30/10/2021 - 3η Μάθημα

Στρίψαμε
$\delta = 50$
επειδή
$U(0,100)$

Θεωρία Κινδύνου

Για τον ασφαλιστή κοιτάμε!

Χαρτοφυλάκιο (προσδ. τις συνολικές αποζημιώσεις που θα του τύχουν να πληρώσει)
του ασφαλιστή

Premium (ασφάλιστρο που παίρνει ο ασφαλιστής)

$S_t = S(t)$ συνολική αποζημίωση σε διάστημα $[0,t]$

είδος στοχ. ανέλιξης - ζημιοανέλιξη

Premium

είδος στοχ. ανέλ.

$P(t)$ συνολικό ασφάλιστρο στο $(0,t]$

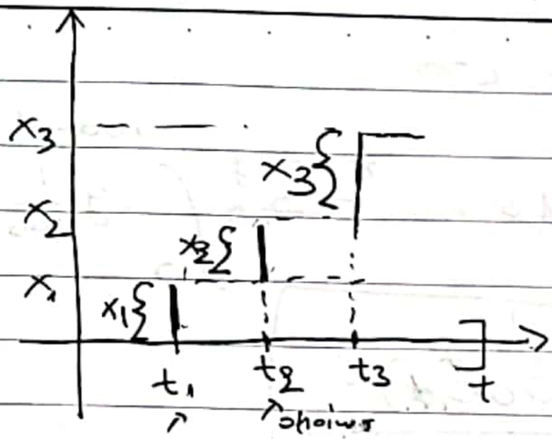
$\{P(t), t \geq 0\}$ στοχαστική ανέλιξη

Μελετώ το ζεύγος $(P(t), S(t))$ ← πάλι είδος Ανέλιξης Risk Process

και ειδικά το:

$P(t) - S(t)$

$X_i = X_{t_i}$



$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_{t_i}$$

$N(t)$ = αριθμός ζημιών στο διάστ. $(0,t]$ και λέγεται επειδή τυχαία.

$$S(t) = X_1 + X_2 + \dots + X_{N(t)}$$

Μια χρονική περίοδος $(t=1)$ ← π.χ. ένας χρόνος ή ένα εξάμηνο (γενικά βραχύ διάστημα που δεν αλλάζουν τα κίνητρα)

$$S = \begin{cases} X_1 + \dots + X_N \\ 0 \end{cases}$$

2.

Σελ. 9 να ρωτήσω.

Σ μοντέλα κινδύνων

Ατομικό Μοντέλο

$N = n$ (σταθερό)

↑ σταθ. πελάτες που έχει κάνει ή που η συμβόλαια το πλήθος. Ή για τη ίδια ζημιά π.χ. όλες οι ασφ. από φλόγα τους πελάτες (100).

$S_n = Y_1 + \dots + Y_n$

$X_i \sim F$ X_i ανεξ.

$Y_i = I_i X_i$

I_i = δείκτρια $\begin{cases} 1 & \text{εφ. συμβεί} \\ 0 & \text{αν δεν συμβεί} \end{cases}$

Συλλογικά Μοντέλα

τυχαίοι όροι (δεν ξέρω πόσα)

N τ.μ. ανεξ. των κινδύνων X_i

X_i ανεξ. ισόνομες

$S_N = X_1 + \dots + X_N$

↳ actual claims

Μετράει το χαρτοφυλάκιο ενός ασφαλιστή

Ατομικό Μοντέλο Κινδύνου

n κινδύνους / ζημιογόνα γεγονότα

Το i-ζημιογόνο γεγονός έχει αποζημίωση X_i, $i=1,\dots,n$

X_i ανεξ. τ.μ. $X_i \sim F_i$ X_i όχι κατ' ανάγκη ισόνομες

$\mu_i = E(X_i)$ $\underbrace{\quad \sigma_i^2}_{\text{γνωστά}} = Var(X_i)$

Έστω ότι γεγονός i συμβαίνει με πιθανότητα q_i.

$$I_i = \begin{cases} 1, & \text{συμβαίνει το γεγονός } i \text{ με πιθ. } q_i \\ 0, & \text{δεν συμβαίνει το γεγονός } i \text{ με πιθ. } 1-q_i \end{cases}$$

$I_i \sim Bernoulli(q_i)$ ανεξ. με $q_i = E(I_i)$

$q_i(1-q_i) = Var(I_i)$

$X_1, X_2, \dots, X_n, I_1, \dots, I_n$ όλες ανεξ. μεταξύ τους

Ποσό αποζημίωσης για το i γεγονός $Y_i = I_i \cdot X_i$

Συνολικό Ποσό $S = \sum_{i=1}^{n} I_i X_i = \sum_{i=1}^{n} Y_i$

Από Πιθανότητες:

Έστω Y τ.μ. με $Y = I \cdot X_1 + (1-I)\cdot X_2$

X_1, X_2, I ανεξ. και I διακριτή τ.μ. με

$$I = \begin{cases} 1 & P(I=1) = q \quad 0 \le q \le 1 \\ 0 \end{cases}$$

← Σελ 6[illegible]7

Πάντα έτσι $Y = X_1$ ή $Y = X_2$

Έτσι η $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(Y \le y, I=1) +$
$+ P(Y \le y, I=0) =$
$= P(Y \le y \mid I=1) \cdot P(I=1) + P(Y \le y \mid I=0) \cdot P(I=0) =$
$= P(X_1 \le y) \cdot q + P(X_2 \le y)(1-q)$

$F_Y(y) = F_{X_1}(y) \cdot q + F_{X_2}(y)(1-q)$ κυρτός συνδυασμός κατανομών

Εάν X_1 διακριτή, X_2 συνεχής $\Rightarrow$ Y μικτή κατανομή.

ποσό X_1 αν συμβεί
ποσό X_2 αν δεν συμβεί.

$$T = q \cdot X_1 + (1-q) \cdot X_2$$ κυρτός συνδυασμός τ.μ.

$$\boxed{\begin{cases} 0 < a < 1 \\ z = a \cdot z_1 + (1-a) z_2 \end{cases}}$$ κυρτός συνδ. των z_1, z_2

$z_1 \quad z \quad z_2$

<u>Παράδειγμα</u>

Ασφάλεια που πληρώνει ποσό b αν το ποσοστό έχει πετύχει κλοπή. Έστω η πιθανότητα κλοπής είναι q.

$$Y = I \cdot X = I \cdot b \qquad I \sim \text{bernoulli}(q)$$

$$Y = I \cdot b + (1-I) \cdot 0 \qquad I \begin{cases} 1 & \text{κλοπή} \\ 0 & \text{όχι κλοπή} \end{cases}$$

$$E(Y) = E(I) \cdot E(X_1) = b \cdot q$$

$$Var(Y) = Var(b \cdot I) = b^2 \cdot Var\, I = b^2 \cdot p \cdot q$$ (βλ. λύση παράδ. 2.2.3)

<u>Υπενθύμιση</u>

$$Var(X|Y) = E(X^2|Y) - \left(E(X|Y)\right)^2$$

$$E[E(X|Y)] = E(X)$$ Νόμος ολικής μέσων τιμών.

$$Var(X) = Var(E(X|Y)) + E(Var(X|Y))$$ Νόμος ολικής διασποράς.

$$Var(X_1 + \dots + X_n) \overset{\text{ανεξ.}}{=} Var(X_1) + Var(X_2) + \dots + Var(X_n)$$

Γενικά

$Y = \underset{\text{διακριτή τ.μ. Bernoulli}}{I} \cdot X \qquad I, X$ ανεξ.

$E(I) = q \quad Var(I) = q(1-q)$

$E(X) = \mu \quad Var(X) = \sigma^2$

$E(I \cdot X)$

$E(Y) \overset{\text{ανεξ.}}{=} E(I) \cdot E(X) = \mu \cdot q$

$Var(Y) = Var(I \cdot X) = E(I^2 X^2) - E^2(I \cdot X) \overset{I, X \text{ ανεξ.}}{=}$

$= E(I^2) \cdot E(X^2) - (E(I) \cdot E(X))^2 =$

$= E(I)(Var(X) + E^2(X)) - E^2(I) \cdot E^2(X) =$

$= q(\sigma^2 + \mu^2) - q^2 \mu^2 = \mu^2 q(1-q) + \sigma^2 \cdot q$

Θεώρημα

Ατομικό μοντέλο κινδύνου (q_i, μ_i, σ_i^2)

πιθ. να συμβεί το γεγ. i

μέση τιμή αποζ.

διακύμανση αποζ.

$i = 1, 2, \dots, n$

$S = \sum_{i=1}^{n} I_i \cdot X_i$

$E(S) = \sum_{i=1}^{n} q_i \cdot \mu_i$

$Var(S) = \sum_{i=1}^{n} q_i \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} q_i (1 - q_i) \cdot \mu_i^2$

(Για να βρώ την κατανομή του S χρειάζεται συνέλιξη ή ροπογεννήτριες

δύσκολο σχετικά υπολογιστικά)

αν X_i ισόνομες $\mu_i = \mu \quad \sigma_i^2 = \sigma^2 \ \forall i$

$E(S) = \mu \cdot \sum_{i=1}^{n} q_i$

$Var(S) = \sigma^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} q_i + \mu^2 \sum_{i=1}^{n} q_i (1 - q_i)$

• Αν X_i ισόνομες, I_i ισόνομες $I_i \sim$ Bernoulli(q)

$E(S) = n \cdot \mu \cdot q$

$Var(S) = n \cdot q \cdot \sigma^2 + n \mu^2 q(1-q)$

Μέση αποζημίωση

Αθρ. Δεικτριών

Ο αριθμός των γεγονότων που συμβαίνουν $\sum_{i=1}^{n} I_i$

$m = E\left(\sum_{i=1}^{n} I_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(I_i) = \sum_{i=1}^{n} q_i$

συνολ. πλήθος ζημιογόνων γεγονότων

$E(S)$ ← Αναμενόμενο συνολικό ποσό αποζημίωσης σε χρονικό διάστημα μιας περιόδου.

m ← Συνολ. πλήθος γεγον. που αναμένουν να συμβούν

Πως θα υπολογίζω την ακριβή κατανομή αθροίσματος τυχαίων μεταβλητών

Έστω X_1, X_2 (f_1, f_2) τ.μ. ανεξάρτητες   συνέλιξη

X_1, X_2 συνεχείς, $Z = X_1 + X_2$ $f_1 * f_2$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x)\, f_{X_2}(z-x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_2}(y)\, f_{X_1}(z-y)\, dy$$

Διακριτές: $f_Z(z) = \sum_{x=0}^{z} P(X_1 = z) \cdot f_{X_2}(z-x)$

$f_{X_1}(z)$ ⟵ σελ. 13 να δω

π.χ. $X \sim exp(\lambda)$ $Y \sim exp(\lambda)$ ανεξ.

$Z = X + Y$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) \cdot f_Y(y)\, dy =$$

$$= \int_0^z f_X(z-y) \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda y}\, dy = \int_0^z \lambda \cdot e^{-\lambda(z-y)} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda y}\, dy$$

$$= \int_0^z \lambda^2 e^{-\lambda z}\, dz = \lambda^2 \cdot z \cdot e^{-\lambda z} \qquad Z \sim \Gamma(2, \lambda)$$

Εξυπηρετεί να χρησιμοποιώ ροπογεννήτριες για να υπολογίσω όλα αυτά (ή πιθανογεννήτριες)

Πιθανογεννήτρια: (για X διακρ. τ.μ.) → ορίζει μονοσήμαντα την κάθε κατανομή

$$P_X(u) = E(u^X) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n)\cdot u^n$$ για να συγκλίνει παίρνουμε $|u| \le 1$.

$$P(X=n) = \frac{P_X^{(n)}(0)}{n!}$$ ← πιθανογεννήτρια

((n): n-παράγ., (0): υπολογισμένο στο 0)

Αποδ. ότι $X_1, \dots, X_n$ ανεξ. τ.μ. και θέλω να βρω το $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$

τότε $P_S(u) = P_{X_1}(u) \cdot P_{X_2}(u) \cdots P_{X_n}(u)$

Αν $X_1, X_2, \dots, X_n$ ισόνομες τότε: $P_S(u) = (P_X(u))^n$

Να δοκιμάσουμε π.θ. Bernoulli εις την → π.θαν. διωνυμικής

Ροπογεννήτρια συνάρτηση

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \begin{cases} \sum e^{tx} P(X=x), & X \text{ διακρ.} \\ \int e^{tx} f_X(x)\,dx, & X \text{ συνεχής} \end{cases}$$

Θεωρία Μοναδικότητας

$X \overset{d}{=} Y \iff M_X(t) = M_Y(t)$ για κάποιο $t \in (-a, a)$ → γύρω από το 0.

αν X, Y ισόν

$M_X'(0) = E(X)$
$M_X''(0) = E(X^2)$
$\vdots$
$M_X^{(n)}(0) = E(X^n)$

Αν $S = X_1 + \dots + X_n$
με X_i ανεξ. τότε $M_S(t) = M_{X_1}(t) \cdots M_{X_n}(t)$

Μπορείτε να δείξετε

- $X_i \sim P(\lambda_i)$ (Poisson) με $X_1, \dots, X_n$ ανεξ.
τότε $X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim \text{Poisson}(\sum \lambda_i)$

- $X_i \sim \exp(\lambda)$ ανεξ. τότε $X_1 + \dots + X_n \sim \Gamma(n, \lambda)$ ανεξ.

- $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ ανεξ. τότε $X_1 + \dots X_n \sim N(\sum \mu_i, \sum \sigma_i^2)$

Συλλογικό Μοντέλο Κινδύνου (μιας περιόδου)

$S_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ ← τυχαίο άθροισμα ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών (σύνθετη κατανομή)

σύνθ. κατανομή

N τ.μ., $X_1, X_2, \dots$ τ.μ. ← πραγματικά claims αποζημιώσεις

Προϋποθέσεις

1. N, $X_1, X_2, \dots$ (ανεξάρτητα τα $X_1, X_2 \dots$ με το N)

2. $X_1, X_2, \dots$ (ανεξάρτητα μεταξύ τους)

3. $X_1, X_2, \dots$ ίδια συνάρτηση κατανομής F. (ισόνομες)

Η κατανομή της S_N

$$P(S_N \le x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(S_N \le x \mid N=n) \cdot P(N=n)$$

$$\{S_N \le x\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{S \le x, N=n\}$$

$$P(S_N \le x \mid N=n) = P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \le x\right) = \text{συνέλιξη}$$

$$F * F * \dots * F = F^{n*}(x)$$ συμβολισμός

Δεν είναι εύκολο να υπολογισθεί σε κλειστή μορφή.

Θεώρημα
$S_N = X_1 + \dots + X_N$
X_i τ.μ. ανεξ. $\sim F$, N τ.μ.
$\mu = E(X_i)\ \forall i$
$\sigma^2 = Var(X_i)\ \forall i$

X_i ανεξ. και ισόνομες μεταξύ τους

$$E(S_N) = E(N) \cdot E(X)$$
$$Var(S_N) = E(N) \cdot Var(X) + E^2(X) \cdot Var(N)$$

Απόδειξη

$$E(S_N) \xlongequal{\text{Θ. Επαν. Μέσης Τιμής}} E(\underbrace{E(S_N \mid N)}_{\varphi(N)})$$

$$\varphi(n) = E(S_N \mid N=n) = E(X_1 + \dots + X_n) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = n \cdot E(X)$$

βγαίνει έξω

$$E(S_N) = E[N \cdot \underbrace{E(X)}_{\text{αριθμός}}] = E(X) \cdot E(N) =$$
$$= \mu \cdot E(N)$$

$$Var(S_N) \overset{\text{Θεωρ. Ολικής Διασποράς}}{=\!=\!=} E(\overbrace{Var(S_N|N)}^{h(N)}) + Var(\underbrace{E(S_N|N)}_{\varphi(N)})$$

$$h(n) = Var(S_N|N=n) \overset{N,X \text{ ανεξ.}}{=} Var(X_1+\dots+X_n) \overset{X_i \text{ ανεξ.}}{=} \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = n \cdot Var(X)$$

άρα

$$Var(S_N) = E(N \cdot \underbrace{Var(X)}_{\text{αριθμός}}) + Var(N \cdot \underbrace{E(X)}_{\text{αριθμός}}) =$$

$$= Var(X) \cdot E(N) + E^2(X) \cdot Var(N)$$

Θεώρημα

X_i ανεξ. και ισόν. τ.μ. με $M_X(t)$ ροπογεννήτρια

Απαιτείται

$N \geq 0$ τ.μ. ανεξάρτητη των X_i με πιθανογεννήτρια $P_N(u)$.

Τότε η $M_{S_N}(t) = P_N(M_X(t)) = M_N(\log M_X(t))$

Εάν X_i διακριτή

$$P_{S_N}(u) = P_N(P_X(u))$$

N ποιά κατανομή ακολουθεί?

Η N απαριθμεί ζημιές:

• $N \sim Poisson(\lambda)$ ~ Μοιάζει με Διωνυμική με μεγάλο n και μικρό p (n το άπειρο)

$$P(N=n) = \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^n}{n!}$$

$E(N) = Var(N) = \lambda$

$$\frac{Var(N)}{E(N)} = 1 \rightarrow$$ Θεωρούμε N Poisson αν $Var(N) \simeq E(N)$

$\rightarrow P_N(t) = \dots$

• $\dfrac{Var(N)}{E(N)} > 1 \rightarrow$ αν ισχύει το δεύτερο θεωρώ $N \sim$ Negative Binomial (r,p)

Θα μιλήσουμε για την Poisson:

Έστω $X_i \sim f$ με X_i ανεξ. και ισόν.
$N \sim Poisson(\lambda)$
N ανεξ. των X_i
$\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Τότε $S_N = X_1 + \dots + X_N$ λέμε ότι ακολουθεί σύνθετη Poisson (Compound Poisson (λ, F))

$$M_{S_N}(u) = P_N(M_X(t)) = e^{\lambda(M_X(t)-1)}$$

$$E(S_N) = E(N)\cdot E(X) = \lambda\cdot\mu \qquad \mu = E(X)$$

$$Var(S_N) = Var(N)\cdot E^2(X) + E(N)\cdot Var(X) = \lambda\mu^2 + \lambda\cdot\sigma^2$$

Άσκηση

Να γίνει για • $X_i \sim Bernoulli$
• $X_i \sim exp(\lambda)$

$E(S_N) = ?$
$Var(S_N) = ?$

· Άσκηση σπίτι

$X_i \sim F$ ανεξ. $\left.\begin{matrix} \\ N \sim Geom(p) \end{matrix}\right\}$ $M_{S_N}(t)$, $E(S_N)$, $Var(S_N)$

N ανεξ. X_i

$S_N \sim CGeom(p, F)$

Compound Geom = Σύνθετη Γεωμετρική.

$$P(N=n) = (1-p)^n \cdot p$$

Επέκταση: $X_i \sim$ $exp(\lambda)$ για των παραπάνω.

Άσκηση

Έστω $S = X_1 + \dots + X_N$ η συνολική ζημιά εταιρείας, όπου N = πλήθος ζημιών, N τ.μ. με συν. πιθανότητας

$P(N=0) = P(N=a) = P(N=2a) = 1/3$

$a = \{1, 2, \dots\}$, στοχ. ανεξ. από τις ατομ. ζημιές

$X_i, i = 1, 2, \dots$ $X_i \sim \Gamma(\frac{1}{a}, b)$

$$f_{X_i}(x) = \frac{b^{1/a}}{\Gamma(1/a)} x^{1/a - 1} \cdot e^{-bx}, x > 0, i = 1, 2, \dots \ b > 0$$

i) Υπολογίστε ροπογεννήτρια της S $(t = ;)$
και δείξτε ότι η κατανομή της S δεν εξαρτάται από το a.

ii) Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της S.
$E(S) = ;$ $Var(S) = ;$

i) $P(N=0)=P(N=a)=P(N=2a)=1/3$

$M_S(t) = P_N(M_X(t))$

$P_N(u) = E(u^N) = \sum_{n \in \text{για όλα τα } n} u^n \cdot P(N=n) =$

$= u^0 \cdot P(N=0) + u^a \cdot P(N=a) + u^{2a} \cdot P(N=2a) =$

$= \frac{1}{3}\left(1 + u^a + u^{2a}\right)$

$X \sim \Gamma(\frac{1}{a}, b) \qquad M_X(t) = \left(\frac{1}{1-\frac{t}{b}}\right)^{1/a}, \ t<b$

Όπου u βάζω το $M_X(t)$ στην $P_N(u) = \frac{1}{3}(1+u^a+u^{2a})$

άρα $M_S(t) = \frac{1}{3}\left[1 + \left(\left(\frac{1}{1-\frac{t}{b}}\right)^{1/a}\right)^a + \left(\left(\frac{1}{1-\frac{t}{b}}\right)^{1/a}\right)^{2a}\right]$

άρα $M_S(t) = \frac{1}{3}\left(1 + \left(\frac{1}{1-\frac{t}{b}}\right) + \left(\frac{1}{1-\frac{t}{b}}\right)^2\right)$ ← Δεν έχω a άρα η κατανομή δεν εξαρτάται από το a

ii) $E(S) = E(N) \cdot E(X)$

$E(N) = 0 \cdot \frac{1}{3} + a \cdot \frac{1}{3} + 2a \cdot \frac{1}{3} = a$

$E(S) = a \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{b}$ ← δεν έχει a

$E(X) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$

$\left(E(N^2) - E^2(N)\right)$, $E(N^2) = 0^2 \cdot \frac{1}{3} + a^2 \cdot \frac{1}{3} + (2a)^2 \cdot \frac{1}{3}$, $= \frac{a^2}{3} + \frac{4a^2}{3} - a^2 = \frac{2a^2}{3}$

$Var(S) = E^2(X)\, Var(N) + Var(X)\, E(N) =$

$= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{2a^2}{3} + \frac{1}{ab^2} \cdot a =$

$= \ldots = \frac{5}{3b^2}$ ← δεν έχει a.