ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι, ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2021-2022

Οδηγίες (Διαβάστε τες!)

1. Διάρκεια εξέτασης: 120 ΛΕΠΤΑ.
2. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
3. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
4. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
5. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
6. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
7. Σύμφωνα με τον κανονισμό εξετάσεων, σε περίπτωση που διαπιστωθεί (κατά τη διάρκεια της εξέτασης είτε της διόρθωσης) αντιγραφή είτε απόπειρα αντιγραφής, θα ενημερωθούν τα αρμόδια όργανα του ιδρύματος.

Θέματα

1. **(Όρια)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια, εφόσον υπάρχουν:

   (α΄) *(1 μονάδα)* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)\right)}{x^2}$.

   (β΄) *(1 μονάδα)* $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x + x)^{\frac{1}{x^3}}$.

2. **(Αόριστα Ολοκληρώματα)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

   (α΄) *(1 μονάδα)* $\displaystyle\int \frac{1+\cot x}{1-\cot x}\,dx$. Δίνεται ότι $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

   (β΄) *(1 μονάδα)* $\displaystyle\int (\arcsin x)^2\,dx$. Δοκιμάστε την αντικατάσταση $y = \arcsin x$.

   (γ΄) *(1 μονάδα)* $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-7x+10}\,dx$.

3. **(Καταχρηστικό Ολοκλήρωμα)** *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε το ακόλουθο καταχρηστικό ολοκλήρωμα:

$$\int_0^2 \frac{2x-7}{x^2-7x+10}\,dx.$$

   Εξηγήστε γιατί το ολοκλήρωμα είναι καταχρηστικό.

4. **(Διαφορικές Εξισώσεις)** Να προσδιορίσετε τη γενική λύση των ακόλουθων ΔΕ στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$:

   (α΄) *(1 μονάδα)* $(\cos x)y'(x) - (\sin x)y(x) = (\cos x)^2$.

   (β΄) *(1 μονάδα)* $(\cos x)y'(x) + (\sin x)y(x) = (\cos x)^2$.

5. **(Σειρές)** Να προσδιορίσετε αν οι ακόλουθες σειρές συγκλίνουν ή όχι:

   (α΄) *(1 μονάδα)* $\displaystyle\sum \frac{(n+1)e^{5n+1}}{n!}$.

   (β΄) *(1 μονάδα)* $\displaystyle\sum \frac{e^n + \log n}{(n^2+2)e^n + 10}$.

Τυπολόγιο

$$\cos(y-x)=\cos x\cos y+\sin x\sin y,\quad \sin\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$
$$\sin 2x=2\sin x\cos x,\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$$
$$\sin x+\sin y=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x+\cos y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x-\sin y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x-\cos y=-2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right],\quad \cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$$
$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right],\quad \cos x<\frac{\sin x}{x}<\frac{1}{\cos x},\ \cos\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0: 0<|x-c|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$ $\qquad\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0: c<x<c+\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$

$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0: c-\delta<x<c\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$ $\qquad\forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}: x>X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$

$\forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}: x<X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$ $\qquad\forall M\in\mathbb{R}\exists\delta>0: 0<|x-c|<\delta\Rightarrow f(x)>M.$

$\forall M\in\mathbb{R}\exists X\in\mathbb{R}: x>X\Rightarrow f(x)>M.$ $\qquad\forall\epsilon>0\exists N\in\mathbb{N}: n>N\Rightarrow|a_n-L|<\epsilon.$

$$|f(x)-f(x_0)|\le C|x-x_0|,\quad |f(y)-f(x)|\le C|y-x|$$
$$(\arcsin y)'=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arccos y)'=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arctan y)'=\frac{1}{1+y^2}$$
$$f(\theta x_0+(1-\theta)x_1)<\theta f(x_0)+(1-\theta)f(x_1)$$
$$L(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^{n}m_i(t_i-t_{i-1}),\quad U(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^{n}M_i(t_i-t_{i-1}),\quad \sum_{i=1}^{n}f(x_i)(t_i-t_{i-1})$$
$$\left\{\begin{array}{c} x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} r=\sqrt{x^2+y^2},\\ \cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{array}\right\}$$
$$\frac{1}{2}\int_a^b f^2(\theta)\,d\theta,\quad \pi\int_a^b f^2,\ \ 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx,\quad \int_a^b A(t)\,dt,\quad \int_a^b\sqrt{(f'(x))^2+(g'(x))^2}\,dx$$
$$y'+P(x)y=Q(x),\quad y(x)=[S(x)+C]\exp[-R(x)]$$

$$P_{n,a}(x)\ \triangleq\ f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
$$y(x)=\left\{y_0+\int_{x_0}^{x}Q(u)\exp\left[\int_{x_0}^{u}P(t)\,dt\right]du\right\}\exp\left[-\int_{x_0}^{x}P(t)\,dt\right]$$
$$E_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt,\quad |E_n(x)|\le M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$s_n=\sum_{k=1}^{n}f(k),\quad t_n=\int_1^n f(x)\,dx$$
$$S=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k,\quad s_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k,\quad 0<(-1)^n(S-s_n)<a_{n+1}$$
$$A_\parallel=\left[\frac{A\cdot B}{\|B\|^2}\right]B,\quad A_\perp=A-A_\parallel,\quad (x-x_0,y-y_0)(A,B)=0\Leftrightarrow Ax+By=Ax_0+By_0$$
$$\left|\begin{array}{ccc} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{array}\right|=0,\quad \left|\begin{array}{ccc} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0\\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0\end{array}\right|=0,$$
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\Leftrightarrow Ax+By+Cz=Ax_0+By_0+Cz_0$$

$$y^2=4px,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-\epsilon^2)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(\epsilon^2-1)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\left\{\begin{array}{c} u=(x-x_0)\cos\theta+(y-y_0)\sin\theta,\\ v=-(x-x_0)\sin\theta+(y-y_0)\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left(\begin{array}{c} u\\ v\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x-x_0\\ y-y_0\end{array}\right)$$
$$\left\{\begin{array}{c} x=x_0+u\cos\theta-v\sin\theta,\\ y=y_0+u\sin\theta+v\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left(\begin{array}{c} x\\ y\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} x_0\\ y_0\end{array}\right)+\left(\begin{array}{cc}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{array}\right)\left(\begin{array}{c} u\\ v\end{array}\right)$$
$$\left(\begin{array}{c} u\\ v\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} x-x_0\\ y-y_0\end{array}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{array}{c} x\\ y\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} x_0+u\\ y_0+v\end{array}\right),\quad \theta=\frac{1}{2}\mathrm{arccot}\frac{A-C}{B}$$
$$\left|\begin{array}{ccc} x_0 & y_0 & z_0\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{array}\right|=x_0\left|\begin{array}{cc} y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{array}\right|-y_0\left|\begin{array}{cc} x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{array}\right|+z_0\left|\begin{array}{cc} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{array}\right|,\quad \left|\begin{array}{cc} x_0 & y_0\\ x_1 & y_1\end{array}\right|=x_0y_1-x_1y_0.$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 1, ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2021-2022
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΑΝ. ΚΑΘ. ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ

Λύσεις

1. **(Όρια)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια, εφόσον υπάρχουν:

(α΄) *(1 μονάδα)* $\lim_{x\to 0} \frac{\log\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)\right)}{x^2}$.

(β΄) *(1 μονάδα)* $\lim_{x\to 0} (\cos x + x)^{\frac{1}{x^3}}$.

Λύση:

(α΄) Με χρήση του Κανόνα του L'Hôpital, έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)\right)}{x^2} = -\lim_{x\to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)} \times \frac{\pi \sin x}{4x} = 0.$$

(β΄) Έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} (\cos x + x)^{\frac{1}{x^3}} &= \lim_{x\to 0} \exp\left[\frac{\log(x+\cos x)}{x^3}\right] \\ &= \exp\left[\lim_{x\to 0} \frac{\log(x+\cos x)}{x^3}\right] = \exp\left[\lim_{x\to 0} \frac{1-\sin x}{(x+\cos x)3x^2}\right] = \infty.\end{aligned}$$

2. **(Αόριστα Ολοκληρώματα)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

(α΄) *(1 μονάδα)* $\int \frac{1+\cot x}{1-\cot x}\, dx$. Δίνεται ότι $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

(β΄) *(1 μονάδα)* $\int (\arcsin x)^2\, dx$. Δοκιμάστε την αντικατάσταση $y = \arcsin x$.

(γ΄) *(1 μονάδα)* $\int \frac{1}{x^2 - 7x + 10}\, dx$.

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως

$$\int \frac{1+\cot x}{1-\cot x}\, dx = \int \frac{1+\frac{\cos x}{\sin x}}{1-\frac{\cos x}{\sin x}}\, dx = \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\, dx = \log|\sin x - \cos x| + C.$$

(β΄) Θέτουμε $y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$, επομένως $dx = (\cos y)dy$, και

$$\begin{aligned}\int (\arcsin x)^2\, dx &= \int y^2 \cos y\, dy = \int y^2 (\sin y)'\, dy = y^2 \sin y - 2\int y \sin y\, dy \\ &= y^2 \sin y + 2\int y(\cos y)'\, dy = y^2 \sin y + 2y\cos y - 2\int \cos y\, dy \\ &= y^2 \sin y + 2y \cos y - 2\sin y + C = x(\arcsin x)^2 + 2(\arcsin x)\sqrt{1-x^2} - 2x + C.\end{aligned}$$

(γ΄) Παρατηρούμε πως

$$\int \frac{1}{x^2-7x+10}\, dx = \int \frac{1}{(x-2)(x-5)}\, dx.$$

Έχουμε

$$\frac{1}{(x-2)(x-5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-5} \Leftrightarrow 1 = A(x-5) + B(x-2) \Leftrightarrow 1 = Ax - 5A + Bx - 2B$$
$$\Leftrightarrow (1 + 5A + 2B) = (A+B)x \Leftrightarrow A = -\frac{1}{3}, \quad B = \frac{1}{3}.$$

Επομένως,

$$\int \frac{dx}{(x-2)(x-5)}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-5}\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-2}\,dx = \frac{1}{3}\log|x-5| - \frac{1}{3}\log|x-2| + C = \frac{1}{3}\log\left|\frac{x-5}{x-2}\right| + C.$$

3. **(Καταχρηστικό Ολοκλήρωμα)** *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε το ακόλουθο καταχρηστικό ολοκλήρωμα:

$$\int_0^2 \frac{2x-7}{x^2-7x+10}\,dx.$$

Εξηγήστε γιατί το ολοκλήρωμα είναι καταχρηστικό.

Λύση: Το ολοκλήρωμα είναι καταχρηστικό γιατί η ολοκληρωτέα συνάρτηση απειρίζεται καθώς το x τείνει στο δεξί άκρο ολοκλήρωσης. Καταρχάς, η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι της μορφής $g'(x)/g(x)$, επομένως εύκολα έχουμε

$$\int \frac{2x-7}{x^2-7x+10}\,dx = \log\left|x^2-7x+10\right| + C.$$

Ακολούθως:

$$\int_0^2 \frac{2x-7}{x^2-7x+10}\,dx = \lim_{h\to 2^-}\int_0^h \frac{2x-7}{x^2-7x+10}\,dx = \lim_{h\to 2^-}\left[\log|h^2-7h+10|\right] - \log 10 = -\infty - \log 10 = -\infty.$$

4. **(Διαφορικές Εξισώσεις)**

(α΄) *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε τη γενική λύση της ΔΕ

$$(\cos x)y'(x) - (\sin x)y(x) = (\cos x)^2$$

στο διάστημα $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(β΄) *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε τη γενική λύση της ΔΕ

$$(\cos x)y'(x) + (\sin x)y(x) = (\cos x)^2$$

στο διάστημα $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως

$$(\cos x)y'(x) - (\sin x)y(x) = (\cos x)^2 \Leftrightarrow ((\cos x)y(x))' = \cos^2 x \Leftrightarrow ((\cos x)y(x))' = \frac{1+\cos 2x}{2}$$
$$\Leftrightarrow ((\cos x)y(x))' = \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}\right)' \Leftrightarrow (\cos x)y(x) = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C \Leftrightarrow y(x) = \frac{\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C}{\cos x}.$$

(β΄) Παρατηρούμε πως η ΔΕ είναι ισοδύναμη με την

$$y'(x) + \frac{\sin x}{\cos x}y(x) = \cos x.$$

Κατά τα γνωστά από τη θεωρία, επειδή

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} = -\log\cos x + C,$$

πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση με τον συντελεστή $e^{-\log\cos x} = \frac{1}{\cos x}$, επομένως η ΔΕ γίνεται

$$\frac{y'(x)}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x}y(x) = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{y(x)}{\cos x}\right)' = x' \Leftrightarrow \frac{y(x)}{\cos x} = x + C \Leftrightarrow y(x) = (x+C)\cos x.$$

5. **(Σειρές)** Να προσδιορίσετε αν οι ακόλουθες σειρές συγκλίνουν ή όχι:

(α΄) *(1 μονάδα)* $\sum \frac{(n+1)e^{5n+1}}{n!}$.

(β΄) *(1 μονάδα)* $\sum \frac{e^n + \log n}{(n^2+2)e^n + 10}$.

Λύση:

(α΄) Έστω

$$a_n = \frac{(n+1)e^{5n+1}}{n!},$$

επομένως η δοσμένη σειρά είναι η $\sum a_n$. Παρατηρούμε πως:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+2)e^{5n+6}}{(n+1)!}}{\frac{(n+1)e^{5n+1}}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} \times \frac{e^5}{n+1} = 0,$$

επομένως από το κριτήριο του λόγου η σειρά συγκλίνει.

(β΄) Θέτουμε

$$a_n = \frac{1 + \frac{\log n}{e^n}}{n^2 + 2 + \frac{10}{e^n}}, \qquad b_n = \frac{1}{n^2},$$

και παρατηρούμε ότι η δοσμένη σειρά είναι η $\sum a_n$, ενώ η σειρά $\sum b_n$ είναι γνωστό οτι συγκλίνει. Επίσης,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1 + \frac{\log n}{e^n}}{1 + \frac{2}{n^2} + \frac{10}{n^2 e^n}} = 1,$$

επομένως από το κριτήριο της σύγκρισης στο όριο, προκύπτει πως συγκλίνει και η δοσμένη σειρά.

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι, ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2021-2022

Οδηγίες (Διαβάστε τες!)

1. Διάρκεια εξέτασης: 120 ΛΕΠΤΑ.
2. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
3. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
4. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
5. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
6. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
7. Σύμφωνα με τον κανονισμό εξετάσεων, σε περίπτωση που διαπιστωθεί (κατά τη διάρκεια της εξέτασης είτε της διόρθωσης) αντιγραφή είτε απόπειρα αντιγραφής, θα ενημερωθούν τα αρμόδια όργανα του ιδρύματος.

Θέματα

1. **(Όρια)** *(2 μονάδες)* Δίνεται η συνάρτηση

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Προσδιορίστε τα ακόλουθα όρια, ή αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν:

$$\lim_{x\to 0} \min\{u(x), u(-x)\}, \qquad \lim_{x\to 0} u(x^2), \qquad \lim_{x\to\infty} u\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \lim_{x\to 0} u\left(\frac{1}{x}\right).$$

Δεν χρειάζεται να επικαλεστείτε τον ορισμό του ορίου.

2. **(Καταχρηστικά Ολοκληρώματα)** *(3 μονάδες)* Για κάθε ένα από τα παρακάτω ολοκληρώματα, να αποδείξετε ότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό που θα υπολογίσετε, ή ότι τείνει στο $\pm\infty$, ή οτι δεν συμβαίνει τίποτα από τα δύο:

$$\int_0^\infty e^{x^2}\, dx, \qquad \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{|x-1|}}\, dx, \qquad \int_0^\infty \left(\cos^2 x - \frac{1}{2}\right) dx.$$

3. **(Διαφορική Εξίσωση)** *(2 μονάδες)* Να προσδιορίσετε τη γενική λύση της ακόλουθης διαφορικής εξίσωσης, όπου $x > 0$ και $y(x) \neq 0$:

$$2y'(x)y(x)\sin(y^2(x)) = x\log x.$$

4. **(Σειρές)** *(3 μονάδες)* Να προσδιορίσετε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι ακόλουθες σειρές:

$$\sum \frac{n^3 \sin^2(10n)}{e^n}, \qquad \sum \frac{\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{n}\right) + \cos^2\left(\frac{1}{n}\right)}, \qquad \sum \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \cos\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

Τυπολόγιο

$$\cos(y-x)=\cos x\cos y+\sin x\sin y,\quad \sin\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$
$$\sin 2x=2\sin x\cos x,\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$$
$$\sin x+\sin y=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x+\cos y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x-\sin y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x-\cos y=-2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right],\quad \cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$$
$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right],\quad \cos x<\frac{\sin x}{x}<\frac{1}{\cos x},\ \cos\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0:0<|x-c|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.\qquad \forall\epsilon>0\ \exists\delta>0:c<x<c+\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$$
$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0:c-\delta<x<c\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.\qquad \forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}:x>X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$$
$$\forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}:x<X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.\qquad \forall M\in\mathbb{R}\exists\delta>0:0<|x-c|<\delta\Rightarrow f(x)>M.$$
$$\forall M\in\mathbb{R}\exists X\in\mathbb{R}:x>X\Rightarrow f(x)>M.\qquad \forall\epsilon>0\exists N\in\mathbb{N}:n>N\Rightarrow|a_n-L|<\epsilon.$$

$$|f(x)-f(x_0)|\le C|x-x_0|,\quad |f(y)-f(x)|\le C|y-x|$$
$$(\arcsin y)'=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arccos y)'=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arctan y)'=\frac{1}{1+y^2}$$
$$f(\theta x_0+(1-\theta)x_1)<\theta f(x_0)+(1-\theta)f(x_1)$$
$$L(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^{n}m_i(t_i-t_{i-1}),\quad U(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^{n}M_i(t_i-t_{i-1}),\quad \sum_{i=1}^{n}f(x_i)(t_i-t_{i-1})$$
$$\left\{\begin{array}{c}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}r=\sqrt{x^2+y^2},\\ \cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{array}\right\}$$
$$\frac{1}{2}\int_a^b f^2(\theta)\,d\theta,\quad \pi\int_a^b f^2,\ \ 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx,\quad \int_a^b A(t)\,dt,\quad \int_a^b\sqrt{(f'(x))^2+(g'(x))^2}\,dx$$
$$y'+P(x)y=Q(x),\quad y(x)=[S(x)+C]\exp[-R(x)]$$

$$P_{n,a}(x)\ \triangleq\ f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
$$y(x)=\left\{y_0+\int_{x_0}^{x}Q(u)\exp\left[\int_{x_0}^{u}P(t)\,dt\right]du\right\}\exp\left[-\int_{x_0}^{x}P(t)\,dt\right]$$
$$E_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x(x-t)^nf^{(n+1)}(t)\,dt,\quad |E_n(x)|\le M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$s_n=\sum_{k=1}^{n}f(k),\quad t_n=\int_1^n f(x)\,dx$$
$$S=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k,\quad s_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k,\quad 0<(-1)^n(S-s_n)<a_{n+1}$$
$$A_{\parallel}=\left[\frac{A\cdot B}{\|B\|^2}\right]B,\quad A_{\perp}=A-A_{\parallel},\quad (x-x_0,y-y_0)(A,B)=0\Leftrightarrow Ax+By=Ax_0+By_0$$
$$\begin{vmatrix}x-x_0&y-y_0&z-z_0\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}x-x_0&y-y_0&z-z_0\\x_1-x_0&y_1-y_0&z_1-z_0\\x_2-x_0&y_2-y_0&z_2-z_0\end{vmatrix}=0,$$
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\Leftrightarrow Ax+By+Cz=Ax_0+By_0+Cz_0$$

$$y^2=4px,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-\epsilon^2)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(\epsilon^2-1)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\left\{\begin{array}{c}u=(x-x_0)\cos\theta+(y-y_0)\sin\theta,\\ v=-(x-x_0)\sin\theta+(y-y_0)\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}$$
$$\left\{\begin{array}{c}x=x_0+u\cos\theta-v\sin\theta,\\ y=y_0+u\sin\theta+v\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0+u\\y_0+v\end{pmatrix},\quad \theta=\frac{1}{2}\text{arccot}\frac{A-C}{B}$$
$$\begin{vmatrix}x_0&y_0&z_0\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=x_0\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}-y_0\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}+z_0\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}x_0&y_0\\x_1&y_1\end{vmatrix}=x_0y_1-x_1y_0.$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 1, ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2021-2022
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΑΝ. ΚΑΘ. ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ

Λύσεις

1. **(Όρια)** *(2 μονάδες)* Δίνεται η συνάρτηση
$$u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$
Προσδιορίστε τα ακόλουθα όρια, ή αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν:
$$\lim_{x\to 0} \min\{u(x), u(-x)\}, \qquad \lim_{x\to 0} u(x^2), \qquad \lim_{x\to\infty} u\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \lim_{x\to 0} u\left(\frac{1}{x}\right).$$
Δεν χρειάζεται να επικαλεστείτε τον ορισμό του ορίου.

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε ότι $\min\{u(x), u(-x)\} = 0$ για όλα τα x, επομένως $\lim_{x\to 0} \min\{u(x), u(-x)\} = 0$.

(β΄) Παρατηρούμε ότι
$$u(x^2) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$
επομένως
$$\lim_{x\to 0} u(x^2) = 1.$$

(γ΄) Παρατηρούμε ότι $u\left(\frac{1}{x}\right) = 1$, για $x > 0$, ενώ η συνάρτηση δεν ορίζεται για $x \leq 0$. Επομένως $\lim_{x\to 0} u\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

(δ΄) Παρατηρούμε ότι για $x > 0$ έχουμε $u\left(\frac{1}{x}\right) = 1$, ενώ για $x < 0$ έχουμε $u\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, επομένως το δοσμένο όριο δεν υπάρχει, γιατί δεν ισούνται τα πλευρικά όρια.

2. **(Καταχρηστικά Ολοκληρώματα)** *(3 μονάδες)* Για κάθε ένα από τα παρακάτω ολοκληρώματα, να αποδείξετε ότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό που θα υπολογίσετε, ή ότι τείνει στο $\pm\infty$, ή ότι δεν συμβαίνει τίποτα από τα δύο.
$$\int_0^\infty e^{x^2}\,dx, \qquad \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{|x-1|}}\,dx, \qquad \int_0^\infty \left(\cos^2 x - \frac{1}{2}\right)dx.$$

Λύση:

(α΄) Το αντίστοιχο αόριστο ολοκλήρωμα δεν μπορεί να υπολογιστεί σε κλειστή μορφή χρησιμοποιώντας γνωστές συναρτήσεις. Παρατηρούμε, όμως, πως
$$\int_0^\infty e^{x^2}\,dx = \lim_{h\to\infty} \int_0^h e^{x^2}\,dx \geq \lim_{h\to\infty} \int_0^h 1\,dx = \lim_{h\to\infty} h = \infty,$$
επομένως και το δοσμένο καταχρηστικό ολοκλήρωμα ισούται με άπειρο.

(β΄)
$$\begin{aligned}\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{|x-1|}}\,dx &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx + \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \lim_{h\to 1^-} \int_0^h \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx + \lim_{h\to 1^+} \int_h^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx \\ &= \lim_{h\to 1^-} \left[-2\sqrt{1-x}\right]_0^h + \lim_{h\to 1^+} \left[2\sqrt{x-1}\right]_h^3 = 2(1+\sqrt{2}).\end{aligned}$$

(γ΄)
$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left(\cos^2 x - \frac{1}{2}\right)dx &= \int_0^\infty \left(\frac{1+\cos 2x}{2} - \frac{1}{2}\right)dx = \int_0^\infty \left(\frac{\cos 2x}{2}\right)dx \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{\sin 2x}{4}\right)'dx = \lim_{h\to\infty} \left[\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^h,\end{aligned}$$
που δεν συγκλίνει ούτε σε πραγματικό αριθμό, ούτε στο $\pm\infty$. Το ίδιο ισχύει και για το αρχικό καταχρηστικό ολοκλήρωμα.

3. **(Διαφορική Εξίσωση)** *(2 μονάδες)* Να προσδιορίσετε τη γενική λύση της ακόλουθης διαφορικής εξίσωσης, όπου $x > 0$ και $y(x) \neq 0$:
$$2y'(x)y(x)\sin(y^2(x)) = x\log x.$$
Λύση: Η ΔΕ είναι χωριζομένων μεταβλητών, επομένως, κατά τα γνωστά από τη θεωρία,
$$2y'(x)y(x)\sin(y^2(x)) = x\log x \Leftrightarrow 2y\sin(y^2)dy = x\log x dx \Leftrightarrow \int 2y\sin(y^2)dy = \int x\log x dx.$$
Σχετικά με τα δύο αόριστα ολοκληρώματα, έχουμε:
$$\int x\log x\,dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)'\log x\,dx = \frac{x^2}{2}\log x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\,dx$$
$$= \frac{x^2}{2}\log x - \int\left(\frac{x^2}{4}\right)'\,dx = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4} + C,$$
και
$$\int 2y\sin(y^2)dy = -\cos y^2 + C,$$
επομένως, κατά τα γνωστά από τη θεωρία των ΔΕ χωριζομένων μεταβλητών, οι λύσεις της ΔΕ ικανοποιούν την σχέση
$$-\cos y^2 = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4} + C,$$

4. **(Σειρές)** *(3 μονάδες)* Να προσδιορίσετε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι ακόλουθες σειρές:
$$\sum \frac{n^3\sin^2(10n)}{e^n}, \qquad \sum \frac{\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)+\cos^2\left(\frac{1}{n}\right)}, \qquad \sum \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)+\cos\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

Λύση:

(α΄) Έστω η σειρά $\sum b_n = \sum \frac{n^3}{e^n}$, για την οποία έχουμε
$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^3}{e^{n+1}}}{\frac{n^3}{e^n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 e^{-1} < 1,$$
επομένως από το Κριτήριο του Λόγου η σειρά $\sum b_n$ συγκλίνει. Επιπλέον, έχουμε
$$0 \leq \frac{n^3\sin^2(10n)}{e^n} \leq \frac{n^3}{e^n},$$
και από το Κριτήριο της Σύγκρισης προκύπτει ότι και η δοσμένη σειρά συγκλίνει.

(β΄) Έστω οι ακολουθίες
$$a_n = \frac{\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)+\cos^2\left(\frac{1}{n}\right)} = \sin^2\left(\frac{1}{n}\right), \qquad b_n = \frac{1}{n^2}.$$
Παρατηρούμε πως
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 1,$$
επομένως, σύμφωνα με το Κριτήριο Σύγκρισης στο Όριο, και επειδή είναι γνωστό ότι η σειρά $\sum b_n$ συγκλίνει, η δοσμένη σειρά συγκλίνει.

(γ΄) Έστω οι ακολουθίες
$$a_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)+\cos\left(\frac{1}{n}\right)}, \qquad b_n = \frac{1}{n}.$$
Παρατηρούμε πως
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}\left[\sin\left(\frac{1}{n}\right)+\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right]} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x\left[\sin x+\cos x\right]}$$
$$= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sin x+\cos x} = 1\times\frac{1}{1+0} = 1,$$
επομένως, σύμφωνα με το Κριτήριο Σύγκρισης στο Όριο, και επειδή είναι γνωστό ότι η σειρά $\sum b_n$ αποκλίνει, η δοσμένη σειρά επίσης αποκλίνει.