ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι, ΕΠΙΚ. ΚΑΘ. ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ
ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2016.

ΟΝΟΜΑ ΦΟΙΤΗΤΗ: . . . .

Οδηγίες (Διαβάστε τες)

1. **Συμπληρώστε το όνομά σας άνω, και παραδώστε το παρόν με τις λύσεις**.
2. **Οι λύσεις πρέπει να γραφούν αποκλειστικά στην παρεχόμενη κόλλα, και όχι σε αυτό το δίφυλλο. Ό,τι γράψετε εδώ δεν θα διορθωθεί.**
3. Διάρκεια εξέτασης: 2 ΩΡΕΣ.
4. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
5. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
6. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε μολύβι ή/και στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός από κόκκινο.
7. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
8. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
9. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
10. Σύμφωνα με τον κανονισμό εξετάσεων, σε περίπτωση που διαπιστωθεί (κατά τη διάρκεια της εξέτασης είτε της διόρθωσης) αντιγραφή είτε απόπειρα αντιγραφής, θα ενημερωθούν τα αρμόδια όργανα του ιδρύματος.

Θέματα

1. **(Ορισμός Ορίου)** *(1.5 μονάδα)* Να δείξετε, χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τον ορισμό του ορίου, ότι
$$\lim_{x\to\infty}\frac{10x}{x+5}=10.$$
2. **(Όριο)** *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε το ακόλουθο όριο:
$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x \exp(t^2)\,dt.$$
3. **(Ολοκληρώματα)**
   (α΄) *(1 μονάδα)* Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα
   $$\int\frac{dx}{\sin x\cos x},$$
   χρησιμοποιώντας, αν θέλετε, την αλλαγή μεταβλητής $t=\tan x$.
   (β΄) *(1 μονάδα)* Υπολογίστε το καταχρηστικό ολοκλήρωμα
   $$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sin x\cos x}.$$

4. **(Διαφορική Εξίσωση)** *(1.5 μονάδα)* Να λύσετε την ακόλουθη ΔΕ:

$$\exp(x\cos x)(\cos x - x\sin x) = y'(x)\frac{\cos y(x)}{\sin y(x)}.$$

Αρκεί να βρείτε μια (μη διαφορική) εξίσωση που πρέπει να ικανοποιεί κάθε συνάρτηση $y(x)$ που ικανοποιεί τη δοσμένη ΔΕ.

5. **(Σειρές)**

(α΄) *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε αν συγκλίνει ή αποκλίνει η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{1+n^2\log n}{n}\right).$$

(β΄) *(0.5 μονάδα)* Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \exp(-\sqrt{x})\, dx.$$

(γ΄) *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε αν συγκλίνει η αποκλίνει η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\sqrt{n}),$$

κάνοντας χρήση του Κριτηρίου του Ολοκληρώματος και του προηγούμενου σκέλους.

6. **(Έλλειψη)**

(α΄) *(0.5 μονάδα)* Να σχεδιάσετε, προσεγγιστικά, μια έλλειψη με παραμέτρους $a = 2$, $b = 1$, κέντρο το σημείο $(x_0, y_0) = (5, 4)$, και το μεγάλο άξονά της επί της ευθείας $y = 9 - x$. Δεν χρειάζεται να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες των εστιών και των κορυφών της έλλειψης.

(β΄) *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε μια εξίσωση που πρέπει να ικανοποιεί κάθε σημείο (x, y) που ανήκει σε αυτή την έλλειψη.

Τυπολόγιο

$$\cos(y-x)=\cos x\cos y+\sin x\sin y,\quad \sin\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$
$$\sin 2x=2\sin x\cos x,\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$$
$$\sin x+\sin y=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x+\cos y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x-\sin y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x-\cos y=-2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right],\quad \cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$$
$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right],\quad \cos x<\frac{\sin x}{x}<\frac{1}{\cos x},\quad \cos\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0:0<|x-c|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.\qquad \forall\epsilon>0\ \exists\delta>0:c<x<c+\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$$
$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0:c-\delta<x<c\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.\qquad \forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}:x>X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$$
$$\forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}:x<X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.\qquad \forall M\in\mathbb{R}\exists\delta>0:0<|x-c|<\delta\Rightarrow f(x)>M.$$
$$\forall M\in\mathbb{R}\exists X\in\mathbb{R}:x>X\Rightarrow f(x)>M.\qquad \forall\epsilon>0\exists N\in\mathbb{N}:n>N\Rightarrow|a_n-L|<\epsilon.$$

$$|f(x)-f(x_0)|\le C|x-x_0|,\quad |f(y)-f(x)|\le C|y-x|$$
$$(\arcsin y)'=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arccos y)'=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arctan y)'=\frac{1}{1+y^2}$$
$$f(\theta x_0+(1-\theta)x_1)<\theta f(x_0)+(1-\theta)f(x_1)$$
$$L(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^{n}m_i(t_i-t_{i-1}),\quad U(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^{n}M_i(t_i-t_{i-1}),\quad \sum_{i=1}^{n}f(x_i)(t_i-t_{i-1})$$
$$\left\{\begin{array}{c}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}r=\sqrt{x^2+y^2},\\ \cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{array}\right\}$$
$$\frac{1}{2}\int_a^b f^2(\theta)\,d\theta,\quad \pi\int_a^b f^2,\quad 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx,\quad \int_a^b A(t)\,dt,\quad \int_a^b\sqrt{(f'(x))^2+(g'(x))^2}\,dx$$
$$y'+P(x)y=Q(x),\quad y(x)=[S(x)+C]\exp[-R(x)]$$
$$y(x)=\left\{y_0+\int_{x_0}^{x}Q(u)\exp\left[\int_{x_0}^{u}P(t)\,dt\right]du\right\}\exp\left[-\int_{x_0}^{x}P(t)\,dt\right]$$
$$E_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x(x-t)^nf^{(n+1)}(t)\,dt,\quad |E_n(x)|\le M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$s_n=\sum_{k=1}^{n}f(k),\quad t_n=\int_1^n f(x)\,dx$$
$$S=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k,\quad s_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k,\quad 0<(-1)^n(S-s_n)<a_{n+1}$$
$$A_{\parallel}=\left[\frac{A\cdot B}{\|B\|^2}\right]B,\quad A_{\perp}=A-A_{\parallel},\quad (x-x_0,y-y_0)(A,B)=0\Leftrightarrow Ax+By=Ax_0+By_0$$
$$\begin{vmatrix}x-x_0&y-y_0&z-z_0\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}x-x_0&y-y_0&z-z_0\\x_1-x_0&y_1-y_0&z_1-z_0\\x_2-x_0&y_2-y_0&z_2-z_0\end{vmatrix}=0,$$
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\Leftrightarrow Ax+By+Cz=Ax_0+By_0+Cz_0$$
$$y^2=4px,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-\epsilon^2)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(\epsilon^2-1)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\left\{\begin{array}{c}u=(x-x_0)\cos\theta+(y-y_0)\sin\theta,\\ v=-(x-x_0)\sin\theta+(y-y_0)\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}$$
$$\left\{\begin{array}{c}x=x_0+u\cos\theta-v\sin\theta,\\ y=y_0+u\sin\theta+v\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0+u\\y_0+v\end{pmatrix},\quad \theta=\frac{1}{2}\mathrm{arccot}\frac{A-C}{B}$$
$$\begin{vmatrix}x_0&y_0&z_0\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=x_0\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}-y_0\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}+z_0\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}x_0&y_0\\x_1&y_1\end{vmatrix}=x_0y_1-x_1y_0.$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 1, 2015-2016
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΕΠΙΚ. ΚΑΘ. ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ

Λύσεις Τελικής Εξέτασης Φεβρουαρίου Ακ. Έτους 2015-2016

1. **(Ορισμός Ορίου)** Να δείξετε, χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τον ορισμό του ορίου, ότι $\lim_{x\to\infty} \frac{10x}{x+5} = 10$.

   Λύση: Έστω $\epsilon > 0$. Παρατηρούμε πως

$$\left|\frac{10x}{x+5} - 10\right| < \epsilon \Leftrightarrow \left|\frac{10x-10x-50}{x+5}\right| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{50}{|x+5|} < \epsilon \Leftrightarrow \frac{|x+5|}{50} > \frac{1}{\epsilon} \Leftrightarrow |x+5| > \frac{50}{\epsilon}. \tag{1}$$

   Θέτουμε $M = \max\{-5, \frac{50}{\epsilon} - 5\}$. Παρατηρούμε πως

$$x > M \Rightarrow x > -5 \Rightarrow x+5 > 0 \Rightarrow |x+5| = x+5. \tag{2}$$

   Επομένως,

$$x > M \Rightarrow x > \frac{50}{\epsilon} - 5 \Rightarrow x+5 > \frac{50}{\epsilon} \Rightarrow |x+5| > \frac{50}{\epsilon} \Rightarrow \left|\frac{10x}{x+5} - 10\right| < \epsilon.$$

   Η τρίτη συνεπαγωγή ισχύει λόγω της (2). Η τελευταία συνεπαγωγή ισχύει λόγω της ακολουθίας ισοδυναμιών (1). Επομένως, πράγματι ισχύει το δοσμένο όριο.

2. **(Όριο)** Να υπολογίσετε το ακόλουθο όριο:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x \exp t^2\, dt.$$

   Λύση: Παρατηρούμε πως η ολοκληρωτέα συνάρτηση απειρίζεται καθώς $t \to \infty$, επομένως θα απειρίζεται και το ολοκλήρωμα καθώς $x \to \infty$. Επειδή απειρίζεται και ο παρονομαστής x καθώς $x \to \infty$, τελικά προκύπτει ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον Κανόνα του L'Hôpital, επομένως

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x \exp t^2\, dt = \lim_{x\to\infty} \frac{\exp x^2}{1} = \infty.$$

   Στην πρώτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το Πρώτο Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού.

3. **(Ολοκληρώματα)**

   (α΄) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$, χρησιμοποιώντας, αν θέλετε, την αλλαγή μεταβλητής $t = \tan x$.

   (β΄) Υπολογίστε το καταχρηστικό ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x \cos x}$.

   Λύση:

   (α΄) Θέτοντας $t = \tan x$ έχουμε $dt = \frac{1}{\cos^2 x}dx$, επομένως

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{\cos x\, dt}{\sin x} = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C = \log|\tan x| + C.$$

   (β΄) Παρατηρήστε ότι το ολοκλήρωμα είναι καταχρηστικό γιατί έχουμε απειρισμό και στα δύο όρια ολοκλήρωσης. Κατά τα γνωστά από τη θεωρία, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x \cos x} &= \lim_{h\to 0^+}\int_h^{\pi/4} \frac{dx}{\sin x \cos x} + \lim_{h\to(\pi/2)^-}\int_{\pi/4}^h \frac{dx}{\sin x \cos x} \\
&= \lim_{h\to 0^+} [\log\tan x]_h^{\pi/4} + \lim_{h\to(\pi/2)^-} [\log\tan x]_{\pi/4}^h \\
&= \log 1 - \lim_{h\to 0^+} \log\tan h + \lim_{h\to(\pi/2)^-} \log\tan h - \log 1 \\
&= -(-\infty) + \infty = \infty.
\end{aligned}$$

4. **(Διαφορική Εξίσωση)** Να λύσετε την ακόλουθη ΔΕ:

$$\exp(x\cos x)(\cos x - x\sin x) = y'(x)\frac{\cos y(x)}{\sin y(x)}.$$

Αρκεί να βρείτε μια (μη διαφορική) εξίσωση που πρέπει να ικανοποιεί κάθε συνάρτηση $y(x)$ που ικανοποιεί τη δοσμένη ΔΕ.

Λύση: Καταρχάς, παρατηρούμε πως η ΔΕ είναι χωριζομένων μεταβλητών. Επίσης,

$$(\log(\sin y))' = \frac{\cos y}{\sin y}.$$

Τέλος,

$$(\exp(x\cos x))' = \exp(x\cos x)((x)'\cos x + x(\cos x)') = \exp(x\cos x)(\cos x - x\sin x).$$

Άρα, από τα γνωστά για τις ΔΕ χωριζομένων μεταβλητών, έχουμε

$$\exp(x\cos x)(\cos x - x\sin x) = y'(x)\frac{\cos y(x)}{\sin y(x)} \Leftrightarrow \exp(x\cos x)(\cos x - x\sin x)dx = \frac{\cos y}{\sin y}dy$$
$$\Leftrightarrow \int \exp(x\cos x)(\cos x - x\sin x)\,dx = \int \frac{\cos y}{\sin y}\,dy \Leftrightarrow \exp(x\cos x) = \log(\sin y(x)) + C.$$

5. **(Σειρές)**

(α΄) Να προσδιορίσετε αν συγκλίνει ή αποκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{1+n^2\log n}{n}\right)$.

(β΄) Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \exp(-\sqrt{x})\,dx$.

(γ΄) Να προσδιορίσετε αν συγκλίνει ή αποκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\sqrt{n})$, κάνοντας χρήση του Κριτηρίου του Ολοκληρώματος και του προηγούμενου σκέλους.

Λύση:

(α΄) Θα εφαρμόσουμε το Κριτήριο της Ρίζας:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to\infty}\left(\exp\left(-\frac{1+n^2\log n}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\exp\left(-\frac{1+n^2\log n}{n^2}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\exp\left(-\frac{1}{n^2} - \log n\right) = \exp\left(-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} - \lim_{n\to\infty}\log n\right)\\
&= \exp(-0-\infty) = 0,
\end{aligned}$$

επομένως, σύμφωνα με το Κριτήριο της Ρίζας, η σειρά συγκλίνει.

Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Κριτήριο του Λόγου, αλλά σε αυτή την περίπτωση η απόδειξη είναι πιο δύσκολη και πιο εκτεταμένη:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\exp\left[-\frac{1+(n+1)^2\log(n+1)}{n+1}\right]}{\exp\left[-\frac{1+n^2\log n}{n}\right]}\\
&= \lim_{n\to\infty}\exp\left[-\frac{1+(n+1)^2\log(n+1)}{n+1} + \frac{1+n^2\log n}{n}\right]\\
&= \exp\left[-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty} n\log\left(\frac{n}{n+1}\right) - \lim_{n\to\infty}\log(n+1)\right].
\end{aligned}$$

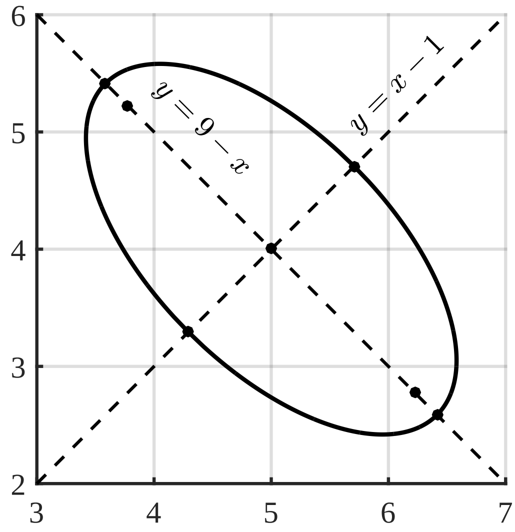
Από τα παραπάνω τέσσερα όρια, τα πρώτα δύο ισούνται με 0 και το τελευταίο με ∞. Σχετικά με το τρίτο, με χρήση του Κανόνα του L'Hôpital, έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} n\log\left(\frac{n}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\log n - \log(n+1)}{1/n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} -\frac{(n+1-n)n^2}{n(n+1)} = -1.$$

Επομένως, τελικά έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \exp(-0+0-1-\infty) = 0,$$

και η σειρά συγκλίνει.



Σχήμα 1: Άσκηση 6.

(β΄) Θα κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $t = \sqrt{x}$. Έχουμε $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$, επομένως

$$\begin{aligned}\int \exp(-\sqrt{x})\,dx &= \int 2t\exp(-t)\,dt = -2\int t(\exp(-t))'\,dt \\ &= -2t\exp(-t) + 2\int \exp(-t)\,dt = -2t\exp(-t) - 2\exp(-t) + C \\ &= -2\sqrt{x}\exp(-\sqrt{x}) - 2\exp(-\sqrt{x}) + C.\end{aligned}$$

(γ΄) Η σειρά θα συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνει το καταχρηστικό ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \exp(-\sqrt{x})\,dx$. Με χρήση του προηγούμενου σκέλους, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \exp(-\sqrt{x})\,dx &= \lim_{h\to\infty}\int_1^h \exp(-\sqrt{x})\,dx = \lim_{h\to\infty}\left[-2\sqrt{x}\exp(-\sqrt{x}) - 2\exp(-\sqrt{x})\right]_1^h \\ &= \lim_{h\to\infty}\left[-2\sqrt{h}\exp(-\sqrt{h}) - 2\exp(-\sqrt{h})\right] + 4e^{-1} \\ &= -2\lim_{h\to\infty}\sqrt{h}\exp(-\sqrt{h}) - 2\lim_{h\to\infty}\exp(-\sqrt{h}) + 4e^{-1} = 0 + 0 + 4e^{-1}.\end{aligned}$$

Το πρώτο από τα παραπάνω όρια προκύπτει με μια απλή εφαρμογή του Κανόνα του L'Hôpital:

$$\lim_{h\to\infty}\frac{\sqrt{h}}{\exp\sqrt{h}} = \lim_{h\to\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{h}}}{\frac{1}{2\sqrt{h}}\exp\sqrt{h}} = \lim_{h\to\infty}\frac{1}{\exp\sqrt{h}} = 0.$$

Επομένως, η σειρά συγκλίνει.

6. **(Έλλειψη)**

(α΄) Να σχεδιάσετε, προσεγγιστικά, μια έλλειψη με παραμέτρους $a = 2$, $b = 1$, κέντρο το σημείο $(x_0, y_0) = (5, 4)$, και το μεγάλο άξονά της επί της ευθείας $y = 9 - x$. Δεν χρειάζεται να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες των εστιών και των κορυφών της έλλειψης.

(β΄) Να προσδιορίσετε μια εξίσωση που πρέπει να ικανοποιεί κάθε σημείο (x, y) που ανήκει σε αυτή την έλλειψη.

Λύση:

(α΄) Η έλλειψη έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 1.

(β΄) Έστω το νέο σύστημα συντεταγμένων uv το οποίο έχει αρχή των αξόνων το σημείο $(x_0, y_0) = (5, 4)$ και του οποίου ο άξονας u προκύπτει αν περιστρέψουμε τον άξονα των x κατά γωνία $\theta = \pi/4$ προς τη θετική φορά. Η έλλειψη θα έχει, σε αυτό το σύστημα συντεταγμένων, εξίσωση

$$\frac{u^2}{1^1} + \frac{v^2}{2^2} = 1 \Leftrightarrow 4u^2 + v^2 = 4.$$

Κατά τα γνωστά από τη θεωρία, αν ένα σημείο έχει συντεταγμένες (x, y) στο σύστημα xy και (u, v) στο σύστημα uv, τότε αυτές θα συνδέονται με τις εξισώσεις

$$\left\{ \begin{array}{c} x = x_0 + u\cos\theta - v\sin\theta, \\ y = y_0 + u\sin\theta + v\cos\theta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} u = (x - x_0)\cos\theta + (y - y_0)\sin\theta, \\ v = -(x - x_0)\sin\theta + (y - y_0)\cos\theta \end{array} \right\}$$

που στην προκειμένη περίπτωση γίνονται

$$\left\{ \begin{array}{c} x = 5 + (u - v)\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ y = 4 + (u + v)\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} u = (x - 5)\frac{\sqrt{2}}{2} + (y - 4)\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y - 9), \\ v = -(x - 5)\frac{\sqrt{2}}{2} + (y - 4)\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(y - x + 1). \end{array} \right\}$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις των u, v ως προς τα x, y στην εξίσωση της έλλειψης, τελικά έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{4}{2}(x+y-9)^2 + \frac{1}{2}(y-x+1)^2 = 4 &\Leftrightarrow 4(x^2+y^2+81-18x-18y+2xy) + (y^2+x^2+1+2y-2x-2xy) = 8 \\ &\Leftrightarrow 5x^2 + 5y^2 - 74x - 70y + 6xy + 317 = 0. \end{aligned}$$

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι, ΕΠΙΚ. ΚΑΘ. ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ
ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ, ΙΟΥΛΙΟΣ 2016.

ΟΝΟΜΑ ΦΟΙΤΗΤΗ: ....

Οδηγίες (Διαβάστε τες)

1. **Συμπληρώστε το όνομά σας άνω, και παραδώστε το παρόν με τις λύσεις**.
2. **Οι λύσεις πρέπει να γραφούν αποκλειστικά στην παρεχόμενη κόλλα, και όχι σε αυτό το δίφυλλο. Ό,τι γράψετε εδώ δεν θα διορθωθεί.**
3. Διάρκεια εξέτασης: 2 ΩΡΕΣ.
4. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
5. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
6. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε μολύβι ή/και στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός από κόκκινο.
7. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
8. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
9. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
10. Σύμφωνα με τον κανονισμό εξετάσεων, σε περίπτωση που διαπιστωθεί (κατά τη διάρκεια της εξέτασης είτε της διόρθωσης) αντιγραφή είτε απόπειρα αντιγραφής, θα ενημερωθούν τα αρμόδια όργανα του ιδρύματος.

Θέματα

1. **(Όρια)** *(1.5 μονάδα)* Να δώσετε τον ορισμό του ορίου $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ και κατόπιν να τον χρησιμοποιήσετε για να δείξετε ότι $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty$.
2. **(Παράγωγοι)** *(2 μονάδες)* Να υπολογίσετε την παράγωγο της $f(x) = \sqrt{|x+10|}$, για όλα τα σημεία $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία αυτή υπάρχει. Αν δεν υπάρχει σε κάποιο σημείο, εξηγήστε γιατί, και υπολογίστε τις πλευρικές παραγώγους σε εκείνο το σημείο. Χρησιμοποιήστε **αποκλειστικά** τον ορισμό της παραγώγου και γνωστές ιδιότητες ορίων.
3. **(Ολοκληρώματα)**

   (α΄) *(0.5 μονάδα)* Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα
   $$\int \frac{dx}{\cos x(\cos x + \sin x)}.$$
   (Υπόδειξη: μπορείτε να δοκιμάσετε την αλλαγή μεταβλητής $u = \tan x$).

   (β΄) *(1 μονάδα)* Ακολούθως υπολογίστε το καταχρηστικό ολοκλήρωμα
   $$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x(\sin x + \cos x)}.$$

4. **(Όγκος εκ περιστροφής)** *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε τον όγκο του στερεού εκ περιστροφής που δημιουργείται αν περιστρέψουμε γύρω από τον κάθετο άξονα $x = -1$ το χωρίο του $\mathbb{R}^2$ που βρίσκεται μεταξύ του άξονα των x και του γραφήματος της συνάρτησης $f(x) = \sin x$ μεταξύ των σημείων $x = 0$ και $x = \pi$.

5. **(Σειρές)** *(2 μονάδες)* Να προσδιορίσετε αν αποκλίνουν ή συγκλίνουν οι ακόλουθες σειρές:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(1/n)}{\cos(1/n) + 1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \log n + n \cos n}{n^{4-1/n}}.$$

6. **(Διαφορική Εξίσωση)** *(1.5 μονάδα)* Να υπολογίσετε τη γενική λύση της ΔΕ

$$y'(x) + \frac{2x}{\cos^2 x^2} y(x) = \frac{2x}{\cos^2 x^2}.$$

Τυπολόγιο

$$\cos(y-x)=\cos x\cos y+\sin x\sin y,\quad \sin\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$
$$\sin 2x=2\sin x\cos x,\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$$
$$\sin x+\sin y=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x+\cos y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x-\sin y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x-\cos y=-2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right],\quad \cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$$
$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right],\quad \cos x<\frac{\sin x}{x}<\frac{1}{\cos x},\quad \cos\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0: 0<|x-c|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.\qquad \forall\epsilon>0\ \exists\delta>0: c<x<c+\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$$
$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0: c-\delta<x<c\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.\qquad \forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}: x>X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$$
$$\forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}: x<X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.\qquad \forall M\in\mathbb{R}\exists\delta>0: 0<|x-c|<\delta\Rightarrow f(x)>M.$$
$$\forall M\in\mathbb{R}\exists X\in\mathbb{R}: x>X\Rightarrow f(x)>M.\qquad \forall\epsilon>0\exists N\in\mathbb{N}: n>N\Rightarrow|a_n-L|<\epsilon.$$

$$|f(x)-f(x_0)|\le C|x-x_0|,\quad |f(y)-f(x)|\le C|y-x|$$
$$(\arcsin y)'=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arccos y)'=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arctan y)'=\frac{1}{1+y^2}$$
$$f(\theta x_0+(1-\theta)x_1)<\theta f(x_0)+(1-\theta)f(x_1)$$
$$L(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^{n}m_i(t_i-t_{i-1}),\quad U(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^{n}M_i(t_i-t_{i-1}),\quad \sum_{i=1}^{n}f(x_i)(t_i-t_{i-1})$$
$$\left\{\begin{array}{c} x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} r=\sqrt{x^2+y^2},\\ \cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{array}\right\}$$
$$\frac{1}{2}\int_a^b f^2(\theta)\,d\theta,\quad \pi\int_a^b f^2,\quad 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx,\quad \int_a^b A(t)\,dt,\quad \int_a^b\sqrt{(f'(x))^2+(g'(x))^2}\,dx$$
$$y'+P(x)y=Q(x),\quad y(x)=[S(x)+C]\exp[-R(x)]$$
$$y(x)=\left\{y_0+\int_{x_0}^{x}Q(u)\exp\left[\int_{x_0}^{u}P(t)\,dt\right]du\right\}\exp\left[-\int_{x_0}^{x}P(t)\,dt\right]$$
$$E_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt,\quad |E_n(x)|\le M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$s_n=\sum_{k=1}^{n}f(k),\quad t_n=\int_1^n f(x)\,dx$$
$$S=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k,\quad s_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k,\quad 0<(-1)^n(S-s_n)<a_{n+1}$$
$$A_\parallel=\left[\frac{A\cdot B}{\|B\|^2}\right]B,\quad A_\perp=A-A_\parallel,\quad (x-x_0,y-y_0)(A,B)=0\Leftrightarrow Ax+By=Ax_0+By_0$$
$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0\\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0\end{vmatrix}=0,$$
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\Leftrightarrow Ax+By+Cz=Ax_0+By_0+Cz_0$$
$$y^2=4px,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-\epsilon^2)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(\epsilon^2-1)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\left\{\begin{array}{c} u=(x-x_0)\cos\theta+(y-y_0)\sin\theta,\\ v=-(x-x_0)\sin\theta+(y-y_0)\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}$$
$$\left\{\begin{array}{c} x=x_0+u\cos\theta-v\sin\theta,\\ y=y_0+u\sin\theta+v\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0+u\\y_0+v\end{pmatrix},\quad \theta=\frac{1}{2}\text{arccot}\frac{A-C}{B}$$
$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=x_0\begin{vmatrix} y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}-y_0\begin{vmatrix} x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}+z_0\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} x_0 & y_0\\ x_1 & y_1\end{vmatrix}=x_0y_1-x_1y_0.$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 1, 2015-2016
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΕΠΙΚ. ΚΑΘ. ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ

Λύσεις Τελικής Εξέτασης Ιουλίου Ακ. Έτους 2015-2016

1. **(Όρια)** *(1.5 μονάδα)* Να δώσετε τον ορισμό του ορίου $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ και κατόπιν να τον χρησιμοποιήσετε για να δείξετε ότι $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty$.

   Λύση: Έχουμε $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ αν, για κάθε $M \in \mathbb{R}$, υπάρχει κάποιο $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (0, \delta)$, να έχουμε $f(x) > M$.

   Σχετικά με τη δοσμένη συνάρτηση, έστω, λοιπόν, $M > 0$. Πρέπει να βρεθεί κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) > M$ για κάθε $x \in (0, \delta)$. Όμως στην συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε, αν $x > 0$,

$$f(x) > M \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} > M \Leftrightarrow \sqrt{x} < \frac{1}{M} \Leftrightarrow x < \frac{1}{M^2}.$$

   Επομένως, αν θέσουμε $\delta = \frac{1}{M^2}$, τότε αν $x \in (0, \delta)$ θα έχουμε αυτόματα $f(x) > M$. Η περίπτωση $M < 0$ είναι πιο απλή, αφού για κάθε $\delta > 0$ θα ισχύει η ζητούμενη συνεπαγωγή, αφού η συνάρτηση $f(x)$ είναι πάντα θετική. Επομένως, η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

2. **(Παράγωγοι)** *(2 μονάδες)* Να υπολογίσετε την παράγωγο της $f(x) = \sqrt{|x + 10|}$, για όλα τα σημεία $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία αυτή υπάρχει. Αν δεν υπάρχει σε κάποιο σημείο, εξηγήστε γιατί, και υπολογίστε τις πλευρικές παραγώγους σε εκείνο το σημείο. Χρησιμοποιήστε **αποκλειστικά** τον ορισμό της παραγώγου και γνωστές ιδιότητες ορίων.

   Λύση: Έστω, καταρχάς, $x > -10$. Έχουμε, με χρήση του ορισμού της παραγώγου,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{|x+h+10|} - \sqrt{|x+10|}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h+10) - (x+10)}{(\sqrt{x+h+10} + \sqrt{x+10})h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h+10} + \sqrt{x+10}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x+10}}. \end{aligned}$$

   Οι απόλυτες τιμές αφαιρέθηκαν παρατηρώντας ότι, με δεδομένο ότι $x > -10$, για τιμές του h αρκούντως κοντά στο 0, οι ποσότητες εντός των απόλυτων τιμών είναι θετικές.

   Έστω πως $x < -10$. Εντελώς ανάλογα έχουμε

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{|x+h+10|} - \sqrt{|x+10|}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(-x-h-10) - (-x-10)}{(\sqrt{-x-h-10} + \sqrt{-x-10})h} = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{\sqrt{-x-h-10} + \sqrt{-x-10}} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{-x-10}}. \end{aligned}$$

   Οι απόλυτες τιμές αφαιρέθηκαν παρατηρώντας ότι, με δεδομένο ότι $x < -10$, για τιμές του h αρκούντως κοντά στο 0, οι ποσότητες εντός των απόλυτων τιμών είναι αρνητικές.

   Τέλος, έστω $x = -10$. Σε αυτή την περίπτωση διαφέρουν οι πλευρικές παράγωγοι. Πράγματι,

$$\begin{aligned} f'(-10^+) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{|-10+h+10|} - \sqrt{|-10+10|}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = \infty, \\ f'(-10^-) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{|-10+h+10|} - \sqrt{|-10+10|}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{-h}}{h} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt{t}}{-t} = \lim_{t\to 0^+} -\frac{1}{\sqrt{t}} = -\infty. \end{aligned}$$

   Οι απόλυτες τιμές αφαιρέθηκαν όπως και στα προηγούμενα σκέλη. Για τον υπολογισμό του δεύτερου ορίου, χρειάστηκε να κάνουμε και την αλλαγή μεταβλητής $t = -h$. Επομένως, για $x = -10$ η παράγωγος δεν υπάρχει ούτε ως άπειρο όριο.

3. **(Ολοκληρώματα)**

(α΄) *(0.5 μονάδα)* Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{\cos x(\cos x+\sin x)}.$$

(Υπόδειξη: μπορείτε να δοκιμάσετε την αλλαγή μεταβλητής $u=\tan x$).

(β΄) *(1 μονάδα)* Ακολούθως υπολογίστε το καταχρηστικό ολοκλήρωμα

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x(\sin x+\cos x)}.$$

Λύση:

(α΄) Θέτουμε $u=\tan x$, επομένως $du=\frac{dx}{\cos^2 x}$, άρα έχουμε:

$$\int \frac{dx}{\cos x(\cos x+\sin x)} = \int \frac{dx}{\cos^2 x\left(1+\frac{\sin x}{\cos x}\right)} = \int \frac{du}{1+u} = \log|1+u| = \log\left|1+\frac{\sin x}{\cos x}\right|.$$

(β΄) Παρατηρούμε ότι το ολοκλήρωμα είναι καταχρηστικό διότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση απειρίζεται στο $-\pi/4$. Επομένως,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x(\sin x+\cos x)} &= \lim_{h\to(-\pi/4)^+}\int_h^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x(\sin x+\cos x)} = \lim_{h\to(-\pi/4)^+}\left[\log\left(1+\frac{\sin x}{\cos x}\right)\right]_h^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \log\left(1+\frac{\sin \pi/4}{\cos\pi/4}\right) - \lim_{h\to(-\pi/4)^+}\log\left(1+\frac{\sin h}{\cos h}\right) \\ &= \log 2-(-\infty)=\infty.\end{aligned}$$

Στον υπολογισμό του τελευταίου ορίου χρησιμοποιήσαμε το ότι $\lim_{x\to 0^+}\log x=-\infty$.

4. **(Όγκος εκ περιστροφής)** *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε τον όγκο του στερεού εκ περιστροφής που δημιουργείται αν περιστρέψουμε γύρω από τον κάθετο άξονα $x=-1$ το χωρίο του $\mathbb{R}^2$ που βρίσκεται μεταξύ του άξονα των x και του γραφήματος της συνάρτησης $f(x)=\sin x$ μεταξύ των σημείων $x=0$ και $x=\pi$.

   Λύση: Παρατηρούμε πως το στερεό που δημιουργείται είναι ίδιο με αυτό που δημιουργείται αν περιστρέψουμε γύρω από τον άξονα των y, δηλαδή τον άξονα $x=0$, την αρχική συνάρτηση μετατοπισμένη δεξιά κατά 1, δηλαδή την $f(x)=\sin(x-1)$ μεταξύ των σημείων $x=1$ και $x=1+\pi$. Επομένως, ο ζητούμενος όγκος είναι

$$\begin{aligned}V &= 2\pi\int_1^{1+\pi} x\sin(x-1)\,dx = 2\pi\int_0^{\pi}(y+1)\sin y\,dy = 2\pi\int_0^{\pi} y\sin y\,dy + 2\pi\int_0^{\pi}\sin y\,dy \\ &= 2\pi\int_0^{\pi} y(-\cos y)'\,dy + 2\pi\int_0^{\pi}(-\cos y)'\,dy \\ &= 2\pi\left[y\cos y\right]_{\pi}^{0} + 2\pi\int_0^{\pi}\cos y\,dy + 2\pi(1+1) \\ &= 2\pi(0+\pi) + 2\pi\int_0^{\pi}(\sin y)'\,dy + 4\pi = 2\pi^2+2\pi(0-0)+4\pi = 2\pi^2+4\pi.\end{aligned}$$

   Η δεύτερη ισότητα προέκυψε από την αλλαγή μεταβλητών $y=x-1$, ενώ η πέμπτη ισότητα προέκυψε με παραγοντική ολοκλήρωση.

5. **(Σειρές)** *(2 μονάδες)* Να προσδιορίσετε αν αποκλίνουν ή συγκλίνουν οι ακόλουθες σειρές:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(1/n)}{\cos(1/n)+1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\log n+n\cos n}{n^{4-1/n}}.$$

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos(1/n)}{\cos(1/n)+1} = \frac{\cos 0}{\cos 0+1} = \frac{1}{2},$$

επομένως, από το αναγκαίο κριτήριο του Cauchy, η σειρά αποκλίνει.

(β΄) Παρατηρούμε πως

$$\frac{n^2\log n + n\cos n}{n^{4-1/n}} \le \frac{n^2\log n + n}{n^{4-1/n}} \le \frac{n^2\log n + n^2\log n}{n^{4-1/n}} = \frac{2\log n}{n^{2-1/n}} \le \frac{\log n}{n^{1.9}},$$

για αρκούντως μεγάλα n. Επομένως, αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^{1.9}}$ συγκλίνει, θα συγκλίνει και η αρχική. Για τη νέα σειρά έχουμε, όμως,

$$\frac{\frac{\log n}{n^{1.9}}}{\frac{1}{n^{1.8}}} = \frac{\log n}{n^{0.1}},$$

που τείνει στο 0, αφού για κάθε $a > 0$ έχουμε, με χρήση του Κανόνα του L'Hôpital,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n^a} = \lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{an^{a-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{an^a} = 0.$$

Αφού η $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1.8}}$ συγκλίνει, θα συγκλίνει, τελικά, και η αρχική.

6. **(Διαφορική Εξίσωση)** *(1.5 μονάδα)* Να υπολογίσετε τη γενική λύση της ΔΕ

$$y'(x) + \frac{2x}{\cos^2 x^2}y(x) = \frac{2x}{\cos^2 x^2}.$$

Λύση: Καταρχάς παρατηρούμε πως

$$\int \frac{2x}{\cos^2 x^2}\,dx = \int \frac{du}{\cos^2 u} = \tan u + C = \tan x^2 + C.$$

Η δεύτερη ισότητα προέκυψε με την αλλαγή μεταβλητής $u = x^2$. Κατά τα γνωστά από τη θεωρία για τις γραμμικές ΔΕ πρώτης τάξης, έχουμε:

$$\begin{aligned} y'(x) + \frac{2x}{\cos^2 x^2}y(x) = \frac{2x}{\cos^2 x^2} &\Leftrightarrow e^{\tan x^2}y'(x) + \frac{2x}{\cos^2 x^2}y(x)e^{\tan x^2} = \frac{2x}{\cos^2 x^2}e^{\tan x^2} \\ &\Leftrightarrow \left(y(x)e^{\tan x^2}\right)' = \left(e^{\tan x^2}\right)' \Leftrightarrow y(x)e^{\tan x^2} = e^{\tan x^2} + C \Leftrightarrow y(x) = 1 + \frac{C}{e^{\tan x^2}}. \end{aligned}$$

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι, ΕΠΙΚ. ΚΑΘ. ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ
ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ, ΙΟΥΛΙΟΣ 2016.

ΟΝΟΜΑ ΦΟΙΤΗΤΗ: ....

Οδηγίες (Διαβάστε τες)

1. **Συμπληρώστε το όνομά σας άνω, και παραδώστε το παρόν με τις λύσεις**.
2. **Οι λύσεις πρέπει να γραφούν αποκλειστικά στην παρεχόμενη κόλλα, και όχι σε αυτό το δίφυλλο. Ό,τι γράψετε εδώ δεν θα διορθωθεί.**
3. Διάρκεια εξέτασης: 2 ΩΡΕΣ.
4. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
5. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
6. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε μολύβι ή/και στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός από κόκκινο.
7. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
8. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
9. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
10. Σύμφωνα με τον κανονισμό εξετάσεων, σε περίπτωση που διαπιστωθεί (κατά τη διάρκεια της εξέτασης είτε της διόρθωσης) αντιγραφή είτε απόπειρα αντιγραφής, θα ενημερωθούν τα αρμόδια όργανα του ιδρύματος.

Θέματα

1. **(Όρια)** *(1 μονάδα)* Να δείξετε, χρησιμοποιώντας αποκλειστικά ορισμούς πλευρικών ορίων, ότι αν η $f(x)$ είναι περιττή με $\lim_{x\to 0^+} f(x) = L$, τότε θα έχουμε και $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -L$.
2. **(Ολοκληρώματα)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα καταχρηστικά ολοκληρώματα:
   (α΄) *(1 μονάδα)* $\int_0^{\pi/2} \cot\theta \, d\theta$.
   (β΄) *(1 μονάδα)* $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.
3. **(Όγκοι)** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.
   (α΄) *(0.5 μονάδα)* Έστω R_1 το χωρίο που βρίσκεται μεταξύ του άξονα των x και του γραφήματος της f <u>στο διάστημα $[-1,1]$</u>. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού εκ περιστροφής που σχηματίζεται αν <u>περιστρέψουμε το R_1</u> <u>περί τον άξονα των x</u>.
   (β΄) *(0.5 μονάδα)* Έστω R_2 το χωρίο που βρίσκεται μεταξύ του άξονα των x και του γραφήματος της f <u>στο διάστημα $[0,1]$</u>. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού εκ περιστροφής που σχηματίζεται αν <u>περιστρέψουμε το R_2</u> <u>περί τον άξονα των y</u>.
   (γ΄) *(1 μονάδα)* Τι παρατηρείτε συγκρίνοντας τα αποτελέσματα; Δώστε μια γεωμετρική ερμηνεία.
4. **(ΔΕ)** Δίνεται η ακόλουθη ΔΕ:
$$y'(x)\sin y(x) = e^x.$$

(α΄) *(0.5 μονάδα)* Να περιγράψετε την γενική της λύση βάσει μιας εξίσωσης που δεν εμφανίζει την $y'(x)$.

(β΄) *(0.5 μονάδα)* Να προσδιορίσετε την ειδική της λύση που διέρχεται από το σημείο $(0, \pi)$.

(γ΄) *(0.5 μονάδα)* Ποιο είναι το όριο της άνω ειδικής λύσης καθώς $x \to -\infty$;

5. **(Πολυώνυμα Taylor)** Να προσδιορίσετε τα ακόλουθα πολυώνυμα Taylor:

(α΄) *(0.5 μονάδα)* Το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης της συνάρτησης $f(x) = x^3 + x^2 + 4x + 6$ στο $x_0 = 2$.

(β΄) *(0.5 μονάδα)* Το πολυώνυμο Taylor τρίτης τάξης της συνάρτησης $g(x) = \arctan x$ στο $x_0 = 2$.

6. **(Σειρές)**

(α΄) *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε αν συγκλίνει ή όχι η σειρά $\sum \sin(e^{-n})$.

(β΄) *(0.5 μονάδα)* Να δείξετε ότι αν η σειρά $\sum a_n$ συγκλίνει, τότε δεν μπορεί να συγκλίνει και η σειρά $\sum e^{-a_n}$.

(γ΄) *(1 μονάδα)* Να δείξετε ότι αν η σειρά $\sum a_n$ συγκλίνει, και $a_n > 0$, τότε θα συγκλίνει και η σειρά $\sum (a_n)^2$.

Τυπολόγιο

$$\cos(y-x)=\cos x\cos y+\sin x\sin y,\quad \sin\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$
$$\sin 2x=2\sin x\cos x,\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$$
$$\sin x+\sin y=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x+\cos y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x-\sin y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x-\cos y=-2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right],\quad \cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$$
$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right],\quad \cos x<\frac{\sin x}{x}<\frac{1}{\cos x},\quad \cos\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0:0<|x-c|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.\qquad \forall\epsilon>0\ \exists\delta>0:c<x<c+\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$$
$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0:c-\delta<x<c\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.\qquad \forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}:x>X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$$
$$\forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}:x<X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.\qquad \forall M\in\mathbb{R}\exists\delta>0:0<|x-c|<\delta\Rightarrow f(x)>M.$$
$$\forall M\in\mathbb{R}\exists X\in\mathbb{R}:x>X\Rightarrow f(x)>M.\qquad \forall\epsilon>0\exists N\in\mathbb{N}:n>N\Rightarrow|a_n-L|<\epsilon.$$

$$|f(x)-f(x_0)|\le C|x-x_0|,\quad |f(y)-f(x)|\le C|y-x|$$
$$(\arcsin y)'=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arccos y)'=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arctan y)'=\frac{1}{1+y^2}$$
$$f(\theta x_0+(1-\theta)x_1)<\theta f(x_0)+(1-\theta)f(x_1)$$
$$L(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^{n}m_i(t_i-t_{i-1}),\quad U(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^{n}M_i(t_i-t_{i-1}),\quad \sum_{i=1}^{n}f(x_i)(t_i-t_{i-1})$$
$$\left\{\begin{array}{c}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}r=\sqrt{x^2+y^2},\\ \cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{array}\right\}$$
$$\frac{1}{2}\int_a^b f^2(\theta)\,d\theta,\quad \pi\int_a^b f^2,\quad 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx,\quad \int_a^b A(t)\,dt,\quad \int_a^b\sqrt{(f'(x))^2+(g'(x))^2}\,dx$$
$$y'+P(x)y=Q(x),\quad y(x)=[S(x)+C]\exp[-R(x)]$$
$$y(x)=\left\{y_0+\int_{x_0}^{x}Q(u)\exp\left[\int_{x_0}^{u}P(t)\,dt\right]du\right\}\exp\left[-\int_{x_0}^{x}P(t)\,dt\right]$$
$$E_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt,\quad |E_n(x)|\le M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$s_n=\sum_{k=1}^{n}f(k),\quad t_n=\int_1^n f(x)\,dx$$
$$S=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k,\quad s_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k,\quad 0<(-1)^n(S-s_n)<a_{n+1}$$
$$A_\parallel=\left[\frac{A\cdot B}{\|B\|^2}\right]B,\quad A_\perp=A-A_\parallel,\quad (x-x_0,y-y_0)(A,B)=0\Leftrightarrow Ax+By=Ax_0+By_0$$
$$\begin{vmatrix}x-x_0&y-y_0&z-z_0\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}x-x_0&y-y_0&z-z_0\\x_1-x_0&y_1-y_0&z_1-z_0\\x_2-x_0&y_2-y_0&z_2-z_0\end{vmatrix}=0,$$
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\Leftrightarrow Ax+By+Cz=Ax_0+By_0+Cz_0$$
$$y^2=4px,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-\epsilon^2)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(\epsilon^2-1)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\left\{\begin{array}{c}u=(x-x_0)\cos\theta+(y-y_0)\sin\theta,\\ v=-(x-x_0)\sin\theta+(y-y_0)\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}$$
$$\left\{\begin{array}{c}x=x_0+u\cos\theta-v\sin\theta,\\ y=y_0+u\sin\theta+v\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0+u\\y_0+v\end{pmatrix},\quad \theta=\frac{1}{2}\mathrm{arccot}\frac{A-C}{B}$$
$$\begin{vmatrix}x_0&y_0&z_0\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=x_0\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}-y_0\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}+z_0\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}x_0&y_0\\x_1&y_1\end{vmatrix}=x_0y_1-x_1y_0.$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 1, 2015-2016
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΕΠΙΚ. ΚΑΘ. ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ

Λύσεις Τελικής Εξέτασης Σεπτεμβρίου Ακ. Έτους 2015-2016

1. **(Όρια)** *(1 μονάδα)* Να δείξετε, χρησιμοποιώντας αποκλειστικά ορισμούς πλευρικών ορίων, ότι αν η $f(x)$ είναι περιττή με $\lim_{x\to 0^+} f(x) = L$, τότε θα έχουμε και $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -L$.

   Λύση: Έστω $f(x)$ περιττή με $\lim_{x\to 0^+} f(x) = L$. Εξ ορισμού του δοσμένου ορίου, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε όποτε $0 < x < \delta$ να έχουμε και $|f(x) - L| < \epsilon$.

   Έστω, λοιπόν, κάποιο $\epsilon > 0$. Έστω το δ που μας δίνει ο ορισμός του $\lim_{x\to 0^+} f(x)$. Έστω, επίσης, κάποιο x τέτοιο ώστε $-\delta < x < 0$. Έχουμε:

$$-\delta < x < 0 \Rightarrow 0 < -x < \delta \Rightarrow |f(-x) - L| < \epsilon \Rightarrow |-f(x) - L| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - (-L)| < \epsilon,$$

   και επομένως ικανοποιείται ο ορισμός του $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -L$. Οι άνω συνεπαγωγές προέκυψαν όλες με απλή άλγεβρα, εκτός της δεύτερης που προέκυψε με χρήση του ορισμού του ορίου $\lim_{x\to 0^+} f(x) = L$.

2. **(Ολοκληρώματα)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα καταχρηστικά ολοκληρώματα:

   (α΄) *(1 μονάδα)* $\int_0^{\pi/2} \cot\theta\, d\theta$.

   (β΄) *(1 μονάδα)* $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

   Λύση:

   (α΄) Παρατηρήστε ότι το ολοκλήρωμα είναι καταχρηστικό, καθώς η συνάρτηση της συνεφαπτομένης δεν ορίζεται για $\theta = 0$. Επομένως, κατά τα γνωστά από τη θεωρία των καταχρηστικών ολοκληρωμάτων, έχουμε:

$$\int_0^{\pi/2} \cot\theta\, d\theta = \lim_{x\to 0^+} \int_x^{\pi/2} \cot\theta\, d\theta = \lim_{x\to 0^+} \int_x^{\pi/2} [\log\sin\theta]'\, d\theta = \lim_{x\to 0^+} [\log\sin(\pi/2) - \log\sin x]$$
$$= \log 1 - \lim_{x\to 0^+} \log\sin x = 0 - (-\infty) = \infty.$$

   Για τον υπολογισμό του ορίου $\lim_{x\to 0^+} \log\sin x$ χρησιμοποιήσαμε το ότι όταν το x τείνει στο 0 από τα δεξιά, το $\sin x$ τείνει στο 0 επίσης από τα δεξιά, και το ότι $\lim_{t\to 0^+} \log t = -\infty$.

   (β΄)

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \\
&= \lim_{t\to-\infty} \int_t^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{dx}{1+x^2} \\
&= \lim_{t\to-\infty} \int_t^0 (\arctan x)'\, dx + \lim_{t\to\infty} \int_0^t (\arctan x)'\, dx \\
&= \arctan 0 - \lim_{t\to-\infty} \arctan t + \lim_{t\to\infty} \arctan t - \arctan 0 \\
&= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi.
\end{aligned}$$

3. **(Ογκοι)** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

   (α΄) *(0.5 μονάδα)* Έστω R_1 το χωρίο που βρίσκεται μεταξύ του άξονα των x και του γραφήματος της f στο διάστημα $[-1, 1]$. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού εκ περιστροφής που σχηματίζεται αν περιστρέψουμε το R_1 περί τον άξονα των x.

   (β΄) *(0.5 μονάδα)* Έστω R_2 το χωρίο που βρίσκεται μεταξύ του άξονα των x και του γραφήματος της f στο διάστημα $[0, 1]$. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού εκ περιστροφής που σχηματίζεται αν περιστρέψουμε το R_2 περί τον άξονα των y.

   (γ΄) *(1 μονάδα)* Τι παρατηρείτε συγκρίνοντας τα αποτελέσματα; Δώστε μια γεωμετρική ερμηνεία.

(α΄) Κατά τα γνωστά από τη θεωρία για την περιστροφή περί τον άξονα των x, έχουμε για τον πρώτο από τους ζητούμενους όγκους:

$$V_1 = \int_{-1}^{1} \pi f^2(x)\,dx = \pi \int_{-1}^{1} (1-x^2)\,dx = \pi \int_{-1}^{1} \left(x - \frac{x^3}{3}\right)'\,dx = \pi\left(1 - \frac{1}{3} - (-1) + \frac{(-1)^3}{3}\right) = \frac{4\pi}{3}.$$

(β΄) Κατά τα γνωστά από τη θεωρία για την περιστροφή περί τον άξονα των y, έχουμε, για τον δεύτερο από τους ζητούμενους όγκους:

$$V_2 = \int_{0}^{1} 2\pi x\sqrt{1-x^2}\,dx = 2\pi \int_{0}^{1} \left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]'\,dx = 2\pi\left[0 + \frac{1}{3}\right] = \frac{2\pi}{3}.$$

(γ΄) Παρατηρήστε ότι ο πρώτος όγκος είναι ο όγκος μιας σφαίρας ακτίνας 1, και επομένως πράγματι πρέπει να ισούται με $\frac{4}{3}\pi$. Ο δεύτερος όγκος είναι ο όγκος ενός ημισφαιρίου ακτίνας 1, και πράγματι προκύπτει ίσος με το μισό του προηγούμενου, δηλαδή $\frac{2}{3}\pi$.

4. **(ΔΕ)** Δίνεται η ακόλουθη ΔΕ:

$$y'(x)\sin y(x) = e^x.$$

(α΄) *(0.5 μονάδα)* Να περιγράψετε την γενική της λύση βάσει μιας εξίσωσης που δεν εμφανίζει την $y'(x)$.

(β΄) *(0.5 μονάδα)* Να προσδιορίσετε την ειδική της λύση που διέρχεται από το σημείο $(0, \pi)$.

(γ΄) *(0.5 μονάδα)* Ποιο είναι το όριο της άνω ειδικής λύσης καθώς $x \to -\infty$;

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως η ΔΕ είναι χωριζομένων μεταβλητών, επομένως, κατά τα γνωστά από τη θεωρία, έχουμε για τη γενική λύση:

$$y'(x)\sin y(x) = e^x \Leftrightarrow dy \sin y = e^x dx \Leftrightarrow \int \sin y dy = \int e^x dx \Leftrightarrow -\cos y = e^x + C$$
$$\Leftrightarrow \cos y(x) = -e^x - C \Leftrightarrow y(x) = \arccos(-e^x - C) + 2k\pi,$$

όπου $C \in \mathbb{R}$ και $k \in \mathbb{Z}$. Παρατηρήστε οτι για κάθε C, το πεδίο ορισμού των αντίστοιχων ειδικών λύσεων $y(x)$ είναι τέτοιο ώστε να έχουμε

$$-1 < -e^x - C < 1 \Leftrightarrow -1 < e^x + C < 1 \Leftrightarrow -1 - C < e^x < 1 - C.$$

(β΄) Με αντικατάσταση στην γενική λύση των τιμών $y(x) = \pi$, $x = 0$, προκύπτει πως

$$\cos\pi = -1 - C \Rightarrow C = 0,$$

επομένως

$$\pi = \arccos(-e^0 - 0) + 2k\pi \Rightarrow k = 0,$$

και η ειδική λύση είναι η

$$y(x) = \arccos(-e^x),$$

που ορίζεται στο διάστημα $[-\infty, 0]$.

(γ΄) Για την άνω ειδική λύση έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = \lim_{x\to-\infty} \arccos(-e^x) = \arccos 0 = \pi/2.$$

5. **(Πολυώνυμα Taylor)** Να προσδιορίσετε τα ακόλουθα πολυώνυμα Taylor:

(α΄) *(0.5 μονάδα)* Το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης της συνάρτησης $f(x) = x^3 + x^2 + 4x + 6$ στο $x_0 = 2$.

(β΄) *(0.5 μονάδα)* Το πολυώνυμο Taylor τρίτης τάξης της συνάρτησης $g(x) = \arctan x$ στο $x_0 = 2$.

Λύση:

(α΄) Έχουμε $f'(x) = 3x^2 + 2x + 4$ και $f''(x) = 6x + 2$, επομένως, κατά τα γνωστά από τη θεωρία, το ζητούμενο πολυώνυμο είναι το

$$P(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + f''(2)(x-2)^2/2 = 26 + 20(x-2) + 7(x-2)^2.$$

(β΄) Σχετικά με τις παραγώγους της συνάρτησης, έχουμε

$$\begin{aligned}
(\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2},\\
(\arctan x)'' &= \frac{-2x}{(1+x^2)^2},\\
(\arctan x)''' &= \frac{-2(1+x^2)^2+4x(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} = \frac{-2-2x^2+8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}.
\end{aligned}$$

Επομένως, κατά τα γνωστά από τη θεωρία των πολυωνύμων Taylor, το πολυώνυμο Taylor τρίτης τάξης στο $x_0 = 2$ είναι το

$$\begin{aligned}
P(x) &= f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{6}(x-2)^3\\
&= \arctan(2) + \frac{1}{5}(x-2) - \frac{2}{25}(x-2)^2 + \frac{11}{375}(x-2)^3.
\end{aligned}$$

6. **(Σειρές)**

(α΄) *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε αν συγκλίνει ή όχι η σειρά $\sum \sin(e^{-n})$.

(β΄) *(0.5 μονάδα)* Να δείξετε ότι αν η σειρά $\sum a_n$ συγκλίνει, τότε δεν μπορεί να συγκλίνει και η σειρά $\sum e^{-a_n}$.

(γ΄) *(1 μονάδα)* Να δείξετε ότι αν η σειρά $\sum a_n$ συγκλίνει, και $a_n > 0$, τότε θα συγκλίνει και η σειρά $\sum (a_n)^2$.

Λύση:

(α΄) Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο του λόγου:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(e^{-(n+1)}\right)}{\sin\left(e^{-n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{-e^{-(n+1)}\cos\left(e^{-(n+1)}\right)}{-e^{-n}\cos\left(e^{-n}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\cos\left(e^{-(n+1)}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\cos\left(e^{-n}\right)} e^{-1} = e^{-1}.$$

Στη δεύτερη ισότητα εφαρμόσαμε το κριτήριο του L'Hôpital. Επομένως, τελικά η σειρά συγκλίνει.

(β΄) Αν η σειρά συγκλίνει, τότε, από το αναγκαίο κριτήριο σύγκλισης του Cauchy, θα πρέπει $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, επομένως

$$\lim_{n\to\infty} e^{-a_n} = e^{-\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = e^{-0} = 1,$$

επομένως, και πάλι από το αναγκαίο κριτήριο του Cauchy, η σειρά $\sum e^{-a_n}$ δεν μπορεί να συγκλίνει.

(γ΄) Από το αναγκαίο κριτήριο Cauchy, προκύπτει πως $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, επομένως για κάποιο n_0 θα έχουμε ότι για κάθε $n > n_0$ θα ισχύει

$$0 < a_n < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < (a_n)^2 < \frac{a_n}{2},$$

επομένως, από το κριτήριο της σύγκρισης, προκύπτει ότι θα συγκλίνει και η $\sum (a_n)^2$.

Παρατηρήστε ότι το αποτέλεσμα δεν θα ίσχυε αν δεν ίσχυε ο περιορισμός $a_n > 0$. Μπορείτε να βρείτε ένα αντιπαράδειγμα, σε αυτή την περίπτωση;