ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2024-2025
ΑΝ. ΚΑΘ. ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ
ΟΝΟΜΑ ΦΟΙΤΗΤΗ: . . . .

Οδηγίες (Διαβάστε τες!)

1. **Συμπληρώστε το όνομά σας άνω, και παραδώστε το παρόν με τις λύσεις**.
2. **Οι λύσεις πρέπει να γραφούν αποκλειστικά στην παρεχόμενη κόλλα, και όχι σε αυτό το δίφυλλο. Ό,τι γράψετε εδώ δεν θα διορθωθεί.**
3. Διάρκεια εξέτασης: 2 ΩΡΕΣ.
4. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
5. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
6. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε μολύβι ή/και στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός από κόκκινο.
7. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
8. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
9. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
10. Σύμφωνα με τον κανονισμό εξετάσεων, σε περίπτωση που διαπιστωθεί (κατά τη διάρκεια της εξέτασης είτε της διόρθωσης) αντιγραφή είτε απόπειρα αντιγραφής, θα ενημερωθούν τα αρμόδια όργανα του ιδρύματος.

Θέματα

1. **(Όρια)** *(1+1 μονάδες)* Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια, ή να δείξετε ότι δεν υπάρχουν:
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{\sin^3 x}, \qquad \lim_{x\to 0}\,(1-\sin x)^{(x^{-3})}.$$
2. **(Αόριστο ολοκλήρωμα)** *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int \frac{1}{10+e^x}\,dx.$
3. **(Ορισμένο Ολοκλήρωμα)** *(1 μονάδα)* Να δείξετε ότι
$$-50 \le \int_0^{10} x\cos(2x-\sin x)\,dx \le 50.$$
4. **(Καταχρηστικά Ολοκληρώματα)**
   (α΄) *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε το καταχρηστικό ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{2x}{x^2+10}\,dx.$
   (β΄) *(1 μονάδα)* Να δείξετε ότι το $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}\,dx$ είναι πεπερασμένο, δηλαδή δεν ισούται με $\pm\infty$.
5. **(Διαφορικές Εξισώσεις)**
   (α΄) *(1 μονάδα)* Να βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $z'(x)+\frac{1}{x}z(x)=x\log x.$

(β′) *(1 μονάδα)* Να βρείτε όλες τις λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$y'(x) - \frac{1}{2x}y(x) = -\frac{x\log x}{2}y^3(x)$$

για τις οποίες $y(x) \neq 0$, και το πεδίο ορισμού είναι υποσύνολο του $(0,\infty)$. Μπορείτε να θέσετε $z(x) = (y(x))^{-2}$.

6. **(Σειρές)** Να προσδιορίσετε αν οι ακόλουθες σειρές συγκλίνουν ή αποκλίνουν:

(α′) *(1 μονάδα)* $\dfrac{1}{1^3+\cos 1} + \dfrac{2}{2^3+\cos 2} + \dfrac{3}{3^3+\cos 3} + \dfrac{4}{4^3+\cos 4} + \ldots$

(β′) *(1 μονάδα)* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\log n}}$.

Τυπολόγιο

$$\cos(y-x) = \cos x\cos y + \sin x\sin y, \quad \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$
$$\sin 2x = 2\sin x\cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$
$$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right), \quad \cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right), \quad \cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x\sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right], \quad \cos x\cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]$$
$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right], \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}, \ \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0 : 0 < |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$ $\quad \forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0 : c < x < c+\delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$

$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0 : c-\delta < x < c \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$ $\quad \forall\epsilon > 0 \exists X \in \mathbb{R} : x > X \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$

$\forall\epsilon > 0 \exists X \in \mathbb{R} : x < X \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$ $\quad \forall M \in \mathbb{R} \exists\delta > 0 : 0 < |x-c| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$

$\forall M \in \mathbb{R} \exists X \in \mathbb{R} : x > X \Rightarrow f(x) > M.$ $\quad \forall\epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon.$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq C|x - x_0|, \quad |f(y) - f(x)| \leq C|y-x|$$
$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad (\arccos y)' = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad (\arctan y)' = \frac{1}{1+y^2}$$
$$f(\theta x_0 + (1-\theta)x_1) < \theta f(x_0) + (1-\theta)f(x_1)$$
$$L(f,P) \triangleq \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}), \quad U(f,P) \triangleq \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}), \quad \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(t_i - t_{i-1})$$
$$\left\{\begin{array}{c} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{array}\right\}$$
$$\frac{1}{2}\int_a^b f^2(\theta)\,d\theta, \quad \pi\int_a^b f^2, \quad 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx, \quad \int_a^b A(t)\,dt, \quad \int_a^b \sqrt{(f'(x))^2 + (g'(x))^2}\,dx$$
$$y' + P(x)y = Q(x), \quad y(x) = [S(x) + C]\exp[-R(x)]$$
$$y(x) = \left\{y_0 + \int_{x_0}^{x} Q(u)\exp\left[\int_{x_0}^{u} P(t)\,dt\right]du\right\}\exp\left[-\int_{x_0}^{x} P(t)\,dt\right]$$
$$E_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt, \quad |E_n(x)| \leq M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k), \quad t_n = \int_1^n f(x)\,dx$$
$$S = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k, \quad s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k, \quad 0 < (-1)^n(S - s_n) < a_{n+1}$$