ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι, ΚΑΘ: ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ
ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ, 15/2/13.

ΟΝΟΜΑ ΦΟΙΤΗΤΗ: ....

Οδηγίες

1. **Συμπληρώστε το όνομά σας άνω, και παραδώστε το παρόν με τις λύσεις**.
2. Διάρκεια εξέτασης: 2 ΩΡΕΣ.
3. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
4. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
5. Οι λύσεις πρέπει να γραφούν αποκλειστικά στην παρεχόμενη κόλλα.
6. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε μολύβι ή/και στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός από κόκκινο.
7. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
8. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
9. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.

Θέματα

1. **(Εφαπτόμενη από την αρχή των αξόνων)** *(1.5 μονάδα)* Έστω συνάρτηση $f(x)$ συνεχής στο $[3,5]$ και παραγωγίσιμη στο $(3,5)$, για την οποία επιπλέον δίνεται ότι $f(3)=6$ και $f(5)=10$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει σημείο $x_0 \in (3,5)$ τέτοιο ώστε η εφαπτόμενη του γραφήματος στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων. *(Υπόδειξη: εξετάστε την συνάρτηση* $g(x) = \frac{f(x)}{x}$*).*

2. **(Ορισμένο Ολοκλήρωμα)**

   (α΄) *(1 μονάδα)* Δίνεται ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(a+b-x) = f(x)$ για κάποια $a, b \in \mathbb{R}$, και για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι ισχύει η εξίσωση

   $$\int_a^b x f(x)\, dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)\, dx.$$

   (Υπόδειξη: μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ολοκλήρωση με αντικατάσταση στο αριστερό σκέλος.)

   (β΄) *(0.5 μονάδα)* Δείξτε ότι

   $$\int \frac{1}{1+\sin x}\, dx = \tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + C.$$

   (Υπόδειξη: $2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$*.)*

(γ′) *(0.5 μονάδα)* Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα σκέλη (ακόμα και αν δεν τα έχετε αποδείξει), να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα
$$\int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{1+\sin x}.$$
Αιτιολογήστε πλήρως τη χρήση των προηγούμενων σκελών.

3. **(Μήκος Καμπύλης)** *(1.5 μονάδα)* Νεότερες λαογραφικές μελέτες επιβεβαίωσαν ότι όταν κυλά ο τέντζερης να βρει το καπάκι ακολουθεί τροχιά που διαρκεί για άπειρο χρόνο και περιγράφεται από την καμπύλη
$$x(t) = e^{-2t}\sin(10t), \quad y(t) = e^{-2t}\cos(10t), \quad t > 0.$$
Να υπολογίσετε το συνολικό μήκος της τροχιάς, και να σχεδιάσετε (πολύ προσεγγιστικά) την καμπύλη.

4. **(Ολοκληρωτική Εξίσωση)** *(1.5 μονάδα)* Έστω συνάρτηση $f(x) : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ θετική και παραγωγίσιμη, με $f(1) = 1$, που ικανοποιεί την εξίσωση
$$\int_1^x f(t)\,dt = \frac{f(x)}{x} + K, \quad \forall x > 0,$$
όπου ο άγνωστος $K \in \mathbb{R}$. Προσδιορίσετε την $f(x)$.

5. **(Σειρές)** *(2 μονάδες)* Να προσδιορίσετε αν συγκλίνουν οι ακόλουθες σειρές:
$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\log n)^3}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right).$$
(Υπόδειξη: για την δεύτερη σειρά δίνεται ότι $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$*).*

6. **(Παραβολή)**

(α′) *(0.5 μονάδα)* Να σχεδιάσετε παραβολή με κέντρο το σημείο $(2,2)$, άξονα συμμετρίας την $y = 4 - x$, διευθετούσα την $y = x - 1$, και $p = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(β′) *(1 μονάδα)* Να βρείτε την εξίσωση που ικανοποιεί η άνω παραβολή στο σύστημα συντεταγμένων xy.

Τυπολόγιο

$$\cos(y-x) = \cos x \cos y + \sin x \sin y, \quad \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$
$$\sin 2x = 2\sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$
$$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right), \quad \cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right), \quad \cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right], \quad \cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]$$
$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right], \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}, \quad \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : 0 < |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$ $\quad\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : c < x < c + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$

$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : c - \delta < x < c \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$ $\quad\forall \epsilon > 0 \exists X \in \mathbb{R} : x > X \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$

$\forall \epsilon > 0 \exists X \in \mathbb{R} : x < X \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$ $\quad\forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 : 0 < |x-c| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$

$\forall M \in \mathbb{R} \exists X \in \mathbb{R} : x > X \Rightarrow f(x) > M.$ $\quad\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon.$

$$|f(x) - f(x_0)| \le C|x - x_0|, \quad |f(y) - f(x)| \le C|y - x|$$
$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad (\arccos y)' = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad (\arctan y)' = \frac{1}{1+y^2}$$
$$f(\theta x_0 + (1-\theta)x_1) < \theta f(x_0) + (1-\theta) f(x_1)$$
$$L(f,P) \triangleq \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}), \quad U(f,P) \triangleq \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}), \quad \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(t_i - t_{i-1})$$
$$\left\{\begin{array}{c} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{array}\right\}$$
$$\frac{1}{2}\int_a^b f^2(\theta)\,d\theta, \quad \pi\int_a^b f^2, \quad 2\pi\int_a^b x f(x)\,dx, \quad \int_a^b A(t)\,dt, \quad \int_a^b \sqrt{(f'(x))^2 + (g'(x))^2}\,dx$$
$$y' + P(x)y = Q(x), \quad y(x) = [S(x) + C]\exp[-R(x)]$$
$$y(x) = \left\{y_0 + \int_{x_0}^{x} Q(u)\exp\left[\int_{x_0}^{u} P(t)\,dt\right]du\right\}\exp\left[-\int_{x_0}^{x} P(t)\,dt\right]$$
$$E_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt, \quad |E_n(x)| \le M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k), \quad t_n = \int_1^n f(x)\,dx$$
$$S = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k, \quad s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k, \quad 0 < (-1)^n(S - s_n) < a_{n+1}$$
$$A_\parallel = \left[\frac{A\cdot B}{\|B\|^2}\right]B, \quad A_\perp = A - A_\parallel, \quad (x-x_0, y-y_0)(A,B) = 0 \Leftrightarrow Ax + By = Ax_0 + By_0$$
$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0,$$
$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0 \Leftrightarrow Ax + By + Cz = Ax_0 + By_0 + Cz_0$$
$$y^2 = 4px, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-\epsilon^2)} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(\epsilon^2-1)} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
$$\left\{\begin{array}{c} u = (x-x_0)\cos\theta + (y-y_0)\sin\theta, \\ v = -(x-x_0)\sin\theta + (y-y_0)\cos\theta \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$
$$\left\{\begin{array}{c} x = x_0 + u\cos\theta - v\sin\theta, \\ y = y_0 + u\sin\theta + v\cos\theta \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0+u \\ y_0+v \end{pmatrix}, \quad \theta = \frac{1}{2}\operatorname{arccot}\frac{A-C}{B}$$
$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = x_0\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_0\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_0\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = x_0y_1 - x_1y_0.$$

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι, ΚΑΘ: ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ
ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ, 15/2/13

ΟΝΟΜΑ ΦΟΙΤΗΤΗ: ....

Οδηγίες

1. **Συμπληρώστε το όνομά σας άνω, και παραδώστε το παρόν με τις λύσεις.**
2. Διάρκεια εξέτασης: 2 ΩΡΕΣ.
3. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
4. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
5. Οι λύσεις πρέπει να γραφούν αποκλειστικά στην παρεχόμενη κόλλα.
6. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε μολύβι ή/και στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός από κόκκινο.
7. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
8. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
9. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.

Θέματα

1. **(Εφαπτόμενη από την αρχή των αξόνων)** *(1.5 μονάδα)* Έστω συνάρτηση $f(x)$ συνεχής στο $[5, 10]$ και παραγωγίσιμη στο $(5, 10)$, για την οποία επιπλέον δίνεται ότι $f(5) = 15$ και $f(10) = 30$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει σημείο $x_0 \in (5, 10)$ τέτοιο ώστε η εφαπτόμενη του γραφήματος στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων. *(Υπόδειξη: εξετάστε την συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$).*

2. **(Ορισμένο Ολοκλήρωμα)**

   (α΄) *(1 μονάδα)* Δίνεται ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(a+b-x) = f(x)$ για κάποια $a, b \in \mathbb{R}$, και για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι ισχύει η εξίσωση

   $$\int_a^b x f(x)\, dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)\, dx.$$

   (Υπόδειξη: μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ολοκλήρωση με αντικατάσταση στο αριστερό σκέλος.)

   (β΄) *(0.5 μονάδα)* Δείξτε ότι

   $$\int \frac{1}{1+\sin x}\, dx = \tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + C.$$

   (Υπόδειξη: $2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$.)

(γ′) *(0.5 μονάδα)* Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα σκέλη (ακόμα και αν δεν τα έχετε αποδείξει), να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\pi \frac{x\,dx}{1+\sin x}.$$

Αιτιολογήστε πλήρως τη χρήση των προηγούμενων σκελών.

3. **(Μήκος Καμπύλης)** *(1.5 μονάδα)* Νεότερες λαογραφικές μελέτες επιβεβαίωσαν ότι όταν κυλά ο τέντζερης να βρει το καπάκι ακολουθεί τροχιά που διαρκεί για άπειρο χρόνο και περιγράφεται από την καμπύλη

$$x(t) = e^{-3t}\cos(10t), \quad y(t) = e^{-3t}\sin(10t), \quad t > 0.$$

Να υπολογίσετε το συνολικό μήκος της τροχιάς, και να σχεδιάσετε (πολύ προσεγγιστικά) την καμπύλη.

4. **(Ολοκληρωτική Εξίσωση)** *(1.5 μονάδα)* Έστω συνάρτηση $f(x) : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ θετική και παραγωγίσιμη, με $f(1) = 1$, που ικανοποιεί την εξίσωση

$$\int_2^x f(t)\,dt = \frac{f(x)}{x^2} + K, \quad \forall x > 0,$$

όπου ο άγνωστος $K \in \mathbb{R}$. Προσδιορίσετε την $f(x)$.

5. **(Σειρές)** *(2 μονάδες)* Να προσδιορίσετε αν συγκλίνουν οι ακόλουθες σειρές:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\log n)^4}{3^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{3n^3}\right).$$

(Υπόδειξη: για την δεύτερη σειρά δίνεται ότι $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$*).*

6. **(Παραβολή)**

(α′) *(0.5 μονάδα)* Να σχεδιάσετε παραβολή με κέντρο το σημείο $(2,2)$, άξονα συμμετρίας την $y = x$, διευθετούσα την $y = 3 - x$, και $p = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(β′) *(1 μονάδα)* Να βρείτε την εξίσωση που ικανοποιεί η άνω παραβολή στο σύστημα συντεταγμένων xy.

Τυπολόγιο

$$\cos(y-x)=\cos x\cos y+\sin x\sin y,\quad \sin\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$
$$\sin 2x=2\sin x\cos x,\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$$
$$\sin x+\sin y=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x+\cos y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x-\sin y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x-\cos y=-2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right],\quad \cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$$
$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right],\quad \cos x<\frac{\sin x}{x}<\frac{1}{\cos x},\quad \cos\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0: 0<|x-c|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$ $\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0: c<x<c+\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$

$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0: c-\delta<x<c\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$ $\forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}: x>X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$

$\forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}: x<X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$ $\forall M\in\mathbb{R}\exists\delta>0: 0<|x-c|<\delta\Rightarrow f(x)>M.$

$\forall M\in\mathbb{R}\exists X\in\mathbb{R}: x>X\Rightarrow f(x)>M.$ $\forall\epsilon>0\exists N\in\mathbb{N}: n>N\Rightarrow|a_n-L|<\epsilon.$

$$|f(x)-f(x_0)|\le C|x-x_0|,\quad |f(y)-f(x)|\le C|y-x|$$
$$(\arcsin y)'=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arccos y)'=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arctan y)'=\frac{1}{1+y^2}$$
$$f(\theta x_0+(1-\theta)x_1)<\theta f(x_0)+(1-\theta)f(x_1)$$
$$L(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^n m_i(t_i-t_{i-1}),\quad U(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^n M_i(t_i-t_{i-1}),\quad \sum_{i=1}^n f(x_i)(t_i-t_{i-1})$$
$$\left\{\begin{array}{c} x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} r=\sqrt{x^2+y^2},\\ \cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{array}\right\}$$
$$\frac{1}{2}\int_a^b f^2(\theta)\,d\theta,\quad \pi\int_a^b f^2,\quad 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx,\quad \int_a^b A(t)\,dt,\quad \int_a^b\sqrt{(f'(x))^2+(g'(x))^2}\,dx$$
$$y'+P(x)y=Q(x),\quad y(x)=[S(x)+C]\exp[-R(x)]$$
$$y(x)=\left\{y_0+\int_{x_0}^x Q(u)\exp\left[\int_{x_0}^u P(t)\,dt\right]du\right\}\exp\left[-\int_{x_0}^x P(t)\,dt\right]$$
$$E_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt,\quad |E_n(x)|\le M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$s_n=\sum_{k=1}^n f(k),\quad t_n=\int_1^n f(x)\,dx$$
$$S=\sum_{k=1}^\infty(-1)^{k-1}a_k,\quad s_n=\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}a_k,\quad 0<(-1)^n(S-s_n)<a_{n+1}$$
$$A_\parallel=\left[\frac{A\cdot B}{\|B\|^2}\right]B,\quad A_\perp=A-A_\parallel,\quad (x-x_0,y-y_0)(A,B)=0\Leftrightarrow Ax+By=Ax_0+By_0$$
$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0\\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0\end{vmatrix}=0,$$
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\Leftrightarrow Ax+By+Cz=Ax_0+By_0+Cz_0$$
$$y^2=4px,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-\epsilon^2)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(\epsilon^2-1)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\left\{\begin{array}{c} u=(x-x_0)\cos\theta+(y-y_0)\sin\theta,\\ v=-(x-x_0)\sin\theta+(y-y_0)\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}$$
$$\left\{\begin{array}{c} x=x_0+u\cos\theta-v\sin\theta,\\ y=y_0+u\sin\theta+v\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0+u\\ y_0+v\end{pmatrix},\quad \theta=\frac{1}{2}\operatorname{arccot}\frac{A-C}{B}$$
$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=x_0\begin{vmatrix} y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}-y_0\begin{vmatrix} x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}+z_0\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} x_0 & y_0\\ x_1 & y_1\end{vmatrix}=x_0y_1-x_1y_0.$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 1, 2013-2014
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Λύσεις Τελικής Εξέτασης Φεβρουαρίου Περιόδου 2013-2014

1. **(Εφαπτόμενη από την αρχή των αξόνων - Ομάδα Α)** Έστω συνάρτηση $f(x)$ συνεχής στο $[3,5]$ και παραγωγίσιμη στο $(3,5)$, για την οποία επιπλέον δίνεται ότι $f(3)=6$ και $f(5)=10$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει σημείο $x_0 \in (3,5)$ τέτοιο ώστε η εφαπτόμενη στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων. *(Υπόδειξη: εξετάστε την συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{x}$).*

   Λύση: Προκειμένου η εφαπτόμενη στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων, πρέπει το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ των σημείων $(0,0)$ και $(x_0, f(x_0))$ να έχει κλίση ίση με $f'(x_0)$, δηλαδή

$$\frac{f(x_0)-0}{x_0-0}=f'(x_0) \Leftrightarrow \frac{f(x_0)}{x_0}=f'(x_0).$$

   Παρατηρήστε επίσης ότι η $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ είναι και αυτή συνεχής στο $[3,5]$ και παραγωγίσιμη στο $(3,5)$. Επιπλέον, $g(3)=\frac{f(3)}{3}=2$ και $g(5)=\frac{f(5)}{5}=2$, άρα $g(3)=g(5)$, και με εφαρμογή του Θεωρήματος του Rolle προκύπτει πως υπάρχει x_0 τέτοιο ώστε $g'(x_0)=0$. Παρατηρήστε πως

$$g'(x)=\frac{f'(x)x-f(x)(x)'}{x^2}=\frac{f'(x)x-f(x)}{x^2}. \tag{1}$$

   Έχουμε:

$$g'(x_0)=0 \Rightarrow \frac{f'(x_0)x_0-f(x_0)}{x_0^2}=0 \Rightarrow f'(x_0)x_0=f(x_0) \Rightarrow \frac{f(x_0)}{x_0}=f'(x_0),$$

   και από την (1) προκύπτει ότι το ζητούμενο σημείο είναι το x_0.

2. **(Εφαπτόμενη από την αρχή των αξόνων - Ομάδα Β)** Έστω συνάρτηση $f(x)$ συνεχής στο $[5,10]$ και παραγωγίσιμη στο $(5,10)$, για την οποία επιπλέον δίνεται ότι $f(5)=15$ και $f(10)=30$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει σημείο $x_0 \in (5,10)$ τέτοιο ώστε η εφαπτόμενη στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων. *(Υπόδειξη: εξετάστε την συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{x}$).*

   Λύση: Προκειμένου η εφαπτόμενη στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων, πρέπει το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ των σημείων $(0,0)$ και $(x_0, f(x_0))$ να έχει κλίση ίση με $f'(x_0)$, δηλαδή

$$\frac{f(x_0)-0}{x_0-0}=f'(x_0) \Leftrightarrow \frac{f(x_0)}{x_0}=f'(x_0).$$

   Παρατηρήστε επίσης ότι η $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ είναι και αυτή συνεχής στο $[3,5]$ και παραγωγίσιμη στο $(5,10)$. Επιπλέον, $g(5)=\frac{f(5)}{5}=3$ και $g(10)=\frac{f(10)}{10}=3$, άρα $g(5)=g(10)$, και με εφαρμογή του Θεωρήματος του Rolle προκύπτει πως υπάρχει x_0 τέτοιο ώστε $g'(x_0)=0$. Παρατηρήστε πως

$$g'(x)=\frac{f'(x)x-f(x)(x)'}{x^2}=\frac{f'(x)x-f(x)}{x^2}. \tag{2}$$

   Έχουμε:

$$g'(x_0)=0 \Rightarrow \frac{f'(x_0)x_0-f(x_0)}{x_0^2}=0 \Rightarrow f'(x_0)x_0=f(x_0) \Rightarrow \frac{f(x_0)}{x_0}=f'(x_0),$$

   και από την (1) προκύπτει ότι το ζητούμενο σημείο είναι το x_0.

3. **(Ορισμένο Ολοκλήρωμα - Ομάδες Α,Β)**

   (α') Δίνεται ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(a+b-x)=f(x)$ για κάποια $a,b\in\mathbb{R}$, και για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι ισχύει η εξίσωση

$$\int_a^b xf(x)\,dx=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx.$$

   (Υπόδειξη: μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ολοκλήρωση με αντικατάσταση στο αριστερό σκέλος.)

(β′) Δείξτε ότι

$$\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx = \tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+C.$$

(Υπόδειξη: $2\cos^2\theta = 1+\cos 2\theta$.)

(γ′) Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα σκέλη (ακόμα και αν δεν τα έχετε αποδείξει), να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\pi \frac{x\,dx}{1+\sin x}.$$

Αιτιολογήστε πλήρως τη χρήση των προηγούμενων σκελών.

Λύση:

(α′) Θέτουμε, στο ολοκλήρωμα του αριστερού σκέλους, $u = a+b-x$. Έχουμε $x = a \Rightarrow u = b$ και $x = b \Rightarrow u = a$. Επομένως,

$$\begin{aligned}\int_a^b xf(x)\,dx = -\int_b^a (a+b-u)f(a+b-u)\,du &= \int_a^b (a+b)f(u)\,du - \int_a^b uf(u)\,du \\ &= \int_a^b (a+b)f(x)\,dx - \int_a^b xf(x)\,dx.\end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι το ολοκλήρωμα του αριστερού σκέλους εμφανίζεται πάλι, στο δεξί σκέλος. Εύκολα προκύπτει το ζητούμενο.

(β′) Αρκεί να παραγωγίσουμε το δεξί σκέλος:

$$\begin{aligned}\left[\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]' &= \left[\frac{\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\right]' = \frac{\frac{1}{2}\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \frac{1}{1+\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{1+\sin x}.\end{aligned}$$

(γ′) Εφαρμόζουμε το πρώτο σκέλος με $a=0, b=\pi$, και $f(x) = \frac{1}{1+\sin x}$. Πράγματι,

$$f(0+\pi-x) = \frac{1}{1+\sin(0+\pi-x)} = \frac{1}{1+\sin x} = f(x).$$

Επομένως,

$$\int_0^\pi \frac{x\,dx}{1+\sin x} = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{dx}{1+\sin x} = \frac{\pi}{2}\left[\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}\times 2\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi.$$

Στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το δεύτερο σκέλος.

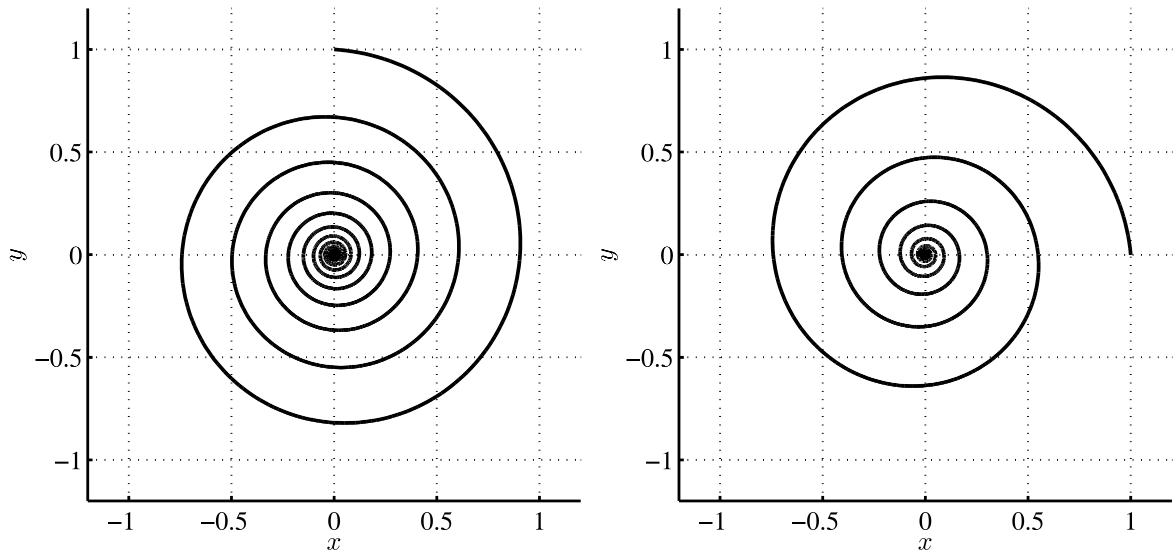
4. **(Μήκος Καμπύλης - Ομάδες Α,Β)** Νεότερες λαογραφικές μελέτες επιβεβαίωσαν ότι όταν κυλά ο τέντζερης να βρει το καπάκι ακολουθεί τροχιά που διαρκεί για άπειρο χρόνο και περιγράφεται από την καμπύλη

$$x(t) = e^{-at}\sin(bt), \quad y(t) = e^{-at}\cos(bt), \quad t>0. \tag{3}$$

Να υπολογίσετε το συνολικό μήκος της τροχιάς, και να σχεδιάσετε (πολύ προσεγγιστικά) την καμπύλη.

Λύση: Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$\begin{aligned}L &= \int_0^\infty \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt \\ &= \int_0^\infty \sqrt{(-ae^{-at}\sin(bt)+be^{-at}\cos(bt))^2+(-ae^{-at}\cos(bt)-be^{-at}\sin(bt))^2}\,dt \\ &= \int_0^\infty e^{-at}\sqrt{a^2\sin^2(bt)+b^2\cos^2(bt)+a^2\cos^2(bt)+b^2\sin^2(bt)}\,dt \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\int_0^\infty e^{-at}\,dt = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\int_0^\infty \left[-e^{-at}\right]'\,dt \\ &= \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\times(1-0) = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}.\end{aligned}$$



Σχήμα 1: Άσκηση 4.

Προφανώς το αποτέλεσμα ισχύει και όταν η καμπύλη είναι η

$$x(t) = e^{-at}\cos(bt), \quad y(t) = e^{-at}\sin(bt), \quad t > 0. \tag{4}$$

5. **(Ολοκληρωτική Εξίσωση - Ομάδα Α)** Έστω συνάρτηση $f(x) : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ θετική και παραγωγίσιμη, με $f(1) = 1$, που ικανοποιεί την εξίσωση

$$\int_1^x f(t)\, dt = \frac{f(x)}{x} + K, \quad \forall x > 0,$$

όπου ο άγνωστος $K \in \mathbb{R}$. Προσδιορίσετε την $f(x)$.

Λύση: Αφού η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη, μπορούμε να παραγωγίσουμε και τα δύο σκέλη, και με χρήση του θεμελιώδους θεωρήματος του ολοκληρωτικού λογισμού έχουμε

$$f(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} \Rightarrow f(x)(x^2+1) = f'(x)x \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = x + \frac{1}{x} \Rightarrow (\log f(x))' = \left(\frac{x^2}{2} + \log x\right)'$$
$$\Rightarrow \log f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \log x + C \Rightarrow f(x) = \exp\left(\frac{x^2}{2} + \log x\right)\exp(C) = C_1 x \exp\left(\frac{x^2}{2}\right),$$

όπου $C_1 > 0$. Με αντικατάσταση της συνθήκης $f(1) = 1$, προκύπτει τελικά πως $C_1 = \exp\left(-\frac{1}{2}\right)$ και

$$f(x) = x\exp\left(\frac{x^2-1}{2}\right).$$

6. **(Ολοκληρωτική Εξίσωση - Ομάδα Β)** Έστω συνάρτηση $f(x) : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ θετική και παραγωγίσιμη, με $f(1) = 1$, που ικανοποιεί την εξίσωση

$$\int_2^x f(t)\, dt = \frac{f(x)}{x^2} + K, \quad \forall x > 0,$$

όπου ο άγνωστος $K \in \mathbb{R}$. Προσδιορίσετε την $f(x)$.

Λύση: Αφού η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη, μπορούμε να παραγωγίσουμε και τα δύο σκέλη, και με χρήση του θεμελιώδους θεωρήματος του ολοκληρωτικού λογισμού έχουμε

$$f(x)=\frac{f'(x)x^2-2f(x)x}{x^4}=\frac{f'(x)x-2f(x)}{x^3}\Rightarrow f(x)x^3=xf'(x)-2f(x)\Rightarrow f(x)(x^3+2)=f'(x)x$$
$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=x^2+\frac{2}{x}\Rightarrow (\log f(x))'=\left(\frac{x^3}{3}+2\log x\right)'\Rightarrow \log f(x)=\frac{x^3}{3}+2\log x+C$$
$$\Rightarrow f(x)=\exp\left(\frac{x^3}{3}+2\log x+C\right)\Rightarrow f(x)=C_1x^2\exp\left(\frac{x^3}{3}\right),$$

όπου $C_1>0$. Με αντικατάσταση της συνθήκης $f(1)=1$, προκύπτει τελικά πως $C_1=\exp\left(-\frac{1}{3}\right)$ και

$$f(x)=x^2\exp\left(\frac{x^3-1}{3}\right).$$

7. **(Σειρές - Ομάδα Α)** Να προσδιορίσετε αν συγκλίνουν οι ακόλουθες σειρές:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(\log n)^3}{2^n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right).$$

(Υπόδειξη: για την δεύτερη σειρά δίνεται ότι $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$*).*

Λύση:

(α') Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο του λόγου:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(\log(n+1))^3}{2^{n+1}}}{\frac{(\log n)^3}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\times\left(\frac{\log(n+1)}{\log n}\right)^3.$$

Όμως,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{\log n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=1,$$

όπου στην πρώτη ισότητα χρησιμοποιήθηκε ο Κανόνας του L'Hôpital. Επομένως, προκύπτει πως

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}\times 1^3=\frac{1}{2},$$

και η σειρά συγκλίνει.

(β') Θα χρησιμοποιήσουμε το Κριτήριο της Σύγκρισης στο Όριο. Έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right)}{\frac{1}{2n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{2n^2}\right)'}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2n^2}\right)^2}\left(\frac{1}{2n^2}\right)'}{\left(\frac{1}{2n^2}\right)'}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2n^2}\right)^2}=1,$$

επομένως, αφού συγκλίνει η $\sum\frac{1}{2n^2}$, θα συγκλίνει και η δοσμένη. Στη πρώτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τον Κανόνα του L'Hôpital.

8. **(Σειρές - Ομάδα Β)** Να προσδιορίσετε αν συγκλίνουν οι ακόλουθες σειρές:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(\log n)^4}{3^n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{1}{3n^3}\right).$$

(Υπόδειξη: για την δεύτερη σειρά δίνεται ότι $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$*).*

Λύση:

(α') Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο του λόγου:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(\log(n+1))^4}{3^{n+1}}}{\frac{(\log n)^4}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\times\left(\frac{\log(n+1)}{\log n}\right)^4.$$

Όμως,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{\log n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=1,$$

όπου στην πρώτη ισότητα χρησιμοποιήθηκε ο Κανόνας του L'Hôpital. Επομένως, προκύπτει πως

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{3}\times 1^4=\frac{1}{3},$$

και η σειρά συγκλίνει.

(β′) Θα χρησιμοποιήσουμε το Κριτήριο της Σύγκρισης στο Όριο. Έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\arctan\left(\frac{1}{3n^3}\right)}{\frac{1}{3n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\arctan\left(\frac{1}{3n^3}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{3n^3}\right)'}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\left(\frac{1}{3n^3}\right)^2}\left(\frac{1}{3n^3}\right)'}{\left(\frac{1}{3n^3}\right)'}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{1}{3n^3}\right)^2}=1,$$

επομένως, αφού συγκλίνει η $\sum\frac{1}{3n^3}$, θα συγκλίνει και η δοσμένη. Στη πρώτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τον Κανόνα του L'Hôpital.

9. **(Παραβολή - Ομάδα Α)**

(α′) Να σχεδιάσετε παραβολή με κορυφή το σημείο $(2,2)$, άξονα συμμετρίας την $y=4-x$, διευθετούσα την $y=x-1$, και $p=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(β′) Να βρείτε την εξίσωση που ικανοποιεί η άνω παραβολή στο σύστημα συντεταγμένων xy.

Λύση: Η παραβολή έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 2 (αριστερά). Στο σύστημα συντεταγμένων uv που έχει κέντρο το $(x_0,y_0)=(2,2)$ και είναι περιστραμμένο σε σχέση με το αρχικό κατά γωνία $\frac{\pi}{4}$, η παραβολή έχει εξίσωση

$$4pv=u^2\Leftrightarrow 2\sqrt{2}v=u^2. \tag{5}$$

Οι συντεταγμένες των δύο συστημάτων συνδέονται με τον μετασχηματισμό

$$\begin{aligned} u &= \cos\theta(x-x_0)+\sin\theta(y-y_0)=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-2)+\frac{\sqrt{2}}{2}(y-2)=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y-4),\\ v &= -\sin\theta(x-x_0)+\cos\theta(y-y_0)=-\frac{\sqrt{2}}{2}(x-2)+\frac{\sqrt{2}}{2}(y-2)=\frac{\sqrt{2}}{2}(y-x).\end{aligned}$$

Με αντικατάσταση στην (5), προκύπτει

$$\begin{aligned}&4\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}(y-x)=\frac{1}{2}(x+y-4)^2\Leftrightarrow 2(y-x)=\frac{1}{2}(x+y-4)^2\\ &\Leftrightarrow 4y-4x=x^2+y^2+16+2xy-8x-8y\Leftrightarrow x^2+y^2+2xy-4x-12y+16=0.\end{aligned}$$

10. **(Παραβολή - Ομάδα Β)**

(α′) Να σχεδιάσετε παραβολή με κέντρο το σημείο $(2,2)$, άξονα συμμετρίας την $y=x$, διευθετούσα την $y=3-x$, και $p=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

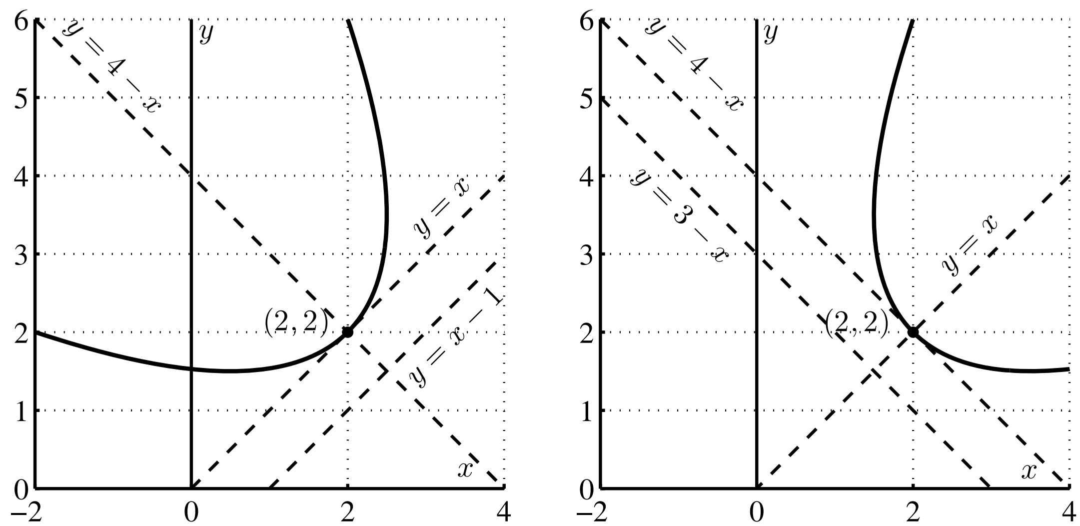
(β′) Να βρείτε την εξίσωση που ικανοποιεί η άνω παραβολή.

Λύση: Η παραβολή έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 2 (δεξιά). Στο σύστημα συντεταγμένων uv που έχει κέντρο το $(x_0,y_0)=(2,2)$ και είναι περιστραμμένο σε σχέση με το αρχικό κατά γωνία $\frac{\pi}{4}$, η παραβολή έχει εξίσωση

$$4pu=v^2\Leftrightarrow 2\sqrt{2}u=v^2. \tag{6}$$

Οι συντεταγμένες των δύο συστημάτων συνδέονται με τον μετασχηματισμό

$$\begin{aligned} u &= \cos\theta(x-x_0)+\sin\theta(y-y_0)=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-2)+\frac{\sqrt{2}}{2}(y-2)=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y-4),\\ v &= -\sin\theta(x-x_0)+\cos\theta(y-y_0)=-\frac{\sqrt{2}}{2}(x-2)+\frac{\sqrt{2}}{2}(y-2)=\frac{\sqrt{2}}{2}(y-x).\end{aligned}$$



Σχήμα 2: Ασκήσεις 9 και 10.

Με αντικατάσταση στην (6), προκύπτει

$$4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y-4) = \frac{1}{2}(y-x)^2 \Leftrightarrow 2(x+y-4) = \frac{1}{2}(y-x)^2$$
$$\Leftrightarrow 4x+4y-16 = y^2+x^2-2xy \Leftrightarrow x^2-2xy+y^2-4x-4y+16=0.$$

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι, ΚΑΘ: ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ
ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΟΥΛΙΟΥ 2014
ΟΝΟΜΑ ΦΟΙΤΗΤΗ: ....

Οδηγίες

1. **Συμπληρώστε το όνομά σας άνω, και παραδώστε το παρόν με τις λύσεις.**
2. Διάρκεια εξέτασης: 2 ΩΡΕΣ.
3. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
4. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
5. Οι λύσεις πρέπει να γραφούν αποκλειστικά στην παρεχόμενη κόλλα. Δεν θα βαθμολογηθούν λύσεις που έχουν γραφτεί στο δίφυλλο των θεμάτων.
6. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε μολύβι ή/και στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός από κόκκινο.
7. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
8. Οποιοδήποτε τελικό αριθμητικό αποτέλεσμα μπορεί να περιλαμβάνει εκφράσεις της μορφής $n!$, $\binom{m}{k}$, $\Phi(z)$, κοκ.
9. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
10. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
11. ΣΕ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΠΟΥ ΔΙΑΠΙΣΤΩΘΕΙ (ΚΑΤΑ ΤΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΕΙΤΕ ΤΗΣ ΔΙΟΡΘΩΣΗΣ) ΑΝΤΙΓΡΑΦΗ ΕΙΤΕ ΑΠΟΠΕΙΡΑ ΑΝΤΙΓΡΑΦΗΣ ΘΑ ΕΝΗΜΕΡΩΘΟΥΝ ΤΑ ΑΡΜΟΔΙΑ ΟΡΓΑΝΑ, ΠΟΥ ΕΝΔΕΧΕΤΑΙ ΝΑ ΕΠΙΒΑΛΛΟΥΝ ΣΟΒΑΡΕΣ ΚΥΡΩΣΕΙΣ.

ΘΕΜΑΤΑ

1. **(Όρια)** *(2 μονάδες)* Υπολογίστε τα ακόλουθα όρια
$$\lim_{x\to 0}\frac{|3x-1|-|4x+1|}{2x}, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{\lfloor 2x\rfloor}{x}.$$
Δίνεται ότι το ακέραιο μέρος $\lfloor x\rfloor$ είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος ο οποίος είναι μικρότερος από το x ή ίσος με αυτό.

2. **(Παράγωγοι)** *(2 μονάδες)* Δίνεται ότι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και επιπλέον ισχύει ότι
$$f(x+y)=f(x)+f(y)+x^2y+xy^2.$$
Δίνεται επιπλέον ότι
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1.$$
Βρείτε τις τιμές των $f(0)$, $f'(0)$, και τις συναρτήσεις $f'(x)$, $f(x)$.

3. **(Ολοκληρώματα)** *(2 μονάδες)* Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:
$$\int_{-1}^{2} x8^x\,dx, \quad \int_{-1}^{1}\frac{dx}{1-x^2}.$$
(Υπόδειξη για το δεύτερο σκέλος: βρείτε a, b τέτοια ώστε $\frac{1}{1-x^2}=\frac{a}{1-x}+\frac{b}{1+x}$.)

4. **(ΔΕ)** *(2 μονάδες)* Να βρείτε την γενική λύση της ακόλουθης διαφορικής εξίσωσης:

$$y'(x) = a(y(x))^2(\log x),$$

όπου $x > 0$ και η παράμετρος $a \in \mathbb{R}$ με $a \neq 0$. Ακολούθως, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to\infty} y(x)$.

5. **(Σειρές)** *(2 μονάδες)*

   (α΄) Για κάθε θετικό ακέραιο $k \in \mathbb{Z}$, να προσδιορίσετε αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(kn)!}$ συγκλίνει ή αποκλίνει.

   (β΄) Για κάθε πραγματικό αριθμό $p \in \mathbb{R}$ να προσδιορίσετε αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n(1+n^2)^p$ συγκλίνει ή αποκλίνει.

   (Υπόδειξη: εξετάστε τις χαρακτηριστικές περιπτώσεις $k = 1$, $k = 2$, $p = -1$, και $p < -1$.)

Τυπολόγιο

$$\cos(y-x)=\cos x\cos y+\sin x\sin y,\quad \sin\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$
$$\sin 2x=2\sin x\cos x,\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$$
$$\sin x+\sin y=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x+\cos y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x-\sin y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x-\cos y=-2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right],\quad \cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$$
$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right],\quad \cos x<\frac{\sin x}{x}<\frac{1}{\cos x},\quad \cos\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0: 0<|x-c|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.\qquad \forall\epsilon>0\ \exists\delta>0: c<x<c+\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$$
$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0: c-\delta<x<c\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.\qquad \forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}: x>X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$$
$$\forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}: x<X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.\qquad \forall M\in\mathbb{R}\exists\delta>0: 0<|x-c|<\delta\Rightarrow f(x)>M.$$
$$\forall M\in\mathbb{R}\exists X\in\mathbb{R}: x>X\Rightarrow f(x)>M.\qquad \forall\epsilon>0\exists N\in\mathbb{N}: n>N\Rightarrow|a_n-L|<\epsilon.$$

$$|f(x)-f(x_0)|\le C|x-x_0|,\quad |f(y)-f(x)|\le C|y-x|$$
$$(\arcsin y)'=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arccos y)'=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arctan y)'=\frac{1}{1+y^2}$$
$$f(\theta x_0+(1-\theta)x_1)<\theta f(x_0)+(1-\theta)f(x_1)$$
$$L(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^{n}m_i(t_i-t_{i-1}),\quad U(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^{n}M_i(t_i-t_{i-1}),\quad \sum_{i=1}^{n}f(x_i)(t_i-t_{i-1})$$
$$\left\{\begin{array}{c} x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} r=\sqrt{x^2+y^2},\\ \cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{array}\right\}$$
$$\frac{1}{2}\int_a^b f^2(\theta)\,d\theta,\quad \pi\int_a^b f^2,\quad 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx,\quad \int_a^b A(t)\,dt,\quad \int_a^b\sqrt{(f'(x))^2+(g'(x))^2}\,dx$$
$$y'+P(x)y=Q(x),\quad y(x)=[S(x)+C]\exp[-R(x)]$$
$$y(x)=\left\{y_0+\int_{x_0}^{x}Q(u)\exp\left[\int_{x_0}^{u}P(t)\,dt\right]du\right\}\exp\left[-\int_{x_0}^{x}P(t)\,dt\right]$$
$$E_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x(x-t)^nf^{(n+1)}(t)\,dt,\quad |E_n(x)|\le M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$s_n=\sum_{k=1}^{n}f(k),\quad t_n=\int_1^n f(x)\,dx$$
$$S=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k,\quad s_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k,\quad 0<(-1)^n(S-s_n)<a_{n+1}$$
$$A_\parallel=\left[\frac{A\cdot B}{\|B\|^2}\right]B,\quad A_\perp=A-A_\parallel,\quad (x-x_0,y-y_0)(A,B)=0\Leftrightarrow Ax+By=Ax_0+By_0$$
$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0\\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0\end{vmatrix}=0,$$
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\Leftrightarrow Ax+By+Cz=Ax_0+By_0+Cz_0$$
$$y^2=4px,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-\epsilon^2)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(\epsilon^2-1)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\left\{\begin{array}{c} u=(x-x_0)\cos\theta+(y-y_0)\sin\theta,\\ v=-(x-x_0)\sin\theta+(y-y_0)\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}$$
$$\left\{\begin{array}{c} x=x_0+u\cos\theta-v\sin\theta,\\ y=y_0+u\sin\theta+v\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0+u\\ y_0+v\end{pmatrix},\quad \theta=\frac{1}{2}\operatorname{arccot}\frac{A-C}{B}$$
$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=x_0\begin{vmatrix} y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}-y_0\begin{vmatrix} x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}+z_0\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} x_0 & y_0\\ x_1 & y_1\end{vmatrix}=x_0y_1-x_1y_0.$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 1, 2013-2014
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Λύσεις Τελικής Εξέτασης Ιουλίου Περιόδου 2013-2014

1. **(Όρια)** Υπολογίστε τα ακόλουθα όρια

$$\lim_{x\to 0}\frac{|3x-1|-|4x+1|}{2x}, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{\lfloor 2x\rfloor}{x}.$$

Δίνεται ότι το ακέραιο μέρος $\lfloor x\rfloor$ είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος ο οποίος είναι μικρότερος από το x ή ίσος με αυτό.

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε ότι όταν το x είναι κοντά στο 0, έχουμε $|3x-1| = 1-3x$ και $|4x+1| = 4x+1$, επομένως

$$\lim_{x\to 0}\frac{|3x-1|-|4x+1|}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-3x-4x-1}{2x} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{7x}{2x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{7}{2}\right) = -\frac{7}{2}.$$

(β΄) Παρατηρούμε πως

$$2x-1 < \lfloor 2x\rfloor \leq 2x \Rightarrow \frac{2x-1}{x} < \frac{\lfloor 2x\rfloor}{x} \leq \frac{2x}{x}.$$

Όμως, τόσο το κάτω φράγμα, όσο και το άνω φράγμα, έχουν όριο το 2 καθώς $x\to\infty$. Επομένως, από το Κριτήριο της Παρεμβολής έχουμε ότι

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\lfloor 2x\rfloor}{x} = 2.$$

2. **(Παράγωγοι)** Δίνεται ότι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και επιπλέον ισχύει ότι

$$f(x+y) = f(x)+f(y)+x^2y+xy^2.$$

Δίνεται επιπλέον ότι

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1.$$

Βρείτε τις τιμές των $f(0)$, $f'(0)$, και τις συναρτήσεις $f'(x)$, $f(x)$.

Λύση: Καταρχήν, θέτοντας στην πρώτη από τις δοσμένες εξισώσεις $x=y=0$, προκύπτει πως

$$f(0+0) = f(0)+f(0)+0+0 \Rightarrow 2f(0) = f(0) \Rightarrow f(0) = 0.$$

Ακολούθως,

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1.$$

Η πρώτη ισότητα προκύπτει από τον ορισμό της παραγώγου. Η δεύτερη προκύπτει από το ότι $f(0)=0$, και η τρίτη από το δοσμένο όριο. Για να υπολογίσουμε την $f'(x)$, παρατηρούμε πως:

$$f'(x) = \lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{f(y)+x^2y+xy^2}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{y} + \lim_{y\to 0}x^2 + \lim_{y\to 0}xy = 1+x^2+0 = 1+x^2.$$

Προκύπτει πως η $f(x)$ είναι της μορφής $f(x) = \frac{x^3}{3}+x+c$, και επειδή $f(0)=0$, τελικά έχουμε $c=0$ και $f(x) = \frac{x^3}{3}+x$.

3. **(Ολοκληρώματα)** Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

$$\int_{-1}^{2} x8^x\,dx, \quad \int_{-1}^{1}\frac{dx}{1-x^2}.$$

(Υπόδειξη για το δεύτερο σκέλος: βρείτε a, b τέτοια ώστε $\frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1-x}+\frac{b}{1+x}$.)

Λύση:

(α′)

$$\int_{-1}^{2} x8^x\,dx = \int_{-1}^{2} x\exp\left[(\log 8)x\right]\,dx = \frac{1}{\log 8}\int_{-1}^{2} x\left[\exp\left[(\log 8)x\right]\right]'\,dx$$
$$= \frac{1}{\log 8}\left([x\exp[(\log 8)x]]_{-1}^{2} - \int_{-1}^{2}\exp[(\log 8)x]\,dx\right) = \frac{1}{\log 8}\left(2\times 8^2 + \frac{1}{8} - \frac{1}{\log 8}\left[\exp[(\log 8)x]\right]_{-1}^{2}\right)$$
$$= \frac{1}{\log 8}\left[\frac{1025}{8} - \frac{1}{\log 8}\left(8^2 - \frac{1}{8}\right)\right] = \frac{1025}{8\log 8} - \frac{511}{8(\log 8)^2} \simeq 46.84.$$

(β′) Χρησιμοποιούμε την υπόδειξη, και υπολογίζουμε κατ΄ αρχάς τις τιμές των a, b:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x} \Leftrightarrow 1 = a + ax + b - bx \Leftrightarrow a = b,\ a+b = 1 \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}.$$

Η δεύτερη ισοδυναμία προέκυψε παρατηρώντας ότι η ισότητα πρέπει να ισχύει για κάθε x, άρα και για $x=0$, από το οποίο προκύπτει ότι $a+b=1$, και κατόπιν με αντικατάσταση στην αρχική ισότητα, και θέτοντας $x=1$, προκύπτει επίσης ότι $a=b$. Ακολούθως, έχουμε:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1-x^2} = 2\int_{0}^{1}\frac{dx}{1-x^2} = 2\int_{0}^{1}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right]dx = \int_{0}^{1}\frac{dx}{1+x} + \int_{0}^{1}\frac{dx}{1-x}$$
$$= [\log(1+x)]_0^1 - [\log(1-x)]_0^1 = \log 2 - \lim_{x\to 1^-}\log(1-x) = \infty.$$

Στην πρώτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την συμμετρία (αρτιότητα) της ολοκληρωτέας συνάρτησης, ενώ στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι καταχρηστικό, και ως τέτοιο υπολογίστηκε, με χρήση ορίου.

4. **(ΔΕ)** Να βρείτε την γενική λύση της ακόλουθης διαφορικής εξίσωσης:

$$y'(x) = a(y(x))^2(\log x),$$

όπου $x>0$ και η παράμετρος $a\in\mathbb{R}$ με $a\neq 0$. Ακολούθως, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to\infty} y(x)$.

Λύση: Κατά τα γνωστά από τη θεωρία ΔΕ χωριζομένων μεταβλητών, έχουμε

$$y'(x) = ay^2(\log x) \Leftrightarrow \frac{dy}{y^2} = a(\log x)dx \Leftrightarrow \int\frac{dy}{y^2} = \int a\log x\,dx$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{y} + C = a\int(x)'\log x\,dx = ax\log x - a\int x(\log x)'\,dx = ax\log x - ax \Leftrightarrow y(x) = \frac{1}{C - ax(\log x - 1)}.$$

Σχετικά με το ζητούμενο όριο, παρατηρήστε πως αφού $\lim_{x\to\infty} x(\log x - 1) = \infty$, ο παρονομαστής του $y(x)$ θα τείνει στο ∞ η το $-\infty$ και επομένως το όριο της $y(x)$ καθώς $x\to\infty$ θα είναι το 0, ανεξάρτητα από το πρόσημο του a.

5. **(Σειρές)**

(α′) Για κάθε θετικό ακέραιο $k\in\mathbb{Z}$, να προσδιορίσετε αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(kn)!}$ συγκλίνει ή αποκλίνει.

(β′) Για κάθε πραγματικό αριθμό $p\in\mathbb{R}$ να προσδιορίσετε αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n(1+n^2)^p$ συγκλίνει ή αποκλίνει.

(Υπόδειξη: εξετάστε τις χαρακτηριστικές περιπτώσεις $k=1$, $k=2$, και $p=-1$.)

Λύση:

(α′) Καταρχήν, παρατηρούμε ότι για $k=1$, η σειρά γίνεται η $\sum_{n=1}^{\infty}(n!)$, η οποία αποκλίνει αφού οι όροι της τείνουν στο άπειρο και όχι στο 0, όπως απαιτεί το αναγκαίο κριτήριο του Cauchy για συγκλίνουσες σειρές. Για $k=2$, παρατηρούμε πως

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}\times\left[\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right]^{-1} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \to \frac{1}{4}.$$

Επομένως, από το κριτήριο του λόγου, η σειρά συγκλίνει για $k = 2$. Επίσης, επειδή για κάθε θετικό $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$k_1 > k_2 \Rightarrow \frac{(n!)^2}{(k_1 n)!} < \frac{(n!)^2}{(k_2 n)!},$$

από το κριτήριο της σύγκρισης προκύπτει ότι η σειρά θα συγκλίνει και για κάθε $k > 2$.

Άρα, τελικά η σειρά αποκλίνει για $k = 1$ και συγκλίνει για κάθε $k \geq 2$.

(β΄) Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο του ολοκληρώματος. Διακρίνουμε περιπτώσεις. Έστω καταρχήν πως $p = -1$. Σε αυτή την περίπτωση

$$\int_1^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{2}\left[\log(1+x^2)\right]'\,dx = \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\log(1+x^2) - \frac{1}{2}\log(1+0) = \infty.$$

Άρα, από το κριτήριο του ολοκληρώματος, για $p = -1$ η σειρά αποκλίνει.

Επίσης, επειδή έχουμε, για $n > 1$,

$$p > -1 \Rightarrow n(1+n^2)^p > n(1+n^2)^{-1},$$

από το κριτήριο της σύγκρισης προκύπτει ότι αφού δεν έχουμε σύγκλιση για $p = -1$, δεν θα έχουμε σύγκλιση και για $p > -1$.

Τέλος, για την περίπτωση $p < -1$ έχουμε, επίσης με χρήση του κριτηρίου του ολοκληρώματος, ότι

$$\begin{aligned}\int_1^\infty x(1+x^2)^p\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{2(p+1)}\left[(1+x^2)^{p+1}\right]'\,dx &= \left[\frac{(1+x^2)^{p+1}}{2(p+1)}\right]_1^\infty \\ &= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{(1+x^2)^{p+1}}{2(p+1)}\right] - \frac{2^{p+1}}{2(p+1)} = -\frac{2^{p+1}}{2(p+1)}.\end{aligned}$$

Αφού το ολοκλήρωμα συγκλίνει, θα συγκλίνει και η σειρά. Επομένως, η σειρά συγκλίνει για $p < -1$ και αποκλίνει για $p \geq -1$.

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι, ΚΑΘ: ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ
ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2014
ΟΝΟΜΑ ΦΟΙΤΗΤΗ: ....

Οδηγίες

1. **Συμπληρώστε το όνομά σας άνω, και παραδώστε το παρόν με τις λύσεις.**
2. Διάρκεια εξέτασης: 2 ΩΡΕΣ.
3. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
4. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
5. Οι λύσεις πρέπει να γραφούν αποκλειστικά στην παρεχόμενη κόλλα. Δεν θα βαθμολογηθούν λύσεις που έχουν γραφτεί στο δίφυλλο των θεμάτων.
6. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε μολύβι ή/και στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός από κόκκινο.
7. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
8. Οποιοδήποτε τελικό αριθμητικό αποτέλεσμα μπορεί να περιλαμβάνει εκφράσεις της μορφής $n!$, $\binom{m}{k}$, $\Phi(z)$, κοκ.
9. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
10. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
11. ΣΕ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΠΟΥ ΔΙΑΠΙΣΤΩΘΕΙ (ΚΑΤΑ ΤΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΕΙΤΕ ΤΗΣ ΔΙΟΡΘΩΣΗΣ) ΑΝΤΙΓΡΑΦΗ ΕΙΤΕ ΑΠΟΠΕΙΡΑ ΑΝΤΙΓΡΑΦΗΣ ΘΑ ΕΝΗΜΕΡΩΘΟΥΝ ΤΑ ΑΡΜΟΔΙΑ ΟΡΓΑΝΑ, ΠΟΥ ΕΝΔΕΧΕΤΑΙ ΝΑ ΕΠΙΒΑΛΛΟΥΝ ΣΟΒΑΡΕΣ ΚΥΡΩΣΕΙΣ.

ΘΕΜΑΤΑ

1. **(Όρια)** *(2 μονάδες)* Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3},\quad \lim_{x\to 0}\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{x}}.$$

2. **(Αόριστα ολοκληρώματα με τριγωνομετρικές και εκθετικές συναρτήσεις)** *(2 μονάδες)* Δίνονται τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

$$I_1=\int e^{ax}\sin bx\,dx,\quad I_2=\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

Χρησιμοποιήστε παραγοντική ολοκλήρωση δύο φορές: μια φορά για να εκφράσετε το I_1 συναρτήσει του I_2 και μιας άλλης συνάρτησης $f(x)$, και μια φορά για να εκφράσετε το I_2 συναρτήσει του I_1 και μιας άλλης συνάρτησης $g(x)$. Χρησιμοποιήστε τις δύο εξισώσεις που προκύπτουν για να υπολογίσετε τα I_1, I_2.

3. **(Καταχρηστικό ολοκλήρωμα)** *(1.5 μονάδα)* Έστω πραγματικός $\lambda>0$. Να δείξετε, χρησιμοποιώντας επαγωγή, ότι

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x}x^n\,dx=\frac{n!}{\lambda^{n+1}}.$$

για κάθε φυσικό $n\geq 1$.

4. **(ΔΕ)** *(2 μονάδες)* Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y'(x) + (\tan x)y(x) = \frac{1}{\cos x},$$

στο διάστημα $(-\pi/2, \pi/2)$. Ακολούθως, να υπολογίσετε την ειδική λύση της οποίας το ολοκλήρωμα στο προηγούμενο διάστημα ισούται με μονάδα.

5. **(Σειρές)** *(2.5 μονάδες)* Να προσδιορίσετε αν οι ακόλουθες σειρές συγκλίνουν ή όχι:

$$\sum \frac{1}{2n + n\sin 3n}, \quad \sum \frac{1}{2n^2 + n^2\sin^2 3n},$$
$$\sum \frac{n!}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots(2n)}, \quad \sum \frac{(2n)!}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12\cdots(3n)}.$$

Τυπολόγιο

$$\cos(y-x)=\cos x\cos y+\sin x\sin y,\quad \sin\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$
$$\sin 2x=2\sin x\cos x,\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$$
$$\sin x+\sin y=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x+\cos y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x-\sin y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x-\cos y=-2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right],\quad \cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$$
$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right],\quad \cos x<\frac{\sin x}{x}<\frac{1}{\cos x},\quad \cos\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0: 0<|x-c|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.\qquad \forall\epsilon>0\ \exists\delta>0: c<x<c+\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$$
$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0: c-\delta<x<c\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.\qquad \forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}: x>X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$$
$$\forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}: x<X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.\qquad \forall M\in\mathbb{R}\exists\delta>0: 0<|x-c|<\delta\Rightarrow f(x)>M.$$
$$\forall M\in\mathbb{R}\exists X\in\mathbb{R}: x>X\Rightarrow f(x)>M.\qquad \forall\epsilon>0\exists N\in\mathbb{N}: n>N\Rightarrow|a_n-L|<\epsilon.$$

$$|f(x)-f(x_0)|\le C|x-x_0|,\quad |f(y)-f(x)|\le C|y-x|$$
$$(\arcsin y)'=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arccos y)'=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arctan y)'=\frac{1}{1+y^2}$$
$$f(\theta x_0+(1-\theta)x_1)<\theta f(x_0)+(1-\theta)f(x_1)$$
$$L(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^n m_i(t_i-t_{i-1}),\quad U(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^n M_i(t_i-t_{i-1}),\quad \sum_{i=1}^n f(x_i)(t_i-t_{i-1})$$
$$\left\{\begin{array}{c} x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} r=\sqrt{x^2+y^2},\\ \cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{array}\right\}$$
$$\frac{1}{2}\int_a^b f^2(\theta)\,d\theta,\quad \pi\int_a^b f^2,\quad 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx,\quad \int_a^b A(t)\,dt,\quad \int_a^b\sqrt{(f'(x))^2+(g'(x))^2}\,dx$$
$$y'+P(x)y=Q(x),\quad y(x)=[S(x)+C]\exp[-R(x)]$$
$$y(x)=\left\{y_0+\int_{x_0}^x Q(u)\exp\left[\int_{x_0}^u P(t)\,dt\right]du\right\}\exp\left[-\int_{x_0}^x P(t)\,dt\right]$$
$$E_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt,\quad |E_n(x)|\le M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$s_n=\sum_{k=1}^n f(k),\quad t_n=\int_1^n f(x)\,dx$$
$$S=\sum_{k=1}^\infty(-1)^{k-1}a_k,\quad s_n=\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}a_k,\quad 0<(-1)^n(S-s_n)<a_{n+1}$$
$$A_\parallel=\left[\frac{A\cdot B}{\|B\|^2}\right]B,\quad A_\perp=A-A_\parallel,\quad (x-x_0,y-y_0)(A,B)=0\Leftrightarrow Ax+By=Ax_0+By_0$$
$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0\\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0\end{vmatrix}=0,$$
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\Leftrightarrow Ax+By+Cz=Ax_0+By_0+Cz_0$$

$$y^2=4px,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-\epsilon^2)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(\epsilon^2-1)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\left\{\begin{array}{c} u=(x-x_0)\cos\theta+(y-y_0)\sin\theta,\\ v=-(x-x_0)\sin\theta+(y-y_0)\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}$$
$$\left\{\begin{array}{c} x=x_0+u\cos\theta-v\sin\theta,\\ y=y_0+u\sin\theta+v\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0+u\\y_0+v\end{pmatrix},\quad \theta=\frac{1}{2}\operatorname{arccot}\frac{A-C}{B}$$
$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=x_0\begin{vmatrix} y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}-y_0\begin{vmatrix} x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}+z_0\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} x_0 & y_0\\ x_1 & y_1\end{vmatrix}=x_0y_1-x_1y_0.$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 1, 2013-2014
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Λύσεις Τελικής Εξέτασης Σεπτεμβρίου Περιόδου 2013-2014

1. **(Όρια)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3},\quad \lim_{x\to 0}\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Λύση:

(α΄) Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\frac{\sin x}{\cos x}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sin x-\sin x}{x^3\cos x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\right)\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x-1}{x^2}\right)=1\times 1\times\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x}=-\frac{1}{2}\times 1=-\frac{1}{2}.$$

Στην τέταρτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τη συνέχεια του συνημιτόνου, το γνωστό όριο $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, και τον κανόνα του L'Hôpital. Στην πέμπτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε ξανά το γνωστό όριο $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

(β΄) Έχουμε

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{\log\left(1+\sin x\right)}{x}\right)=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(1+\sin x\right)}{x}\right)$$
$$=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)=\exp(1)=e.$$

Στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τη συνέχεια της εκθετικής συνάρτησης. Στην τρίτη ισότητα εφαρμόσαμε τον Κανόνα του L'Hôpital.

2. **(Αόριστα ολοκληρώματα με τριγωνομετρικές και εκθετικές συναρτήσεις)** Δίνονται τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

$$I_1=\int e^{ax}\sin bx\,dx,\quad I_2=\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

Χρησιμοποιήστε παραγοντική ολοκλήρωση δύο φορές: μια φορά για να εκφράσετε το I_1 συναρτήσει του I_2 και μιας άλλης συνάρτησης $f(x)$, και μια φορά για να εκφράσετε το I_2 συναρτήσει του I_1 και μιας άλλης συνάρτησης $g(x)$. Χρησιμοποιήστε τις δύο εξισώσεις που προκύπτουν για να υπολογίσετε τα I_1, I_2. Υποθέστε ότι $a,b\in\mathbb{R}$, $a,b\neq 0$.

Λύση: Παρατηρούμε πως

$$I_1=\int e^{ax}\sin bx\,dx=-\frac{1}{b}\int e^{ax}\left(\cos bx\right)'\,dx=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx$$
$$\Rightarrow I_1=\frac{a}{b}I_2+A,\quad A\triangleq-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx.$$

Εντελώς ανάλογα, έχουμε:

$$I_2=\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{1}{b}\int e^{ax}\left(\sin bx\right)'\,dx=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx$$
$$\Rightarrow I_2=-\frac{a}{b}I_1+B,\quad B\triangleq\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx.$$

Λύνοντας το σύστημα 2×2 που προέκυψε, έχουμε

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\sin bx-b\cos bx\right)+C,$$

και

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} \left(b \sin bx + a \cos bx\right) + C.$$

3. **(Καταχρηστικό ολοκλήρωμα)** Έστω πραγματικός $\lambda > 0$. Να δείξετε, χρησιμοποιώντας επαγωγή, ότι

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} x^n \, dx = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}.$$

για κάθε φυσικό $n \geq 1$.

Λύση: Καταρχήν, παρατηρήστε ότι το ζητούμενο ισχύει για $n = 1$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} x \, dx &= \left(-\frac{1}{\lambda}\right) \int_0^{\infty} \left(e^{-\lambda x}\right)' x \, dx = \left(-\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x} x \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \, dx \\ &= \left(-\frac{1}{\lambda}\right) \lim_{x \to \infty} e^{-\lambda x} x - 0 - \left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \int_0^{\infty} \left(e^{-\lambda x}\right)' \, dx = \frac{1}{\lambda^2} \left(1 - \lim_{x \to \infty} e^{-\lambda x}\right) = \frac{1}{\lambda^2}.\end{aligned}$$

Στη δεύτερη ισότητα εφαρμόσαμε παραγοντική ολοκλήρωση. Στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό του καταχρηστικού ολοκληρώματος. Στην τέταρτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το όριο $\lim_{x \to \infty} e^{-\lambda x} x = 0$, που προκύπτει με εφαρμογή του Κανόνα L'Hôpital.

Έστω τώρα πως η σχέση ισχύει για κάποιο φυσικό $n - 1 \geq 1$. Θα αποδείξουμε πως ισχύει για n. Πράγματι,

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} x^n \, dx &= \left(-\frac{1}{\lambda}\right) \int_0^{\infty} \left(e^{-\lambda x}\right)' x^n \, dx = \left(-\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x} x^n \Big|_0^{\infty} + \frac{n}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} x^{n-1} \, dx \\ &= \left(-\frac{1}{\lambda}\right) \lim_{x \to \infty} e^{-\lambda x} x^n - 0 + \frac{n}{\lambda} \times \frac{(n-1)!}{\lambda^n} = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}.\end{aligned}$$

Όμοια με την προηγούμενη περίπτωση, στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε παραγοντική ολοκλήρωση. Στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό του καταχρηστικού ολοκληρώματος και την επαγωγική υπόθεση. Στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το όριο $\lim_{x \to \infty} e^{-\lambda x} x^n = 0$, που προκύπτει με n εφαρμογές του Κανόνα L'Hôpital.

4. **(ΔΕ)** Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y'(x) + (\tan x) y(x) = \frac{1}{\cos x},$$

στο διάστημα $(-\pi/2, \pi/2)$. Ακολούθως, να υπολογίσετε την ειδική λύση της οποίας το ολοκλήρωμα στο προηγούμενο διάστημα ισούται με μονάδα.

Λύση: Παρατηρούμε πως η διαφορική εξίσωση είναι γραμμική πρώτης τάξης, επομένως καταρχήν πρέπει να προσδιορίσουμε μια παράγουσα του συντελεστή της $y(x)$. Έχουμε:

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\int \left(\log(\cos x)\right)' \, dx = -\log(\cos x) + C.$$

Επομένως, πολλαπλασιάζουμε και τα δύο σκέλη με την $\exp\left(-\log(\cos x)\right) = 1/\cos x$, και έχουμε:

$$\begin{aligned}y'(x) + (\tan x) y(x) = \frac{1}{\cos x} &\Leftrightarrow \frac{y'(x)}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} y(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{y(x)}{\cos x}\right)' = (\tan x)' \Leftrightarrow y(x) = (\cos x)(\tan x + C) \Leftrightarrow y(x) = \sin x + C \cos x.\end{aligned}$$

Σχετικά με την ζητούμενη ειδική λύση, έχουμε:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} y(x) \, dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x \, dx + C \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, dx = 0 + C \sin x|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}.$$

5. **(Σειρές)** Να προσδιορίσετε αν οι ακόλουθες σειρές συγκλίνουν ή όχι:

$$\sum \frac{1}{2n + n\sin 3n}, \quad \sum \frac{1}{2n^2 + n^2 \sin^2 3n}, \quad \sum \frac{n!}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots(2n)}, \quad \sum \frac{(2n)!}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12\cdots(3n)}.$$

Λύση:

(α′) Παρατηρήστε πως

$$\frac{1}{2n + n\sin 3n} \geq \frac{1}{3n}.$$

Επομένως, από το κριτήριο της σύγκρισης, με δεδομένο ότι αποκλίνει η $\sum \frac{1}{n}$, θα αποκλίνει και η δοσμένη σειρά.

(β′) Σε αυτή την περίπτωση, έχουμε

$$\frac{1}{2n^2 + n^2 \sin^2 3n} \leq \frac{1}{n^2},$$

και με δεδομένο ότι η σειρά $\sum \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, από το κριτήριο της σύγκρισης προκύπτει ότι θα συγκλίνει και η δοσμένη.

(γ′) Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο του λόγου:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)\cdot(2n+2)} \times \left[\frac{n!}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\right]^{-1} = \frac{n+1}{2n+2} \to \frac{1}{2},$$

επομένως η σειρά συγκλίνει.

(δ′) Και πάλι θα εφαρμόσουμε το κριτήριο του λόγου. Σε αυτή την περίπτωση, όμως,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2(n+1))!}{3\cdot 6\cdot 9\cdots(3n)\cdot(3n+3)} \times \left[\frac{(2n)!}{3\cdot 6\cdot 9\cdots(3n)}\right]^{-1} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{3n+3} \to \infty,$$

επομένως σε αυτή την περίπτωση, η σειρά αποκλίνει.