7/10/2021 - 1º Μάθημα

E-Class: ΟΠΑ Μεταπτυχιακό Τμήμα Πληροφορικής
Υπάρχει και το βιβλίο στην E-Class (4 βιβλία υπάρχουν συνολικά)

- Bowers et al Actuarial Mathematics (1986) ← Βιβλίο αναφοράς (έχει πολλά)
  ↗ έχει από όλα μέσα
- Kaas et al Modern Actuarial Risk Using R (2008) ← Αυτό θα έχουμε κυρίως.
  ↳ Υπάρχει περίπτωση να έχουμε εργασίες ↗ κυρίως κομμάτια με ρίσκο
- Dickson (2016) Insurance Risk and Ruin
- Dickson (2013) Actuarial Mathematics for life contingent risks.

Το μάθημα μπορεί να πλατειάσει πολύ, αφορά κυρίως αυτά της παρακολούθησης (και από τα βιβλία το Kaas θα ασχοληθούμε περισσότερο)

email: mkaralisp@math.uoa.gr
Γραφείο: 33Σ (ΕΚΠΑ Μαθηματικό)

Κεφάλ. 1 στο 1º και 2º βιβλίο.
↳ Κεφάλ. 2 στο 3º βιβλίο.

Θεωρία Ωφελιμότητας - Utility Theory

Παιχνίδι (Κ ή Γ) (κάθε φορά για να συμμετέχω δίνω ποσό G)

X τ.μ.: Κ χάνω πιθανότητα 4/10; Γ +10€ -//- 6/10

κέρδος
$$x = \begin{cases} 0 & \text{με πιθ. } 4/10 \\ 10 & \text{με πιθ. } 6/10 \end{cases}$$

Αναμ. Κέρδος
$$E(x) = 10 \cdot \frac{6}{10} = 6€$$ (Σκεπτόμαστε ότι θα παίξω αν $G \leq 6€$)

Ομοίως, $X \begin{cases} 0 & 4/10 \\ 1.000.000 & 6/10 \end{cases}$ $E(X) = 600.000$

$G \leq 600.000$;

Εδώ μπαίνει η έννοια της υποκειμενικότητας (δεν έχω 600.000 για να παίξω ξανά πάλι, και να είχα αν χάσω θα χάσω τεράστιο ποσό) Εκτός αν είμαι πάμπλουτος.)

Ισχυρός Νόμος των Μεγάλων Αριθμών:

Έστω ότι παίζουμε πάρα πολλές φορές το παιχνίδι.

X_i κέρδος στο i παιχνίδι, $i=1,\dots,n$

$S_n = X_1 + \dots + X_n$ $\quad \frac{S_n}{n} \simeq E(X_i)$

το μέσο κέρδος που τείνει να γίνει $= E(X_i)$

Άρα θέλω να παίξω αν $G \leq E(X_i)$

Έστω τώρα ότι το ίδιο παιχνίδι κάνει 5€ για να συμμετέχω τη φορά. Μετά από n παιχνίδια, πόσα € έχω στην τσέπη.

$(S_n \simeq n \cdot E(X_i))$

$n \cdot E(X_i) - S_n$

$6n - 5n = n$ άρα κερδισμένος

Ομοίως αν το παιχνίδι κάνει 7€

$6n - 7n = -n$ άρα χαμένος

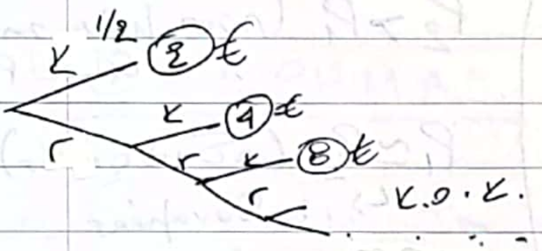
Όταν σκέφτομαι να έχω $G \leq E(X)$

$G_{max} = E(X)$

→ Κριτήριο Αναμενόμενου Κέρδους

St. Petersburg Paradox

Ρίχνω αμερόληπτο νόμισμα. Ο παίκτης παίρνει ποσό $x = 2^n$ όταν φέρνει 1η φορά κορώνα την n-οστή ρίψη. Εκεί τελειώνει το παιχνίδι. (Παίζω συνέχεια μέχρι να συμβεί η συνθήκη)



N = # ρίψεων μέχρι να εμφανιστεί κορώνα
↑ τυχαία μεταβλητή.

$N \sim Geom(p) \quad p = 1/2$

$$E(N) = \frac{1}{p} = 2$$

Αναμενόμενο Κέρδος $E(X) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{8} + \dots =$

$$\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot P(X = x_i)} = 1 + 1 + \dots + 1 = \infty$$

(? Το πολύ-πολύ να δίνω άπειρα χρήματα ώστε να συμμετέχω στο στοίχημα)

όφελος: κόστος σε λεφτά
ωφέλεια: κέρδος προσωπικό

π.χ. Αν είναι να δίνω το κουτί μου στο deal για 499.999€ ενώ έχει μέσα ή 0€ ή 1.000.000. αν είμουν πάμπλουτος μάλλον δεν θα έδινα το κουτί μου αλλά κάποιος με μέση οικονομική κατάσταση θα έδινε αμέσως το κουτί στον τραπεζίτη, άρα υπεισέρχεται η έννοια της υποκειμενικότητας.

Ο Bernoulli εισήγαγε λοιπόν το κριτήριο Αναμενόμενης ωφελιμότητας.

Αναμενόμενη Ωφελιμότητα

Άτομο έχει να επιλέξει ανάμεσα σε 2 εναλλακτικές δράσεις (Lotteries)

Παιχνίδι P_1 vs Παιχνίδι P_2

ή

π.χ. X_1: $\xrightarrow{p_1 = 1/2}$ 300 € , $\xrightarrow{p_2=1/2}$ 1000 € vs X_2: $\xrightarrow{p_1 = 8/10}$ 100 € , $\xrightarrow{p_2 = 2/10}$ 30.000 €

ή

δηλ. επιλέγω την κατανομή F_1 vs δηλ. επιλέγω την κατανομή F_2

Ορισμός (Συμβολισμός)

$P_2 \succ P_1$ (προτιμάει τη δράση P_2)

$P_1 \simeq P_2$ (αδιάφορος) ↳ ισοδυναμίας

$\mathbb{P}$ σύνολο εναλλακτικών δράσεων ή επιλογών

Το σύνολο $\mathbb{P}$ είναι ένα κυρτό σύνολο, δηλαδή $\forall P_1, P_2 \in \mathbb{P}, p \in [0,1]$: $p \cdot P_1 + (1-p) \cdot P_2 \in \mathbb{P}$.

↗ 3η εναλλακτική

$\mathbb{P} = \{P_i, i \in I\}$ ή $\{F_i, i \in I\}$ ή $\{X_i, i \in I\}$

π.χ. Ρίχνω νόμισμα με π.θ. $P(K) = p$

αν βγεί K επιλέγω P_1

-ιι- -ιι- Γ επιλέγω P_2

Αν μου τύχει διακριτή + συνεχής ⟶ Μικτή κατανομή ο κυρτός συνδυασμός τους

π.χ. η P_1 διακριτή και η P_2 συνεχής

Θεωρία Ωφελιμότητας - Αξιώματα

Αξ. 1 $\forall P_1, P_2 \in \mathbb{P}$ $P_1 \prec P_2$ ή $P_1 \succ P_2$ ή $P_1 \simeq P_2$

Αξ. 2 $\forall P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{P}$ Αν $P_1 \succ P_2$ $P_2 \succ P_3$ τότε $P_1 \succ P_3$

Αξ. 3 Για $P_1 \prec P_2$ $P_3 \in \mathbb{P}$ $\exists p \in (0,1]$ ← δηλ υπάρχει παιχνίδι (ισχύει και ότι)

$p \cdot P_1 + (1-p) \cdot P_3 \prec p \cdot P_2 + (1-p) \cdot P_3$

Scanned with CamScanner

Αξ. 4) $P_1 \prec P_2 \prec P_3$ $\exists\, p \in (0,1)$, $p' \in (0,1)$ τ.ώστε

$$p \cdot P_1 + (1-p) \cdot P_3 \prec P_2 \prec p' \cdot P_1 + (1-p') P_3$$

Πολύ νέος κλάδος τα Αναλογιστικά Μαθηματικά. (Από το 1950)

ΘΕΩΡΗΜΑ – Ωφελιμοσυνάρτηση ή Συνάρτηση Ωφελιμότητας

Θεωρ. Ορισμός: Εάν ισχύουν τα αξιώματα 1-4, τότε $\exists$ συνάρτηση $u(.)$

$u : P \to \mathbb{R}$

προτιμάω την P_2 αντί για την P_1 αν και μόνο αν $u(P_1) < u(P_2)$

$P_1 \prec P_2$ αν $u(P_1) < u(P_2)$

Ο καθένας έχει δική του u ωφελιμοσυνάρτηση θεωρητικά

$\boxed{\text{Ουσιαστικά, } u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad X_1 \prec X_2 \text{ αν } u(X_1) < u(X_2) \text{ ή ισοδύναμα } E(u(X_1)) < E(u(X_2))}$

Δεν συγκρίνω ουσιαστικά τυχ. μεταβλ.

Με αυτό θα δουλεύουμε κυρίως

Άσκηση Kaas 1.2.4.

Έστω άτομο έχει συνάρτηση ωφέλειας $u(x) = \sqrt{x}$ $x \geq 0$
Μπορεί να διαλέξει να παίξει ανάμεσα από 2 παιχνίδια, αλλά θα πρέπει να πληρώσει όλη του τη περιουσία w.
Τα 2 παιχνίδια έχουν τυχαία κέρδη X, Y

$$P(X=400) = P(X=900) = \frac{1}{2}$$

$$P(Y=100) = 0.6 \quad P(Y=1600) = 0.4$$

a) Ποιο παιχνίδι προτιμά με κριτήριο την αναμενόμενη ωφελιμότητα;

b) Για ποιές τιμές του w, να αρνηθεί να παίξει;

γ) Δώστε συνάρτηση ωφελιμότητας, ώστε βάσει αυτής το άτομο να προτιμά την Y.

Λύση:

α) Έχω $X > Y$ ανν $E[u(X)] > E[u(Y)]$

$$E[u(X)] = u(400)\cdot\frac{1}{2} + u(900)\cdot\frac{1}{2} = \sqrt{400}\cdot\frac{1}{2} + \sqrt{900}\cdot\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{20}{2} + \frac{30}{2} = 25$$

$$E[u(Y)] = u(100)\cdot\frac{6}{10} + u(1600)\cdot\frac{4}{10} = 10\cdot\frac{6}{10} + 40\cdot\frac{4}{10} = 22$$

Άρα προτιμάει το X αφού για τη δική του $u: X > Y$.

β) $E[u(W)] > E[u(X)]$

$1\cdot\sqrt{W} > 25$ ή $W > 25^2$ τότε αρνούμαι να παίξω

γ) $E(X) = 400\cdot\frac{1}{2} + 900\cdot\frac{1}{2} = 650$ άρα για $u^*(X) = X$

$E(Y) = 100\cdot\frac{6}{10} + 1600\cdot\frac{4}{10} = 700$ η $E(u^*(X)) = E(X)$

και $E(u^*(Y)) = E(Y)$

όμως εδώ $E(Y) > E(X)$

Από εκφώνηση

είπε να πάρω $u^*(X) = X$ και βγήκε

Παρατηρήσεις

① $u(X)$

Αν πάρω $u^*(X) = a\,u(X) + b$ $\quad a > 0$

$E(u^*(X)) = a\,E(u(X)) + b$ $\quad$ u

$E(u(X)) > E(u(Y))$ $\quad X > Y$

ανν $E(u^*(X)) > E(u^*(Y))$ $\quad X > Y$ $\quad u^*$

② $u(X) = aX + b$ $\quad a > 0$

$E(u(X)) = a\,E(X) + b$

• Ο ασφαλιζόμενος με αρχική περιουσία w και ωφελιμοσυνάρτηση u θέλει να ασφαλιστεί έναντι κινδύνου X. Το μέγιστο ποσό G_{max} που είναι διατεθειμένος να δώσει ως ασφάλιστρο. (Συμβολίζεται με P ή P^+ (premium)).

Το παιχνίδι έχει ως εξής:

Δεν Ασφαλίζεται: $w - X$ (όσα είχε; τυχ. μεταβλητή)

Ασφαλίζεται: $w - G$ (fix (σταθερό))

G: τα χρήματα που θα δώσει ο ασφαλιζόμενος για την ασφάλεια

Θα προτιμήσει ο ασφαλιζόμενος να ασφαλισθεί αν:

$$E\left(u(w-G)\right) \geq E\left(u(w-X)\right)$$

τυχαία μεταβλητή

$$\underbrace{u(w-G)}_{\text{αριθμός}} \geq E\left(u(w-X)\right)$$

u αύξουσα συνάρτηση

Αποδεικνύεται ότι $\boxed{u(w-G_{max}) = E\left(u(w-X)\right)}$

• Ομοίως ο ασφαλιστής με αρχική περιουσία w (διαφορ. w με το w του ασφαλιζόμενου) και ωφελιμοσυνάρτηση u θέλει να κάνει ασφάλιση έναντι κινδύνου X. Το ελάχιστο ποσό G_{min} που είναι διατεθειμένος να πάρει ως ασφάλιστρο P^- (premium)

w: σταθερό ποσό (όχι τυχαία μεταβλητή).

Σε κάνει $\rightarrow w$

κάνει ασφάλιστρο $\rightarrow w + G - X$

$$E\left[u(w+G-X)\right] \geq E\left(u(w)\right)$$

$$\boxed{E\left(u(w+G_{min}-X)\right) = u(w)}$$

Σαν να δίνω το λαχείο μου σε κάποιον άλλο πριν γίνει η κλήρωση επειδή - άλλος θέλει να το αγοράσει από εμέ

· Άτομο με περιουσία w, δικαίωμα σε κέρδος X εκχωρεί το δικαίωμα έναντι ποσού K_{min} τουλάχιστον. (με ωφελιμοσυνάρτηση u)

$$w \xrightarrow{\text{εκχωρώ}} w+K \qquad w \xrightarrow{\text{δεν εκχωρώ}} w+X$$

Προτιμώ να εκχωρήσω όταν:

$$E(u(w+K)) > E(u(w+X)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{u(w+K_{min}) > E(u(w+X))}$$

• Ομοίως, άτομο με περιουσία w (διαφ. με πριν), ωφ. συνάρτηση u (άλλη με πριν) αγοράζει το δικαίωμα σε κέρδος X δίνοντας το πολύ K_{max}

$$w \xrightarrow{\text{αγοράζει}} w-K_{max}+X \qquad w \xrightarrow{\text{δεν αγοράζει}} w$$

Προτιμώ να αγοράσω όταν:

$$E(u(w-K_{max}+X)) \geq E(u(w)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{E(u(w-K_{max}+X)) = u(w)}$$

Άσκηση

Ασφαλιζόμενος (κινδυνεύω από ζημιά X)

$W=100$

$u(x)=\sqrt{x}$ ή $u(w)=\sqrt{w}$ (το ίδιο πράγμα)

Αν η ζημιά $X \sim U(0,100)$ (a,b) ποιο το G_{max} που προτίθεται να δώσει για την ασφάλιση.

$G_{max}=;$

$$u(w-G_{max}) = E[u(w-X)]$$

$$\sqrt{100-G_{max}} = \int_0^{100} \sqrt{w-x}\cdot\frac{1}{100}\,dx \overset{w=100}{=} \frac{20}{3}$$

Θα βγει $G_{max}=55{,}5$

$$E(U) = \frac{1}{100-0} = \frac{1}{b-a}$$