Να έχουμε μαζί μας πινακάκι με κανονικές
Να δω π.χ.

20/11/2021

Άσκηση. Βιβλίο.
Ι Πρακτικ.

4/11/2021 - 4ο Μάθημα

• Αν τα θεωρητικά που έχουμε δει τα έχουμε καλύψει, εδώ τα διαβάζουμε. Κυρίως από εδώ και βοηθητικά το βιβλίο.

Συλλογικό Μοντέλο

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

N: # ζημιών (άγνωστο)

X_i: κόστος κάθε ζημιάς

$X_i \sim F$

$$F_S(x) = \sum \underbrace{P(S_N \leq x / N=n)}_{F^{*(n)}(x)} \cdot P(N=n)$$

$F^{*(n)}(x)$: n-οστή συνέλιξη της F.

Ροπογεννήτρια

$$M_S(t) = P_N(M_X(t))$$

Να το εφαρμόσουμε σε αυτές

$N \sim Poisson(\lambda) \to S \sim$ Compound Poisson(λ, F), $CP(\lambda, F)$

$E(N) = Var(N) = \lambda$

$\frac{Var(\lambda)}{E(N)} = 1$ ← εκτίμηση υπο διασπορά

Αν $\simeq 1$ εκτιμώ με $N \sim Poisson$

Αν $Var(\lambda) > E(N)$ εκτιμώ με $N \sim Neg\ Binomial(r,p)$

Επίσης μπορεί $N \sim Geom(p)$

Επίσης να δοκιμάσουμε με $X \sim exp(\theta)$.

Έστω $N \sim Geom(p)$ (# αποτ. μέχρι 1η επιτ.). $P(N=n) = (1-p)^n \cdot p$

$E(N) = \frac{1-p}{p}$

$Var(N) = \frac{1-p}{p^2}$

$$P_N(u) = \sum_{n=0}^{\infty} u^n \cdot P(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{u^n (1-p)^n}_{(u(1-p))^n} \cdot p = \frac{1}{1-(1-p)u}$$

$|u| < \frac{1}{1-p}$

$X \sim F$

$S \sim$ Compound Geometric (p, F)

$(S = X_1 + \dots + X_N)$

$$M_S(t) = \frac{p}{1-(1-p)M_X(t)} \qquad E(S) = E(N) \cdot E(X) = \frac{1-p}{p} \cdot E(X)$$

$$E(X)=\mu \qquad Var(X)=\sigma^2$$

$$Var(S) = Var(N)\cdot E^2(X) + E(N)\cdot Var(X)$$
$$= Var(N)\cdot \mu^2 + E(N)\cdot \sigma^2 =$$
$$= \frac{1-p}{p^2}\mu^2 + \frac{1-p}{p}\cdot \sigma^2$$

Πρέπει να μας δίνεται το N να μπορούμε να βρούμε $M_S(t)$, $E(S)$ και $Var(S)$ και ειδικά για δοσμένο X όπως:

Εφαρμογή $X \sim exp(\lambda)$

$f_X(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}, \quad x>0$

$M_X(t) = E(e^{tX}) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad t<\lambda$ απόδ. σελ.

$$M_S(t) = \frac{p}{1-(1-p)\frac{\lambda}{\lambda-t}} = \frac{p(\lambda-t)}{p\lambda - t}$$

$t<\lambda p<\lambda$ (τωρινή προϋπόθεση / αρχική προϋπόθεση)

$$M_S(t) = \frac{\lambda p - p\cdot t}{\lambda p - t} = p + (1-p)\cdot\frac{\lambda p}{\lambda p - t} =$$

$$= p\cdot 1 + (1-p)\cdot \frac{\lambda p}{\lambda p - t}$$

πιθανότητα επιτ. p — πιθανότητα αποτυχίας $(1-p)$

(π.χ. κορώνα παίρνω 1€, γράμματα παίρνω $\frac{\lambda p}{\lambda p - t}$ €.)

$S = $ → Y_1, με πιθ. $p = P(N=0)$ → από $P(N=n) = (1-p)^n \cdot p$

→ Y_2, με πιθ. $1-p$.

$Y_1 = 0$ με πιθ. 1 $\quad (P(Y_1=0)=1)$

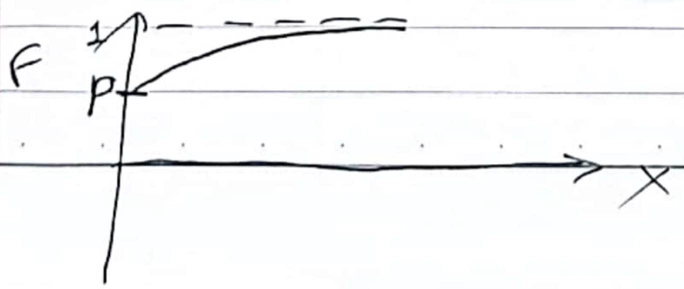
$Y_2 \sim exp(\lambda p)$

Y_1: ποιό θα είναι η S μου αν δεν έχω ζημιά

S Μικτή Κατανομή — Y_1 διακριτή, Y_2 συνεχής

$$F_S(x) = p\cdot 1 + (1-p)\cdot\left(1-e^{-\lambda p x}\right)$$

↑ Αθρ. Εκθετ. με παραμ. λp.



π.χ. αριθμό ατυχημ. γενικότερα ζημι αλλά σε πιο π.χ. μηχανών και έχω το λ τους έχω ότι ακολουθεί Poisson(λ) Λάμδα

Είναι παραμ. το λ αλλά δεν το ξέρω. Είναι π.χ. Poisson αλλά με ποιο λ δεν γνωρίζω

Κατανομή της $N(\Lambda)$, Λ τ.μ. με συν. πυκν. πιθαν. $u(\lambda)$, $\lambda>0$ (συνήθως)

Όμως γνωρίζω ότι $N|(\Lambda = \lambda) \sim Poisson(\lambda)$ (για την N ανεξαρτήτως) δεσμευμένη τ.μ.

$E(N|\Lambda) = \Lambda$ $Var(N|\Lambda)=\Lambda$

$$P(N=n) = \int_0^\infty P(N=n|\Lambda=\lambda)\cdot u(\lambda)\cdot d\lambda = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^n}{n!}u(\lambda)$$

σ.π.π

Θ.Ο.Π. $P(A) = P(A|B)\cdot P(B) + P(A|B^c)\cdot P(B^c)$

Γενικά: $= P(A|B_1)\cdot P(B_1) + P(A|B_2)\cdot P(B_2) + \dots + P(A|B_n)\cdot P(B_n)$

π.χ. $P(X=3) = P(X=3|Y=0)\cdot P(Y=0) + P(X=3|Y=1)\cdot P(Y=1) + \dots$

$$f_X(x) = \int f_{X|Y}(x|y)\cdot f_Y(y)\,dy$$

$E(N) = E[E(N|\Lambda)] = E(\Lambda)$

Θεωρ. Διπλής.

$Var(N) = E(Var(N|\Lambda)) + Var(E(N|\Lambda)) = E(\Lambda) + Var(\Lambda)$

Έστω $N\sim Poisson$, $N^* = 2N \not\sim Poisson$ π.χ. # ζημιών

$E(N) = \lambda$

$Var(N) = \lambda$

$E(N^*) = E(2N) = 2E(N) = 2\lambda$

$Var(N^*) = Var(2N) = 4Var(N) = 4\lambda$

$2\lambda \neq 4\lambda$ άρα δεν είναι Poisson.

$N = 0,1,2,3$

$N^* = 0,2,4,6,\dots$

$C \cdot N \sim Compound\ Poisson(\lambda, F)$ σταθ.

$$= \underbrace{C + C + C + \dots + C}_{N} = \sum_{i=1}^{N} C$$

με $F = (X\le x) = \begin{cases} 0, & x<c \\ 1, & x\geq c. \end{cases}$

$P(X=c) = 1$

Κλάδος Ζημιών αυτοκινήτων

$S_{(1)} = X_{11} + \dots + X_{1N_1}$ $\quad N_1 = \#$ ζημιών αυτοκινήτων

Κλάδος Πυρκαγιά

$S_{(2)} = X_{21} + \dots + X_{2N_2}$ $\quad N_2 = \#$ ζημιών πυρκαγιάς

Κλάδος Ναυαγίων

$S_{(3)} = X_{31} + \dots + X_{3N_3}$

Έστω ότι:

$$\left.\begin{array}{l} S_{(1)} \sim CP(\lambda_1, F_1) \\ S_{(2)} \sim CP(\lambda_2, F_2) \\ \vdots \\ S_{(m)} \sim CP(\lambda_m, F_m) \end{array}\right\} S = S_{(1)} + \dots + S_{(m)} \sim CP(\lambda, F)$$

θα μπορούσε $m = \#$ κλάδων

π.χ. $S_{(1)}$ = 10 εβ.

$S_{(2)}$: 20 εβ. κτλ.

ανεξάρτητες

(π.χ. μεγ. διαστήματα λόγω ανατοκισμών)

$$\lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$$

$$F = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda} \cdot F_i$$

Παράδειγμα

π.χ. ζημ. αυτ. $\to S_{(1)} \sim CP(10, F_1)$ $\quad F_1(x) = 1 - e^{-x}, x \geq 0$

π.χ. πυρκαγ. $\to S_{(2)} \sim CP(15, F_2)$ $\quad F_2(x) = 1 - e^{-x}(1+x), x \geq 0$

ανεξάρτητες οι $S_{(1)}, S_{(2)}$

Βρείτε κατανομή της $S_{(1)} + S_{(2)}$.

$$S_{(1)} + S_{(2)} \sim CP(\underbrace{25}_{10+15}, F)$$

$$F(x) = \frac{10}{25} \cdot F_1(x) + \frac{15}{25} \cdot F_2(x) =$$

Scanned with CamScanner

$$= \frac{10}{25} \cdot (1-e^{-x}) + \frac{15}{25} \cdot (1-e^{-x}(1+x)) =$$

$$= 1-e^{-x}\left(1+\frac{3}{5}\cdot x\right)$$

Διακριτή

Έστω $S = \sum_{i=1}^{N} X_i \sim CP(\lambda, (\Pi_k))$

$\Pi_k = P(X = x_k)$

$\sum_{k=1}^{m} \Pi_k = 1$

$S = x_1 N_1 + \dots + x_m \cdot N_m$ (πόσες φορές το x_1 ... πόσες φορές το x_m)

(Το ποσό που θα πληρώσω είναι η x_1 ή x_2 ή x_3 ή ... ή x_k)

$N_1, \dots, N_m$ ανεξάρτητες

$N_k \sim Poisson(\lambda_k)$ $\lambda_k = \lambda \cdot \Pi_k$ μέρος Π_k

$k = 1, \dots, m$

Αν η σύνολο των ζημιών Poisson τότε όλες οι απορ. π.χ. του x_1 δηλ. η N_1, ..., του x_m δηλ. η N_m είναι και αυτές Poisson.

Εφαρμογή

Έστω $S \sim CP(4, (\Pi_k))$

$P(X=1) = 1/4$ $P(X=2) = 1/2$ $P(X=3) = 1/4$

ποσό που θα δώσω για αποζημίωση

Γράψτε την S ως γρ. συνδυασμό ανεξ. τ.μ. $\sim$ Poisson και να υπολογίσετε την κατανομή του $P(S=0)$, $P(S=1)$, $P(S=2)$ ...

4 ζημιές του 1€ ή 1 ζημιά του 2€

ζημιών

$$S = X_1 + \dots + X_N \qquad N \sim Poisson(4)$$

$E(N) = 4 \doteq$ περιμένω να συμβούν 4 γεγονότα.

$j = 1, 2, 3, 4, \dots$

$$E(S) = E(N) \cdot E(X) = 4 \cdot 2 = 8\text{ €}$$ θα πληρώσω κατά Μ.Ο.

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{4} + \cancel{2 \cdot \frac{1}{2}} + 3 \cdot \frac{1}{4} = 2$$

$S \sim CP(\lambda, \text{Διακριτή})$

Το μετατρέπουμε σε άπειρο άθροισμα $P(S=0), P(S=1), P(S=2), P(S=3) \dots$

$$S = x_1 \cdot N_1 + x_2 \cdot N_2 + x_3 \cdot N_3 = N_1 + 2N_2 + 3 \cdot N_3$$

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$$

$$N_1 \sim Poisson(\underbrace{\lambda \cdot n_1}_{4 \cdot 1/4}) = Poisson(1) \quad P(N_1 = n) = \frac{e^{-1} \cdot 1^n}{n!} = \frac{e^{-1}}{n!}$$

$$N_2 \sim Poisson(\underbrace{\lambda n_2}_{4 \cdot \frac{1}{2}}) = Poisson(2) \quad P(N_2 = n) = \frac{e^{-2} \cdot 2^n}{n!}$$

$$N_3 \sim Poisson(\underbrace{\lambda n_3}_{4 \cdot \frac{1}{4}}) = Poisson(1) \quad P(N_3 = n) = \frac{e^{-1}}{n!}$$

Θα βρω των 2 πρώτων μαζί και μετά θα δω τι θα κάνω με τον 3ο.

$$\sum_{u \le n} P(N_1 = u) \cdot P(2N_2 = n-u)$$ συνέλιξη

παίρνω όλα τα ζευγάρια

$0, 2, 4, 6, 8$ $\quad P(N_2 = \frac{n}{2})$

n	$P(N_1 = n)$	$P(2N_2 = n)$	$P(N_1 + 2N_2 = n)$
0	e^{-1}	e^{-2}	e^{-3}
1	e^{-1}	—	e^{-3}
2	$e^{-1}/2$	$2 \cdot e^{-2}$	$e^{-1}/2 \cdot e^{-2} + e^{-1} \cdot 2 \cdot e^{-2}$
3			$= e^{-3} \cdot \frac{5}{2}$
4			

$P(N_1 + 2N_2 = 0) = P(N_1 = 0) \cdot P(2N_2 = 0)$

$P(N_1 + 2N_2 = 1) = \cancel{P(N_1 = 0) \cdot P(2N_2 = 1)} + P(N_1 = 1) \cdot P(2N_2 = 0) = e^{-1} \cdot e^{-2} = e^{-3}$

$P(N_1+2N_2=n)$ $\qquad$ $0, 3, 6, 9$ $\qquad$ $P\left(N_3 = \frac{n}{3}\right)$

+, από πριν

Μετά κάνω νέες στήλες:

	$P(3N_3 = n)$	$P(S=0)$
0	e^{-1}	e^{-4}
1	—	e^{-4}
2	—	⋮
3	e^{-1}	
4		
⋮		

πάω και άλλο (ας γίνει ως το 4)

Ωραία Άσκηση.