ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι, ΕΠΙΚ. ΚΑΘ. ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ
ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2017.

ΟΝΟΜΑ ΦΟΙΤΗΤΗ: . . . .

Οδηγίες (Διαβάστε τες!)

1. **Συμπληρώστε το όνομά σας άνω, και παραδώστε το παρόν με τις λύσεις**.
2. **Οι λύσεις πρέπει να γραφούν αποκλειστικά στην παρεχόμενη κόλλα, και όχι σε αυτό το δίφυλλο. Ό,τι γράψετε εδώ δεν θα διορθωθεί.**
3. Διάρκεια εξέτασης: 2 ΩΡΕΣ.
4. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
5. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
6. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε μολύβι ή/και στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός από κόκκινο.
7. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
8. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
9. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
10. Σύμφωνα με τον κανονισμό εξετάσεων, σε περίπτωση που διαπιστωθεί (κατά τη διάρκεια της εξέτασης είτε της διόρθωσης) αντιγραφή είτε απόπειρα αντιγραφής, θα ενημερωθούν τα αρμόδια όργανα του ιδρύματος.

Θέματα

1. **(Περιοδικές Συναρτήσεις)** Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ περιοδική με περίοδο T.

   (α΄) *(1 μονάδα)* Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ όπου
   $$g(x)=\int_x^{x+T} f(t)\,dt$$
   είναι σταθερή. Κάντε ένα απλό σχήμα που να εξηγεί το αποτέλεσμα.

   (β΄) *(1 μονάδα)* Να δείξετε ότι η συνάρτηση
   $$h(x)=\int_0^x f(t)\,dt - x\left(\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt\right)$$
   είναι επίσης περιοδική.

2. **(Αόριστα Ολοκληρώματα)** *(2 μονάδες)* Να υπολογίσετε τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:
   $$\int \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx,\quad \int \frac{dx}{\cos x}.$$
   (Στο δεύτερο ολοκλήρωμα μπορείτε να θέσετε $u=\sin x$.)

3. **(Καταχρηστικά ολοκληρώματα)** *(2 μονάδες)* Να υπολογίσετε τα ακόλουθα καταχρηστικά ολοκληρώματα:
$$\int_0^1 (\log x)^2\, dx, \qquad \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^2 x}.$$

4. **(ΔΕ)**

   (α΄) *(1 μονάδα)* Έστω η διαφορική εξίσωση
   $$y'(x) - y(x)\sin x = xe^{-\cos x}$$
   που ισχύει παντού στο $\mathbb{R}$. Να βρείτε τη γενική της λύση.

   (β΄) *(0.5 μονάδα)* Να βρείτε το όριο των λύσεων της άνω ΔΕ καθώς $x \to \infty$.

   (γ΄) *(0.5 μονάδα)* Έστω, τώρα, η διαφορική εξίσωση
   $$-z'(x) - z(x)\sin x = z^2(x)xe^{-\cos x}.$$
   Να βρείτε όλες τις λύσεις της που δεν μηδενίζονται πουθενά στο $\mathbb{R}$. *(Υπόδειξη: βρείτε τη ΔΕ που ικανοποιεί η συνάρτηση $(z(x))^{-1}$.)*

5. **(Σειρές)**

   (α΄) *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε αν συγκλίνει ή αποκλίνει η σειρά
   $$\sum \frac{2 + n\log n}{n^4 + n^2\log^2 n + \cos n}.$$

   (β΄) *(1 μονάδα)* Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ για την οποία
   $$a_n = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{n/2}, & n \text{ άρτιος}, \\ \frac{1}{\sqrt{(n+1)/2}}, & n \text{ περιττός}. \end{cases}$$
   Υπολογίστε και γράψτε σε απλή μορφή τους πρώτους 10 όρους αυτής της σειράς. Κατόπιν, να προσδιορίσετε αν η σειρά αποκλίνει ή συγκλίνει.

Τυπολόγιο

$$\cos(y-x)=\cos x\cos y+\sin x\sin y,\quad \sin\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$
$$\sin 2x=2\sin x\cos x,\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$$
$$\sin x+\sin y=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x+\cos y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x-\sin y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x-\cos y=-2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right],\quad \cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$$
$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right],\quad \cos x<\frac{\sin x}{x}<\frac{1}{\cos x},\quad \cos\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0: 0<|x-c|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$ $\qquad$ $\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0: c<x<c+\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$

$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0: c-\delta<x<c\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$ $\qquad$ $\forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}: x>X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$

$\forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}: x<X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$ $\qquad$ $\forall M\in\mathbb{R}\exists\delta>0: 0<|x-c|<\delta\Rightarrow f(x)>M.$

$\forall M\in\mathbb{R}\exists X\in\mathbb{R}: x>X\Rightarrow f(x)>M.$ $\qquad$ $\forall\epsilon>0\exists N\in\mathbb{N}: n>N\Rightarrow|a_n-L|<\epsilon.$

$$|f(x)-f(x_0)|\le C|x-x_0|,\quad |f(y)-f(x)|\le C|y-x|$$
$$(\arcsin y)'=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arccos y)'=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arctan y)'=\frac{1}{1+y^2}$$
$$f(\theta x_0+(1-\theta)x_1)<\theta f(x_0)+(1-\theta)f(x_1)$$
$$L(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^{n}m_i(t_i-t_{i-1}),\quad U(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^{n}M_i(t_i-t_{i-1}),\quad \sum_{i=1}^{n}f(x_i)(t_i-t_{i-1})$$
$$\left\{\begin{array}{c} x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} r=\sqrt{x^2+y^2},\\ \cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{array}\right\}$$
$$\frac{1}{2}\int_a^b f^2(\theta)\,d\theta,\quad \pi\int_a^b f^2,\quad 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx,\quad \int_a^b A(t)\,dt,\quad \int_a^b\sqrt{(f'(x))^2+(g'(x))^2}\,dx$$
$$y'+P(x)y=Q(x),\quad y(x)=[S(x)+C]\exp[-R(x)]$$

$$P_{n,a}(x)\quad\triangleq\quad f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
$$y(x)=\left\{y_0+\int_{x_0}^{x}Q(u)\exp\left[\int_{x_0}^{u}P(t)\,dt\right]du\right\}\exp\left[-\int_{x_0}^{x}P(t)\,dt\right]$$
$$E_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x(x-t)^nf^{(n+1)}(t)\,dt,\quad |E_n(x)|\le M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$s_n=\sum_{k=1}^{n}f(k),\quad t_n=\int_1^n f(x)\,dx$$
$$S=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k,\quad s_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k,\quad 0<(-1)^n(S-s_n)<a_{n+1}$$
$$A_{\|}=\left[\frac{A\cdot B}{\|B\|^2}\right]B,\quad A_{\perp}=A-A_{\|},\quad (x-x_0,y-y_0)(A,B)=0\Leftrightarrow Ax+By=Ax_0+By_0$$
$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0\\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0\end{vmatrix}=0,$$
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\Leftrightarrow Ax+By+Cz=Ax_0+By_0+Cz_0$$

$$y^2=4px,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-\epsilon^2)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(\epsilon^2-1)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\left\{\begin{array}{c} u=(x-x_0)\cos\theta+(y-y_0)\sin\theta,\\ v=-(x-x_0)\sin\theta+(y-y_0)\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}$$
$$\left\{\begin{array}{c} x=x_0+u\cos\theta-v\sin\theta,\\ y=y_0+u\sin\theta+v\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0+u\\ y_0+v\end{pmatrix},\quad \theta=\frac{1}{2}\mathrm{arccot}\frac{A-C}{B}$$
$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=x_0\begin{vmatrix} y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}-y_0\begin{vmatrix} x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}+z_0\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} x_0 & y_0\\ x_1 & y_1\end{vmatrix}=x_0y_1-x_1y_0.$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 1, 2016-2017
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΕΠΙΚ. ΚΑΘ. ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ

Λύσεις Εξετάσεων Φεβρουαρίου Ακ. Έτους 2016-2017

1. **(Περιοδικές Συναρτήσεις)** Έστω συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ περιοδική με περίοδο T.

(α΄) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ όπου

$$g(x) = \int_x^{x+T} f(t)\,dt$$

είναι σταθερή. Κάντε ένα απλό σχήμα που να εξηγεί το αποτέλεσμα.

(β΄) Να δείξετε ότι η συνάρτηση

$$h(x) = \int_0^x f(t)\,dt - x\left(\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt\right)$$

είναι επίσης περιοδική.

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως

$$g'(x) = \left(\int_x^{x+T} f(t)\,dt\right)' = \left(\int_0^{x+T} f(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt\right)' = f(x+T) - f(x) = 0.$$

Στον υπολογισμό των παραγώγων χρησιμοποιήσαμε το Πρώτο Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού. Η τελευταία ισότητα προκύπτει λόγω της περιοδικότητας της f. Αφού, λοιπόν, η g έχει μηδενική παράγωγο στο $\mathbb{R}$, θα είναι και σταθερή.

Δείτε το Σχήμα 1. Το αποτέλεσμα ισχύει γιατί αφού το διάστημα ολοκλήρωσης $[x, x+T]$ έχει μήκος όσο και η περίοδος T, από όποιο x και να ξεκινά αυτό, αφού θα τελειώνει στο $x+T$, ουσιαστικά ολοκληρώνουμε μια πλήρη περίοδο της συνάρτησης, απλώς συνυπολογίζοντας με διαφορετική σειρά διαφορετικά κομμάτια του ίδιου πάντα ολοκληρώματος καθώς μεταβάλλεται το x.

Παρατηρήστε ότι το θεώρημα θα ίσχυε ακόμα και αν η f δεν ήταν συνεχής, και επομένως δεν μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε το Πρώτο Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού. Η απόδειξη όμως είναι αρκετά πιο εύκολη, αν το χρησιμοποιήσουμε.

(β΄) Παρατηρούμε πως

$$h(x+T) = \int_0^{x+T} f(t)\,dt - x\left(\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt\right) - \int_0^T f(t)\,dt = \int_T^{x+T} f(t)\,dt - x\left(\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt\right).$$

Θέτοντας $y = t - T$ στο πρώτο ολοκλήρωμα, λαμβάνουμε τελικά

$$h(x+T) = \int_0^x f(y+T)\,dy - x\left(\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt\right) = \int_0^x f(y)\,dy - x\left(\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt\right) = h(x),$$

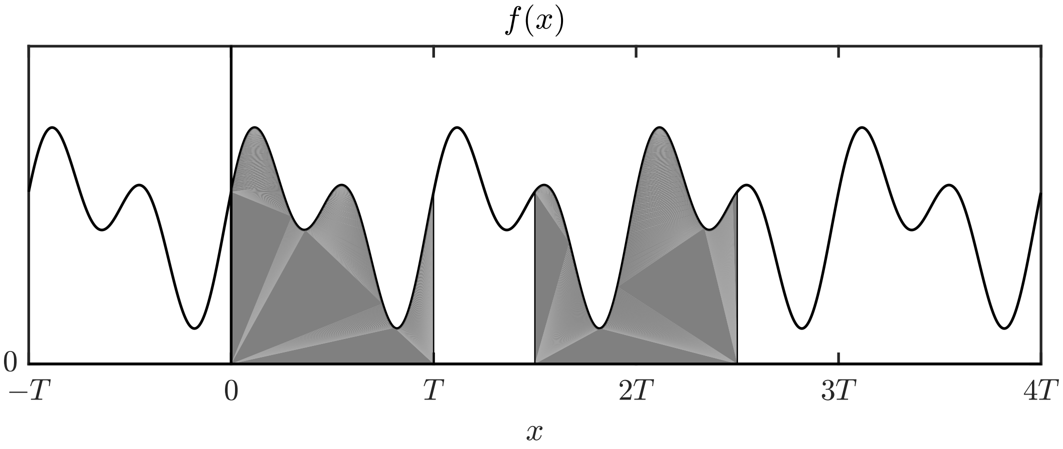
επομένως πράγματι η συνάρτηση $h(x)$ είναι περιοδική. Στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την περιοδικότητα της f.

2. **(Αόριστα Ολοκληρώματα)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

$$\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\,dx, \quad \int \frac{dx}{\cos x}.$$

(Στο δεύτερο ολοκλήρωμα μπορείτε να θέσετε $u = \sin x$.)

Λύση:



Σχήμα 1: Άσκηση 1. Παρατηρήστε ότι τα δύο ολοκληρώματα είναι ίσα.

(α΄) Κάνουμε την αντικατάσταση $u = \cos x + \sin x$, άρα έχουμε $du = (-\sin x + \cos x)dx$, και επομένως

$$\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\, dx = \int \frac{du}{u} = \log|u| + C = \log|\cos x + \sin x| + C.$$

(β΄) Αν θέσουμε $u = \sin x$, σύμφωνα με την υπόδειξη, τότε $du = \cos x dx$, επομένως

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{du}{\cos^2 x} = \int \frac{du}{1-u^2} = \int \frac{du}{(1-u)(1+u)}.$$

Παρατηρούμε, όμως, πως

$$\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} = \frac{1-u+1+u}{(1+u)(1-u)} = \frac{2}{(1-u)(1+u)}.$$

Επομένως,

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{1-u} = \frac{1}{2}\log|1+u| - \frac{1}{2}\log|u-1| = \frac{1}{2}\log\left|\frac{u+1}{u-1}\right|$$
$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}\right| + C.$$

3. **(Καταχρηστικά ολοκληρώματα)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα καταχρηστικά ολοκληρώματα:

$$\int_0^1 (\log x)^2\, dx, \qquad \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^2 x}.$$

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε αρχικά πως:

$$\begin{aligned}
\int (\log x)^2\, dx &= \int (x)'(\log x)^2\, dx = x(\log x)^2 - \int 2x(\log x)\frac{1}{x}\, dx = x(\log x)^2 - 2\int \log x\, dx \\
&= x(\log x)^2 - 2\int (x)' \log x\, dx = x(\log x)^2 - 2x\log x + 2\int x\frac{1}{x}\, dx \\
&= x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x + C.
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (\log x)^2\, dx = \lim_{h\to 0^+}\int_h^1 (\log x)^2\, dx &= \lim_{h\to 0^+}\left[x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x\right]_h^1 \\
&= 2 - \lim_{h\to 0^+} h(\log h)^2 + 2\lim_{h\to 0^+} h\log h.
\end{aligned}$$

Σχετικά με τα όρια, έχουμε

$$\lim_{h\to 0^+} h(\log h) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\log h}{\frac{1}{h}} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{1}{h}}{-\left(\frac{1}{h^2}\right)} = \lim_{h\to 0^+}(-h) = 0,$$

και

$$\lim_{h\to 0^+} h(\log h)^2 = \lim_{h\to 0^+} \frac{(\log h)^2}{\frac{1}{h}} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2(\log h)\frac{1}{h}}{-\left(\frac{1}{h^2}\right)} = -2\lim_{h\to 0^+} h(\log h) = 0,$$

επομένως, τελικά,

$$\int_0^1 (\log x)^2\,dx = 2.$$

(β΄) Παρατηρούμε πως η ολοκληρωτέα συνάρτηση μηδενίζεται στο $x=0$, επομένως το ολοκλήρωμα είναι καταχρηστικό μικτού τύπου, και αποτελείται από δύο καταχρηστικά ολοκληρώματα ως εξής:

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^2 x} = \int_{-\pi/4}^{0} \frac{dx}{\sin^2 x} + \int_{0}^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^2 x}.$$

Σχετικά με το πρώτο ολοκλήρωμα, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{-\pi/4}^{0} \frac{dx}{\sin^2 x} &= \lim_{h\to 0^-} \int_{-\pi/4}^{h} \frac{dx}{\sin^2 x} = \lim_{h\to 0^-} \left[-\cot x\right]_{-\pi/4}^{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \left[\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \cot h\right] = -1 - \lim_{h\to 0^-} \cot h = -(-\infty) = \infty.\end{aligned}$$

Παρόμοια μπορεί να δειχθεί ότι και το δεύτερο ολοκλήρωμα ισούται με ∞ (εναλλακτικά, με αλλαγή μεταβλητής μπορεί να έρθει στη μορφή του πρώτου), επομένως τελικά έχουμε

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^2 x} = \infty.$$

4. **(ΔΕ)**

(α΄) Έστω η διαφορική εξίσωση

$$y'(x) - y(x)\sin x = xe^{-\cos x}$$

που ισχύει παντού στο $\mathbb{R}$. Να βρείτε τη γενική της λύση.

(β΄) Να βρείτε το όριο των λύσεων της άνω ΔΕ καθώς $x \to \infty$.

(γ΄) Έστω, τώρα, η διαφορική εξίσωση

$$-z'(x) - z(x)\sin x = z^2(x)xe^{-\cos x}.$$

Να βρείτε όλες τις λύσεις της που δεν μηδενίζονται πουθενά στο $\mathbb{R}$. *(Υπόδειξη: βρείτε τη ΔΕ που ικανοποιεί η συνάρτηση* $(z(x))^{-1}$*.)*

Λύση:

(α΄) Η ΔΕ είναι γραμμική πρώτης τάξης. Επομένως, κατά τα γνωστά από τη θεωρία, έχουμε:

$$\begin{aligned}y'(x) - y(x)\sin x = xe^{-\cos x} &\Leftrightarrow e^{\cos x}y'(x) - e^{\cos x}y(x)\sin x = x \Leftrightarrow \left(e^{\cos x}y(x)\right)' = \left(\frac{x^2}{2}\right)' \\ &\Leftrightarrow e^{\cos x}y(x) = \frac{x^2}{2} + C \Leftrightarrow y(x) = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)e^{-\cos x}, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

(β΄) Σχετικά με το όριο των λύσεων, παρατηρούμε ότι το $e^{-\cos x} > e^{-1} > 0$, ενώ ο συντελεστής $\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$ τείνει στο άπειρο. Επομένως, τελικά όλες οι λύσεις τείνουν στο άπειρο καθώς $x \to \infty$.

(γ΄) Η δοσμένη ΔΕ είναι μια ΔΕ Bernoulli. Παρατηρήστε πως

$$
\begin{aligned}
-z'(x) - z(x)\sin x = z^2(x) x e^{-\cos x} &\Leftrightarrow -\frac{z'(x)}{z^2(x)} - \frac{1}{z(x)}\sin x = x e^{-\cos x} \\
&\Leftrightarrow y'(x) - y(x)\sin x = x e^{-\cos x} \Leftrightarrow y(x) = \left(\frac{x^2}{2} + C\right) e^{-\cos x}, \quad C \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow z(x) = \frac{e^{\cos x}}{\frac{x^2}{2} + C}, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Στη δεύτερη ισοδυναμία ακολουθήσαμε την υπόδειξη θέτοντας

$$
y(x) = \frac{1}{z(x)} \Leftrightarrow y'(x) = -\frac{z'(x)}{z^2(x)},
$$

κάτι που μπορούμε να κάνουμε αφού μας ενδιαφέρουν οι λύσεις που δεν μηδενίζονται πουθενά. Στην τρίτη ισοδυναμία χρησιμοποιήσαμε το πρώτο σκέλος.

Επομένως, τελικά οι λύσεις της άνω ΔΕ που δεν μηδενίζονται πουθενά είναι αυτές που έχουν τη μορφή

$$
z(x) = \frac{e^{\cos x}}{\frac{x^2}{2} + C},
$$

για κάποιο $C \in \mathbb{R}$. Παρατηρήστε ότι αν το $C \leq 0$, τότε οι λύσεις δεν ορίζονται σε όλο το $\mathbb{R}$, αλλά σε δύο διακριτά του υποσύνολα.

5. **(Σειρές)**

(α΄) Να προσδιορίσετε αν συγκλίνει ή αποκλίνει η σειρά

$$
\sum \frac{2 + n\log n}{n^4 + n^2\log^2 n + \cos n}.
$$

(β΄) Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ για την οποία

$$
a_n = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{n/2}, & n \text{ άρτιος,} \\ \frac{1}{\sqrt{(n+1)/2}}, & n \text{ περιττός.} \end{cases}
$$

Υπολογίστε και γράψτε σε απλή μορφή τους πρώτους 10 όρους αυτής της σειράς. Κατόπιν, να προσδιορίσετε αν η σειρά αποκλίνει ή συγκλίνει.

Λύση:

(α΄) Θα χρησιμοποιήσουμε το Κριτήριο της Σύγκρισης στο Όριο. Έστω $\sum a_n$ η δοσμένη σειρά και έστω η $\sum b_n$ με $b_n = \frac{1}{n^2}$, που γνωρίζουμε πως συγκλίνει. Παρατηρούμε πως

$$
\frac{a_n}{b_n} = \frac{2n^2 + n^3\log n}{n^4 + n^2\log^2 n + \cos n} = \frac{\frac{2}{n^2} + \frac{\log n}{n}}{1 + \frac{\log^2 n}{n^2} + \frac{\cos n}{n^4}} \to \frac{0+0}{1+0+0} = 0,
$$

επομένως θα συγκλίνει και η $\sum a_n$. Σχετικά με τα άνω όρια, έχουμε

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1} = 0,
$$

με χρήση του Κανόνα του L'Hôpital,

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{\log^2 n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(\log n)/n}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2/n}{4n} = 0,
$$

με διπλή χρήση του Κανόνα του L'Hôpital, και τέλος

$$
\frac{|\cos n|}{n^4} \leq \frac{1}{n^4},
$$

που τείνει στο 0, και επομένως θα τείνει στο 0 και το $\frac{\cos n}{n^4}$, από το Κριτήριο της Παρεμβολής.

(β΄) Οι πρώτοι 10 όροι της σειράς είναι οι

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{\sqrt{(1+1)/2}} = 1, & a_2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2/2} = \frac{1}{2}, \\
a_3 &= \frac{1}{\sqrt{(3+1)/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, & a_4 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{4/2} = \frac{1}{4}, \\
a_5 &= \frac{1}{\sqrt{(5+1)/2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, & a_6 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{6/2} = \frac{1}{8}, \\
a_7 &= \frac{1}{\sqrt{(7+1)/2}} = \frac{1}{2}, & a_8 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{8/2} = \frac{1}{16}, \\
a_9 &= \frac{1}{\sqrt{(9+1)/2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, & a_{10} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{10/2} = \frac{1}{32}.
\end{aligned}$$

Σχετικά με τη σύγκλιση της σειράς, παρατηρούμε πως η σειρά είναι άθροισμα δύο σειρών με θετικούς όρους, μιας αποκλίνουσας και μιας συγκλίνουσας. Άρα τελικά θα πρέπει να αποκλίνει. Πιο αναλυτικά,

$$\sum_{n=1}^{2K} a_n = \sum_{k=1}^{K} \left(\frac{1}{2}\right)^k + \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Καθώς το K τείνει στο άπειρο, ο πρώτος όρος συγκλίνει σε ένα πραγματικό αριθμό, αφού είναι γεωμετρική σειρά, ενώ ο δεύτερος τείνει στο άπειρο, αφού είναι σειρά της μορφής $\sum \frac{1}{k^p}$ με $p \leq 1$. Επομένως, το άθροισμα θα τείνει και αυτό στο άπειρο, και τελικά η σειρά αποκλίνει.

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι, ΕΠΙΚ. ΚΑΘ. ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ
ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2017.

ΟΝΟΜΑ ΦΟΙΤΗΤΗ: . . . .

Οδηγίες (Διαβάστε τες!)

1. **Συμπληρώστε το όνομά σας άνω, και παραδώστε το παρόν με τις λύσεις**.
2. **Οι λύσεις πρέπει να γραφούν αποκλειστικά στην παρεχόμενη κόλλα, και όχι σε αυτό το δίφυλλο. Ό,τι γράψετε εδώ δεν θα διορθωθεί.**
3. Διάρκεια εξέτασης: 2 ΩΡΕΣ.
4. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
5. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
6. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε μολύβι ή/και στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός από κόκκινο.
7. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
8. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
9. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
10. Σύμφωνα με τον κανονισμό εξετάσεων, σε περίπτωση που διαπιστωθεί (κατά τη διάρκεια της εξέτασης είτε της διόρθωσης) αντιγραφή είτε απόπειρα αντιγραφής, θα ενημερωθούν τα αρμόδια όργανα του ιδρύματος.

Θέματα

1. **(Αόριστα ολοκληρώματα)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

   (α′) *(1 μονάδα)* $\int \sin^3 x \, dx$.

   (β′) *(1 μονάδα)* $\int \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) \, dx$.

2. **(Άρτιες και Περιττές Συναρτήσεις)** *(1 μονάδα)* Να δείξετε ότι αν το ολοκλήρωμα $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ μια συνεχούς $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι περιττή συνάρτηση, τότε η $f(x)$ είναι άρτια.

3. **(Ορισμένα ολοκληρώματα)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα ορισμένα ολοκληρώματα:

   (α′) *(0.5 μονάδα)* $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{3 - \sin x} \, dx$.

   (β′) *(1 μονάδα)* $\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2} \, dx$.

4. **(Καμπύλη)** Έστω η καμπύλη που περιγράφεται από τις εξισώσεις $x = f_1(t)$ και $y = f_2(t)$, με $0 \leq t \leq 1$. Δίνεται ότι η καμπύλη έχει μήκος A. Οι συναρτήσεις f_1 και f_2 είναι άγνωστες.

   (α′) *(0.5 μονάδα)* Να προσδιορίσετε, συναρτήσει του A, το μήκος της καμπύλης που περιγράφεται από τις εξισώσεις $x = -2f_2(t)$ και $y = -2f_1(t)$ με $0 \leq t \leq 1$. Περιγράψτε, με απλά λόγια, και χωρίς να γράψετε κάποια απόδειξη, ποια είναι η σχέση μεταξύ αυτής της καμπύλης και της δοσμένης.

(β΄) *(0.5 μονάδα)* Επαναλάβετε το προηγούμενο σκέλος για την καμπύλη που περιγράφεται από τις εξισώσεις $x = f_1(2t)$ και $y = f_2(2t)$ με $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$.

5. **(Διαφορική Εξίσωση)**

(α΄) *(1 μονάδα)* Να βρείτε τη γενική λύση της ακόλουθης ΔΕ:

$$xy'(x) + (\log x)y(x) = \log x,$$

όπου $x > 0$.

(β΄) *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε την ειδική λύση που διέρχεται από το σημείο $(1, 2)$. Ποιο είναι το σύνολο των τιμών που λαμβάνει αυτή η λύση;

6. **(Σειρές)** Να προσδιορίσετε αν οι ακόλουθες σειρές συγκλίνουν ή αποκλίνουν:

(α΄) *(1 μονάδα)* $\sum n! \frac{e^{n^2}}{(3n)!}$.

(β΄) *(0.5 μονάδα)* $\sum \log\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

(γ΄) *(1 μονάδα)* $\sum \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. *(Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε το Κριτήριο του Ολοκληρώματος.)*

Τυπολόγιο

$$\cos(y-x)=\cos x\cos y+\sin x\sin y,\quad \sin\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$
$$\sin 2x=2\sin x\cos x,\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$$
$$\sin x+\sin y=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x+\cos y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x-\sin y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x-\cos y=-2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right],\quad \cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$$
$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right],\quad \cos x<\frac{\sin x}{x}<\frac{1}{\cos x},\ \cos\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0:0<|x-c|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$ $\qquad$ $\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0:c<x<c+\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$

$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0:c-\delta<x<c\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$ $\qquad$ $\forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}:x>X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$

$\forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}:x<X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$ $\qquad$ $\forall M\in\mathbb{R}\exists\delta>0:0<|x-c|<\delta\Rightarrow f(x)>M.$

$\forall M\in\mathbb{R}\exists X\in\mathbb{R}:x>X\Rightarrow f(x)>M.$ $\qquad$ $\forall\epsilon>0\exists N\in\mathbb{N}:n>N\Rightarrow|a_n-L|<\epsilon.$

$$|f(x)-f(x_0)|\le C|x-x_0|,\quad |f(y)-f(x)|\le C|y-x|$$
$$(\arcsin y)'=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arccos y)'=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arctan y)'=\frac{1}{1+y^2}$$
$$f(\theta x_0+(1-\theta)x_1)<\theta f(x_0)+(1-\theta)f(x_1)$$
$$L(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^{n}m_i(t_i-t_{i-1}),\quad U(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^{n}M_i(t_i-t_{i-1}),\quad \sum_{i=1}^{n}f(x_i)(t_i-t_{i-1})$$
$$\left\{\begin{array}{c}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}r=\sqrt{x^2+y^2},\\ \cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{array}\right\}$$
$$\frac{1}{2}\int_a^b f^2(\theta)\,d\theta,\quad \pi\int_a^b f^2,\ 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx,\ \int_a^b A(t)\,dt,\ \int_a^b\sqrt{(f'(x))^2+(g'(x))^2}\,dx$$
$$y'+P(x)y=Q(x),\quad y(x)=[S(x)+C]\exp[-R(x)]$$

$$P_{n,a}(x)\quad\triangleq\quad f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
$$y(x)=\left\{y_0+\int_{x_0}^{x}Q(u)\exp\left[\int_{x_0}^{u}P(t)\,dt\right]du\right\}\exp\left[-\int_{x_0}^{x}P(t)\,dt\right]$$
$$E_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x(x-t)^nf^{(n+1)}(t)\,dt,\quad |E_n(x)|\le M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$s_n=\sum_{k=1}^{n}f(k),\quad t_n=\int_1^n f(x)\,dx$$
$$S=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k,\quad s_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k,\quad 0<(-1)^n(S-s_n)<a_{n+1}$$
$$A_{\parallel}=\left[\frac{A\cdot B}{\|B\|^2}\right]B,\quad A_{\perp}=A-A_{\parallel},\quad (x-x_0,y-y_0)(A,B)=0\Leftrightarrow Ax+By=Ax_0+By_0$$
$$\begin{vmatrix}x-x_0&y-y_0&z-z_0\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}x-x_0&y-y_0&z-z_0\\x_1-x_0&y_1-y_0&z_1-z_0\\x_2-x_0&y_2-y_0&z_2-z_0\end{vmatrix}=0,$$
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\Leftrightarrow Ax+By+Cz=Ax_0+By_0+Cz_0$$

$$y^2=4px,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-\epsilon^2)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(\epsilon^2-1)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\left\{\begin{array}{c}u=(x-x_0)\cos\theta+(y-y_0)\sin\theta,\\ v=-(x-x_0)\sin\theta+(y-y_0)\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}$$
$$\left\{\begin{array}{c}x=x_0+u\cos\theta-v\sin\theta,\\ y=y_0+u\sin\theta+v\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0+u\\y_0+v\end{pmatrix},\quad \theta=\frac{1}{2}\operatorname{arccot}\frac{A-C}{B}$$
$$\begin{vmatrix}x_0&y_0&z_0\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=x_0\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}-y_0\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}+z_0\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}x_0&y_0\\x_1&y_1\end{vmatrix}=x_0y_1-x_1y_0.$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 1, 2016-2017
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΕΠΙΚ. ΚΑΘ. ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ

Λύσεις Εξετάσεων Σεπτεμβρίου Ακ. Έτους 2016-2017

1. **(Αόριστα ολοκληρώματα)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

   (α΄) *(1 μονάδα)* $\int \sin^3 x\,dx$.

   (β΄) *(1 μονάδα)* $\int \log\left(1+\frac{1}{x}\right)\,dx$.

   Λύση:

   (α΄) Παρατηρήστε πως
   $$\int \sin^3 x\,dx = \int \sin x(1-\cos^2 x)\,dx.$$
   Θέτουμε $u=\cos x \Rightarrow du = -\sin x dx$, επομένως
   $$\int \sin^3 x\,dx = \int (u^2-1)\,du = \frac{u^3}{3} - u + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C.$$
   Πράγματι, παρατηρήστε πως
   $$\left(\frac{\cos^3 x}{3} - \cos x\right)' = \frac{-3\cos^2 x \sin x}{3} + \sin x = \sin x(1-\cos^2 x) = \sin^3 x.$$

   (β΄) Παρατηρήστε πως
   $$\int \log\left(1+\frac{1}{x}\right)\,dx = \int (x)'\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\,dx = x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \int x\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\,dx$$
   $$= x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) + \int \frac{1}{1+x} = x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) + \log(1+x) + C.$$
   Πράγματι,
   $$\left(x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) + \log(1+x)\right)' = \log\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{1+x} = \log\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

2. **(Άρτιες και Περιττές Συναρτήσεις)** *(1 μονάδα)* Να δείξετε ότι αν το ολοκλήρωμα $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ μια συνεχούς $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι περιττή συνάρτηση, τότε η $f(x)$ είναι άρτια.

   Λύση: Εξ υποθέσεως έχουμε
   $$\int_0^x f(t)\,dt = -\int_0^{-x} f(t)\,dt.$$
   Αφού η $f(x)$ είναι συνεχής, μπορούμε να παραγωγίσουμε, άρα από το Πρώτο Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού έχουμε
   $$\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)' = \left(-\int_0^{-x} f(t)\,dt\right)' \Rightarrow f(x) = -(-f(-x)) \Rightarrow f(x) = f(-x).$$
   Παρατηρήστε ότι η απαίτηση να είναι η $f(x)$ συνεχής είναι απαραίτητη, για να ισχύει η ιδιότητα. Μπορείτε να βρείτε ένα αντιπαράδειγμα, όταν η $f(x)$ δεν είναι συνεχής;

3. **(Ορισμένα ολοκληρώματα)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα ορισμένα ολοκληρώματα:

   (α΄) *(0.5 μονάδα)* $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{3-\sin x}\,dx$.

   (β΄) *(1 μονάδα)* $\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx$.

   Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{3-\sin x}\,dx = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(3-\sin x)'}{3-\sin x}\,dx = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\log(3-\sin x))'\,dx = \log 4 - \log 2 = \log 2.$$

(β΄) Θέτουμε $x = 2\cos u$, επομένως $dx = -2\sin u du$. Επίσης, $x = -2 \Rightarrow u = \pi$ και $x = 2 \Rightarrow u = 0$. Κάνοντας την αντικατάσταση, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx &= \int_{\pi}^{0} \sqrt{4-4\cos^2 u}(-2\sin u)\,du = \int_{\pi}^{0} 2|\sin u|(-2\sin u)\,du \\
&= 4\int_0^{\pi} \sin^2 u\,du = 4\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2u}{2}\,du \\
&= 2\int_0^{\pi} du - 2\int_0^{\pi} \left(\frac{\sin 2u}{2}\right)'\,du \\
&= 2\pi - (\sin 2\pi - \sin 0) = 2\pi.
\end{aligned}$$

Στην τρίτη ισότητα, χρησιμοποιήσαμε το ότι στο διάστημα $[0,\pi]$ η συνάρτηση $\sin u \geq 0$. Εναλλακτικά, παρατηρούμε πως το ολοκλήρωμα εκφράζει το εμβαδόν ημικυκλίου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 2, επομένως θα πρέπει να ισούται με $\pi \times 2^2/2 = 2\pi$.

4. **(Καμπύλη)** Έστω η καμπύλη που περιγράφεται από τις εξισώσεις $x = f_1(t)$ και $y = f_2(t)$, με $0 \leq t \leq 1$. Δίνεται ότι η καμπύλη έχει μήκος A. Οι συναρτήσεις f_1 και f_2 είναι άγνωστες.

(α΄) *(0.5 μονάδα)* Να προσδιορίσετε, συναρτήσει του A, το μήκος της καμπύλης που περιγράφεται από τις εξισώσεις $x = -2f_2(t)$ και $y = -2f_1(t)$ με $0 \leq t \leq 1$. Περιγράψτε, με απλά λόγια, και χωρίς να γράψετε κάποια απόδειξη, ποια είναι η σχέση μεταξύ αυτής της καμπύλης και της δοσμένης.

(β΄) *(0.5 μονάδα)* Επαναλάβετε το προηγούμενο σκέλος για την καμπύλη που περιγράφεται από τις εξισώσεις $x = f_1(2t)$ και $y = f_2(2t)$ με $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$.

Λύση: Το μήκος της δοσμένης καμπύλης δίνεται από την εξίσωση

$$A = \int_0^1 \sqrt{(f_1'(t))^2 + (f_2'(t))^2}\,dt.$$

(α΄) Το μήκος της νέας καμπύλης ισούται με

$$A_1 = \int_0^1 \sqrt{(-2f_2'(t))^2 + (-2f_1'(t))^2}\,dt = 2A.$$

Η νέα καμπύλη είναι μια μεγεθυμένη και περιστραμμένη έκδοση μιας καμπύλης που είναι η συμμετρική (γύρω από την αρχή των αξόνων) της αρχικής καμπύλης.

(β΄) Το μήκος της δεύτερης καμπύλης ισούται με

$$A_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{(2f_1'(2t))^2 + (2f_2'(2t))^2}\,dt = \int_0^1 \sqrt{(f_1'(\theta))^2 + (f_2'(\theta))^2}\,d\theta = A.$$

Η δεύτερη εξίσωση προέκυψε με την αλλαγή μεταβλητής $\theta = 2t$. Η νέα καμπύλη έχει ακριβώς το ίδιο ίχνος με την αρχική, απλώς έχει διαφορετική παραμετροποίηση. Συγκεκριμένα, αν η παράμετρος t περιγράφει χρόνο και η αρχική καμπύλη περιγράφει την τροχιά ενός αντικειμένου σαν συνάρτηση του χρόνου, τότε η δεύτερη καμπύλη περιγράφει μια τροχιά που διέρχεται από τα ίδια σημεία, με τη διαφορά ότι τώρα το σώμα κινείται με διπλάσια ταχύτητα και για το μισό χρόνο.

5. **(Διαφορική Εξίσωση)**

(α΄) *(1 μονάδα)* Να βρείτε τη γενική λύση της ακόλουθης ΔΕ:

$$xy'(x) + (\log x)y(x) = \log x,$$

όπου $x > 0$.

(β΄) *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε την ειδική λύση που διέρχεται από το σημείο $(1,2)$. Ποιο είναι το σύνολο των τιμών που λαμβάνει αυτή η λύση;

Λύση:

(α΄) Γράφουμε την ΔΕ ως

$$y'(x) + \frac{\log x}{x} y(x) = \frac{\log x}{x}.$$

Παρατηρούμε πως

$$\int \frac{\log x}{x}\, dx = \int (\log x)'(\log x)\, dx = \frac{1}{2}(\log x)^2 + C,$$

επομένως γράφουμε

$$e^{\frac{1}{2}(\log x)^2} y'(x) + e^{\frac{1}{2}(\log x)^2} \frac{\log x}{x} y(x) = e^{\frac{1}{2}(\log x)^2} \frac{\log x}{x} \Leftrightarrow \left(e^{\frac{1}{2}(\log x)^2} y(x)\right)' = \left(e^{\frac{1}{2}(\log x)^2}\right)'$$
$$\Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}(\log x)^2} y(x) = e^{\frac{1}{2}(\log x)^2} + C \Leftrightarrow y(x) = 1 + Ce^{-\frac{1}{2}(\log x)^2}.$$

(β΄) Σχετικά με την ειδική λύση, με αντικατάσταση στην άνω γενική λύση βρίσκουμε πως $C = 1$. Επομένως, η ειδική λύση είναι η

$$y(x) = 1 + e^{-\frac{1}{2}(\log x)^2}.$$

Παρατηρούμε πως ο εκθέτης τείνει στο $-\infty$ τόσο για $x \to 0^+$ όσο και για $x \to \infty$. Επίσης, ο εκθέτης δεν υπερβαίνει το 0. Επομένως, το σύνολο των τιμών που λαμβάνει η $y(x)$ είναι το $(1, 2]$.

6. **(Σειρές)** Να προσδιορίσετε αν οι ακόλουθες σειρές συγκλίνουν ή αποκλίνουν:

(α΄) *(1 μονάδα)* $\sum n! \frac{e^{n^2}}{(3n)!}$.

(β΄) *(0.5 μονάδα)* $\sum \log\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

(γ΄) *(1 μονάδα)* $\sum \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. *(Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε το Κριτήριο του Ολοκληρώματος.)*

Λύση:

(α΄) Λόγω της μορφής των όρων της σειράς, θα χρησιμοποιήσουμε το Κριτήριο του Λόγου:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!e^{(n+1)^2}}{(3(n+1))!} \times \frac{(3n)!}{n!e^{n^2}} = \frac{n!(n+1)e^{n^2}e^{2n+1}(3n)!}{(3n)!(3n+1)(3n+2)(3n+3)n!e^{n^2}} = \frac{e^{2n+1}}{3(3n+1)(3n+2)}.$$

Εύκολα προκύπτει, με χρήση του Κανόνα του L'Hôpital, ότι η άνω ακολουθία τείνει στο ∞, επομένως, από το Κριτήριο του Λόγου προκύπτει πως η σειρά αποκλίνει.

(β΄) Παρατηρήστε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\infty,$$

επομένως, σύμφωνα με το αναγκαίο κριτήριο του Cauchy, η σειρά αποκλίνει.

(γ΄) Θα χρησιμοποιήσουμε το Κριτήριο του Ολοκληρώματος. Εξετάζουμε το ακόλουθο καταχρηστικό ολοκλήρωμα:

$$\int_1^\infty \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx.$$

Παρατηρούμε πως

$$\int_1^\infty \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = \int_1^\infty \left[x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \log(1+x)\right]' dx$$
$$= \lim_{h\to\infty} h \log\left(1 + \frac{1}{h}\right) + \lim_{h\to\infty} \log(1+h) - \log 2 - \log 2.$$

Σχετικά με τα άνω όρια, παρατηρήστε οτι το δεύτερο ισούται με ∞ ενώ σχετικά με το πρώτο, ακόμα και αν δεν υπάρχει, η συνάρτηση είναι θετική. Επομένως, το καταχρηστικό ολοκλήρωμα ισούται με ∞, άρα η σειρά αποκλίνει.