30 - 10 - 2021

Θεωρία Κινδύνου.

Χαρτοφυλάκιο (συνολικές αποζημιώσεις)

Premium (ασφάλιστρο που παίρνει ασφαλιστής)

$S_t = S(t)$ συνολική αποζημίωση σε διάστημα $[0,t]$

Ζημιοανέλιξη

$\rightsquigarrow$ Premium.

$P(t)$ συνολικό ασφαλιστρο στο $(0,t]$

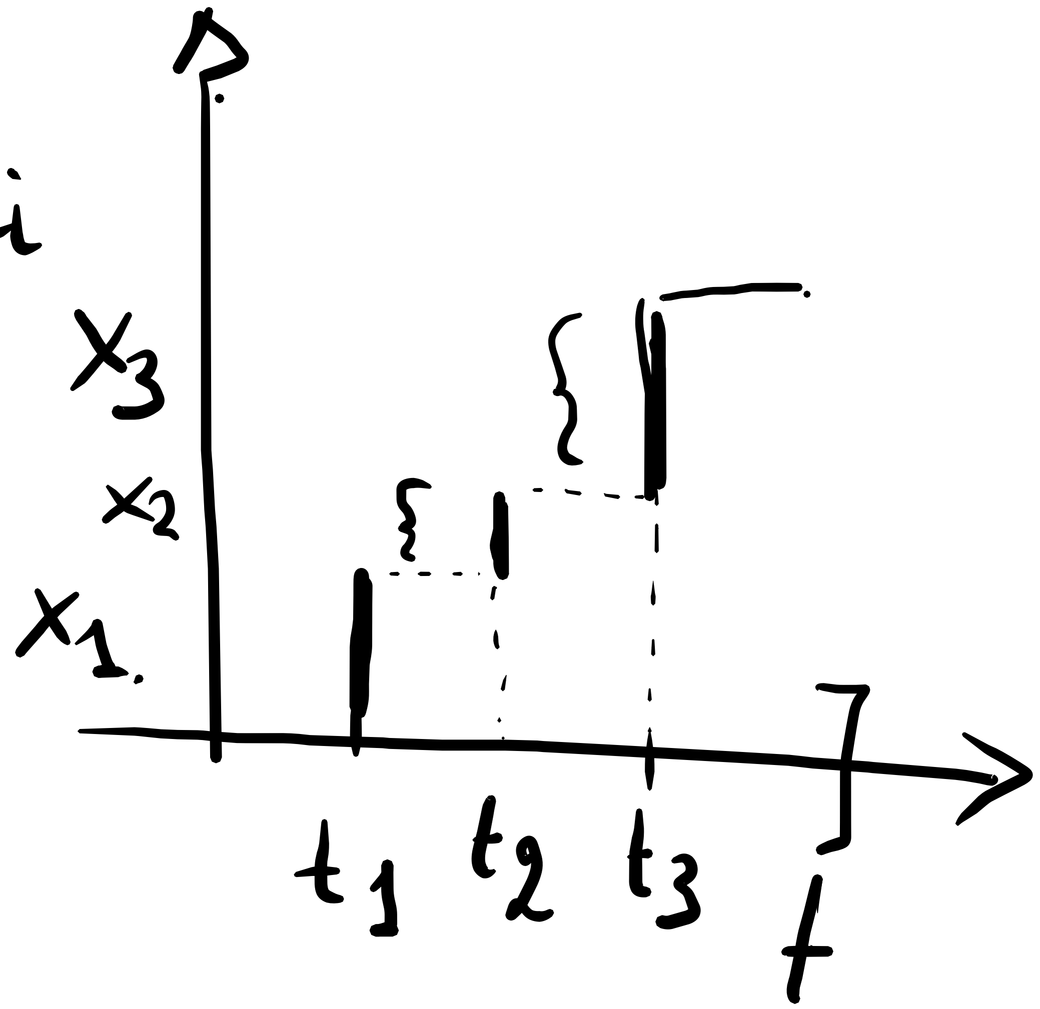
$\{P(t),\ t \geq 0\}$ στοχαστική ανελιξη

$(P(t),\ S(t)) \leftarrow$ Ανελιξη.

Risk process

$P(t) - S(t)$

$X_i : X_{t_i}$



$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_{t_i}$$

$N(t) =$ αριθμο ζημιών στο διάστημα $(0,t]$

απαριθμήτρια

$$S(t) = X_1 + X_2 + \cdots + X_{N(t)}$$

Μια χρονική περιοδο $(t=1)$

$$S = \begin{cases} X_1 + \cdots + X_N & N = 1, 2, \ldots \\ 0 \end{cases}$$

2 μοντέλα κινδύνου

Ατομικό Μοντέλο

$N = \underline{\underline{n}}$. σταθερό

$S_n = Y_1 + \dots + Y_n$

$X_i \sim F$ X_i ανεξ.

$Y_i = I_i \cdot X_i$ $I_i = \begin{cases} 1 & i \text{ γεγονός συμβεί} \\ 0 & i \text{ '' δε συμβεί} \end{cases}$

Συλλογικό μοντέλο

N τμ.

Τμ ανεξ. των κινδύνων X_i

X_i ανεξ & ισόνομες

$S_N = X_1 + \dots + X_N$

↳ actual claims

Ατομικό μοντέλο κινδύνου

n κινδύνους / ζημιογόνα γεγονότα

Το i-ζημιογόνο γεγονός έχει αποζημίωση X_i

$i = 1, \dots n$

X_i ανεξ τμ. $X_i \sim F_i(x)$ όχι κατ' ανάγκη ισόνομες

$\mu_i = E(X_i)$ $\sigma_i^2 = Var(X_i)$

Έστω ότι γεγονός i συμβαίνει με πιθανότητα q_i

$I_i = \begin{cases} 1 & \text{συμβαίνει το γεγονός } i \text{ με πιθ } q_i \\ 0 & \text{Δε} \;\; '' \end{cases}$

$I_i \sim Bernoulli(q_i)$ ανεξ $\quad q_i = E(I_i)$

$q_i(1-q_i) = Var(I_i)$

$X_1, X_2, \dots X_n, I_1, \dots I_n$ όλες ανεξ. μεταξύ τους

Ποσό αποζημίωσης για το i γεγονός $Y_i = I_i X_i$

Συνολικό ποσό $S = \sum_{i=1}^{n} I_i X_i$

από Πιθανότητες :

$$Y = I \cdot X_1 + (1-I)X_2$$

X_1, X_2, I ανεξ. I διακριτή τ.μ.

$$I = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \qquad P(I=1) = q \qquad 0 \le q \le 1$$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(Y \le y, I=1) + P(Y \le y, I=0)$$

$$= P(Y \le y \mid I=1)P(I=1) + P(Y \le y \mid I=0)P(I=0)$$

$$= P(X_1 \le y) \cdot q + P(X_2 \le y)(1-q)$$

$F_Y(y) = F_{X_1}(y) \cdot q + F_{X_2}(y)(1-q)$ κυρτός συνδυασμός κατανομών

Εάν X_1 διακριτή, X_2 συνεχής Y μικτή κατανομή

$$Y = I X_1 + (1-I) X_2$$

! $T = qX_1 + (1-q)X_2$ κυρτός συνδυασμός τ.μ. !

$0 < a < 1$

$Z = a z_1 + (1-a) z_2$ κυρτός συνδυασμός των z_1, z_2

<u>πχ</u>

Ασφαλεια πληρωνει ποσό b εαν το ποδηλάτο

ενος πελατη κλαπει

Εστω η πιθανότητα κλοπής είναι q

$$Y = I \cdot X_1 = I \cdot b \qquad I \sim \text{Bernoulli}(q)$$

$$I = \begin{cases} 1 & \text{κλοπή} \\ 0 & '' \end{cases}$$

$$Y = \underbrace{I \cdot \overset{X_2}{b}}_{} + \underbrace{(1-I) \cdot \overset{X_2}{0}}_{}$$

$$E(Y) = E(I) \cdot E(X_1) = b \cdot q$$

$$Var(Y) = Var(b \cdot I) = b^2 \cdot Var I = b^2 \cdot p \cdot q$$

(Βλ. Kaas 2.2.3)

Υπενθύμιση.

$$Var(X|Y) = E(X^2|Y) - E^2(X|Y)$$

$$E[E(X|Y)] = E(X)$$ Νομος επαναλαμβανομεν
Μεσων τιμών

$$Var(X) = Var[E(X|Y)] + E[Var(X|Y)]$$
Νομος ολικής διασποράς

$$Var(X_1 + \dots + X_n) \overset{\text{ανεξ.}}{=} Var(X_1) + \dots + Var(X_n)$$

$$Var(cX) = c^2 Var(X)$$

Γενικά

$$Y = I \cdot X \qquad I, X \text{ ανεξ.}$$

δεικτριά Τμ.

$$E(I) = q \qquad Var(I) = q(1-q)$$

$$E(X) = \mu \qquad Var(X) = \sigma^2$$

$$E(Y) \overset{\text{ανεξ}}{=} E(I) \cdot E(X) = \mu \cdot q$$

$$Var(Y) = Var(IX) = E(I^2 X^2) - E^2(IX)$$

$$= E(I^2) E(X^2) - \left[E(I) E(X) \right]^2$$

$$= E(I) \left[Var X + E^2(X) \right] - E^2(I) E^2(X)$$

$$= q(\sigma^2 + \mu^2) - q^2 \mu^2 = \mu^2 q(1-q) + \sigma^2 \cdot q$$

Θεώρημα

Ατομικό μοντέλο κινδύνου (q_i, μ_i, σ_i^2)

$i = 1, 2, \dots, n$

$$S = \sum_{i=1}^{n} I_i \cdot X_i$$

$$E(S) = \sum_{i=1}^{n} q_i \mu_i$$

$$Var(S) = \sum_{i=1}^{n} q_i \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} q_i (1-q_i) \mu_i^2$$

αν X_i ισόνομες $\mu_i = \mu$ $\sigma_i^2 = \sigma^2$ $\forall i$

$$E(S) = \mu \cdot \sum_{i=1}^{n} q_i$$

$$Var(S) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} q_i + \mu^2 \sum_{i=1}^{n} q_i (1-q_i)$$

αν. X_i ισόνομες, I_i ισόνομες $I_i \sim Bernoulli(q)$

$$E(S) = n \cdot \mu \cdot q$$

$$Var(S) = n q \sigma^2 + n \mu^2 q (1-q)$$

Μέσα αποζημίωση

ο # γεγονότων που συμβαίνουν $\sum_{i=1}^{n} I_i$

$m = E\left(\sum_{i=1}^{n} I_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(I_i) = \sum_{i=1}^{n} q_i$

↳ αναμενόμενο πλήθος ζημιογόνων

$\frac{E(S)}{m}$ σε χρον. διάστημα 1 περιόδου

Πως θα υπολογίζα ακριβή κατανομή αθροίσματος τμ. ;

$X_1 \;(F_1)$, $X_2 \;(F_2)$ ανεξάρτητες

συνέλιξη

$F_1 * F_2$

X_1, X_2 συνεχείς , $Z = X_1 + X_2$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(x) \cdot f_{X_2}(z-x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_2}(y)\, f_{X_1}(z-y)\,dy$$

διακριτές $\quad f_Z(z) = \sum_{x=0}^{z} P_{X_1}(X=x)\, f_{X_2}(z-x)$

תא

$X \sim \exp(\lambda) \qquad Y \sim \exp(\lambda)$ [illegible]

$Z = X + Y$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\, dy =$$

$$= \int_0^z f_X(z-y) \lambda e^{-\lambda y} dy = \int_0^z \lambda e^{-\lambda(z-y)} \lambda e^{-\lambda y} dy$$

$$= \int_0^z \lambda^2 e^{-\lambda z} dz = \lambda^2 z e^{-\lambda z}$$

$Z \sim \Gamma(2, \lambda)$

Εξυπηρετεί να χρησιμοποιώ
Πιθανογεννήτριες / Ροπογεννήτριες !

Πιθανογεννήτρια (για X διακριτή τμ)

$$P_X(u) = E(u^X) = \sum_{n=0}^{\infty} P[X=n]u^n$$

$|u| \leq 1$

$$P(X=n) = \frac{P_X^{(n)}(0)}{n!}$$

$X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξ τμ. $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$\boxed{P_S(u) = P_{X_1}(u) \cdot \dots P_{X_n}(u)}$$

$X_1, X_2, \dots X_n$ ισόνομες $P_S(u) = [P_X(u)]^n$

Ροπογεννήτρια συνάρτηση

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \begin{cases} \sum e^{tx} P(X=x) \\ \int e^{tx} f_X(x)\,dx \end{cases}$$

Θεωρία Μοναδικότητας

$$X \overset{d}{=} Y \Leftrightarrow M_X(t) = M_Y(t)$$

$$t \in [-a, a]$$

$$M_X'(0) = E(X)$$

$$M_X''(0) = E(X^2) \quad \ldots M_X^{(n)}(0) = E(X^n)$$

$S = X_1 + \cdots + X_n$
X_i ανεξ

$$M_S(t) = M_{X_1}(t) \cdot \ldots \cdot M_X(t)$$

Μπορείτε να δείξετε

$X_i \sim P(\lambda_i)$ ανεξ. τότε $X_1 + \cdots + X_n \sim \text{Poisson}(\sum \lambda_i)$

$X_i \sim \exp(\lambda)$ ανεξ. τότε $X_1 + \cdots + X_n \sim \Gamma(n, \lambda)$

$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ ανεξ. $X_1 + \cdots + X_n \sim N(\sum \mu_i, \sum \sigma_i^2)$

Συλλογικό μοντέλο κινδύνου (μιας περιόδου)

Σύνθετη κατανομή

$$S_N = X_1 + X_2 + \dots + X_{\underline{\underline{N}}}.$$

Τυχαίο άθροισμα ανεξ. & ισον. τμ.

N τμ, $X_1, X_2, \dots$ ← πραγματικά claims αποζημιώσεις

1. N, $\boxed{X_1, X_2, \dots}$ ανεξάρτητα
2. $X_1, X_2, \dots$ ανεξ
3. $X_1, X_2, \dots$ ίδια συνάρτηση κατανομής F

Η κατανομή της S_N

$$P(S_N \le x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(S_N \le x / N = n)\, P(N = n)$$

$$\{S_N \le x\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{S \le x \;,\; N = n\}$$

$$P(S_N \le x / N = n) = P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \le x\right) =$$ συνέλιξη

$$F * F * \cdots * F = F^{n*}(x)$$

Θεώρημα

$$\left(S_N = X_1 + \cdots + X_N\right)$$

X_i τμ ανεξ $\sim F$, N τμ.

$$E(S_N) = E(N)E(X) \qquad \mu = E(X),\ \sigma^2 = Var(X)$$

$$Var(S_N) = E(N)Var(X) + E^2(X)\,Var(N)$$

απόδειξη

$$E(S_N) \overset{\text{Θ. Επαν. Μέσης Τιμής}}{=\!=} E\left[\underbrace{E(S_N|N)}_{\varphi(N)}\right]$$

$$\varphi(n) = E(S_N \mid N=n) \overset{X_i, N \text{ ανεξ.}}{=} E(X_1+\cdots+X_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = nE(X)$$

$$E(S_N) = E\left[N \cdot \underbrace{E(X)}_{\text{αριθμός}}\right] = E(X)\cdot E(N) = \mu \cdot E(N)$$

$$Var(S_N) = E\left[\underbrace{Var(S_N|N)}_{h(N)}\right] + Var\left[\underbrace{E(S_N|N)}_{\varphi(N)}\right]$$

$$h(n) = Var(S_N \mid N=n) \overset{N, X_i \text{ ανεξ}}{=} Var(X_1+\cdots+X_n) \overset{X_i \text{ ανεξ.}}{=\!=} \sum_{i=1}^{n} Var\,X_i = n\,Var(X)$$

άρα

$$Var(S_N) = E\left[N \cdot \underline{Var(X)}\right] + Var\left[N \cdot \underline{E(X)}\right] = Var(X)E(N) + E^2(X)Var(N)$$

Θεώρημα

X_i ανεξ. & ισον. τμ. με $M_X(t)$

ροπογεννήτρια

$N \geq 0$ τμ. ανεξ X_i πιθ. $P_N(u)$, $M_N(t)$

$$\boxed{M_{S_N}(t) = P_N(M_X(t))} = M_N(\log M_X(t))$$

Εάν X_i διακριτές

$$P_{S_N}(u) = P_N(P_X(u))$$

N Ποια κατανομή ακολουθεί ?

N απαριθμεί γεγονός

- $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$ $\qquad P(N=n) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{n}}{n!}$

$$E(N) = Var(N) = \lambda \qquad \frac{Var(N)}{E(N)} = 1$$

$$P_N(t) = e^{\lambda(t-1)}$$

- $\dfrac{Var(N)}{E(N)} > 1$ $\qquad N \sim \text{Negative binomial}\ (r, p)$

• Ασκηση

$X_i \sim F$ $\quad E(X)=\mu$

ανεξ $\quad Var(X)=\sigma^2$

$N \sim Geom(p)$

ανεξ X_i

$M_{S_N}(t)$

$E(S_N)$

$Var(S_N)$

$P(N=n) = (1-p)^n \cdot p$

$S_N \sim CGeom(p, F)$

Σύνθετη γεωμετρική

Εφαρμογή: • $X_i \sim exp(\lambda)$

$X_i \sim F$

ανεξ, ισονομες

$N \sim \text{Poisson}(\lambda)$

ανεξ των X_i

Τότε $S_N = X_1 + \cdots + X_N$

λέμε ότι ακολουθεί

Σύνθετη Poisson

Compound Poisson(λ, F)

$$M_{S_N}(t) = P_N\left(M_X(t)\right) = e^{\lambda\left(M_X(t) - 1\right)}$$

$$E(S_N) = E(N) \cdot E(X) = \lambda \cdot \mu \qquad \mu = E(X)$$

$$Var(S_N) = Var(N)\, E^2(X) + E(N)\, Var(X) = \lambda \mu^2 + \lambda \sigma^2$$

Εφαρμογή (ως άσκηση) Homework

- $X_i \sim$ Bernoulli — $E(S_N) = ;$
- $X_i \sim \exp(\lambda)$ — $Var(S_N) = ;$

Άσκηση

Έστω $S = X_1 + \dots + X_N$ η συνολική ζημιά εταιρείας, όπου N πλήθος ζημιών

N τμ. σ.π $P(N=0) = P(N=a) = P(N=2a) = 1/3$

$a = \{1, 2, \dots\}$, στοχ. ανεξ. από τις ατομικές ζημιές

X_i $i = 1, 2, \dots$ $X_i \sim \Gamma\left(\frac{1}{a}, b\right)$

$$f_{X_i}(x) = \frac{b^{1/a}}{\Gamma(1/a)} x^{\frac{1}{a}-1} e^{-bx} \quad x > 0 \quad i = 1, 2, \dots \quad b > 0$$

i) Υπολογίστε ροπογεννήτρια της S $(t:j)$

Δείξτε ότι η κατανομή δεν εξαρτάται από το a

ii) $E(S)$, $Var(S)$

$$M_S(t) = P_N(\underbrace{M_X(t)})$$

$$P(N=0) = P(N=a) = P(N=2a) = 1/3$$

$$P_N(u) = E[u^N] = \sum_n u^n P(N=n) =$$

$$= u^0 P(N=0) + u^a P(N=a) + u^{2a} P(N=2a)$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + u^a + u^{2a}\right)$$

$$X \sim \Gamma\left(\frac{1}{a}, b\right) \qquad \underbrace{M_X(t)}_{u} = \left(\frac{1}{1-\frac{t}{b}}\right)^{1/a} \qquad t<b$$

$$M_S(t) = \frac{1}{3}\left[1 + \left\{\left(\frac{1}{1-\frac{t}{b}}\right)^{1/a}\right\}^{a} + \left\{\left(\frac{1}{1-\frac{t}{b}}\right)^{1/a}\right\}^{2a}\right]$$

$$M_S(t) = \frac{1}{3}\left[1 + \frac{1}{1-t/b} + \left(\frac{1}{1-\frac{t}{b}}\right)^{2}\right]$$

Δεν έχω a;

$$E(S) = E(N) \cdot E(X)$$

$$E(N) = 0 \cdot \frac{1}{3} + a \cdot \frac{1}{3} + 2a \cdot \frac{1}{3} = a$$

$$E(X) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$$

$$E(S) = a \cdot \frac{1}{a} \frac{1}{b} = \underline{\underline{\frac{1}{b}}}$$

$$\Big(E(N^2) - E^2(N) = \frac{a^2}{3} + \frac{4a^2}{3} - a^2 = \frac{2a^2}{3}$$

$$a^2 \frac{1}{3} + a^2 \frac{1}{3} + (2a)^2 \frac{1}{3}$$

$$Var(S) = E^2(X)\,Var(N) + Var(X)\,E(N)$$

$$= \frac{1}{a} \frac{1}{b} \frac{2a^2}{3} + \frac{1}{ab^2} \cdot a = \underline{\underline{\frac{5}{3b^2}}}$$