp(2)$ $\quad (0,\infty) : \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$

$F_S(x) = 1 - e^{-2x} \quad x > 0$

$x_0 :$ τω $P(S \leq x_0) = p$ ή $1 - e^{-2x_0} = p$

ή $x_0 = -\frac{1}{2}\log(1-p) \quad p \in (0,1)$

$p = 0 \quad VaR(S, 0) = -\infty$

$p = 1 \quad VaR(S, 1) = +\infty$

Επιθυμητές ιδιότητες

1. translation invariance $m(S+c) = m(S) + c$
2. Monotonicity $S \le S'$ $m(S) \le m(S')$
3. Positive homogenicity $m(cS) = c\,m(S)$, $c \ge 0$
4. Subadditivity $m(S+S') \le m(S) + m(S')$

Coherent

συνεπές

Η VaR ικανοποιεί τα $\boxed{1} - \boxed{3}$

VaR δεν είναι υποπροσθετική!

αντιπαράδειγμα → 5.64 Kaas

$S, T \sim \text{Pareto}(1,1)$ ανεξάρτητες $p \in (0,1)$

$$VaR(S+T; p) > VaR(S; p) + VaR(T; p)$$

? συνέλιξη!

Expected shortfall (ES)

μετραει "how bad is bad"

$$ES(S;p) = E\left[(S - VaR(S,p))_+\right]$$

net stop loss premium $\qquad E(X-d)_+$

ES ? ιδιότητες.