ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι
ΕΠΙΚ. ΚΑΘ. ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2019.

ΟΝΟΜΑ ΦΟΙΤΗΤΗ: ....

Οδηγίες (Διαβάστε τες!)

1. **Συμπληρώστε το όνομά σας άνω, και παραδώστε το παρόν με τις λύσεις**.
2. **Οι λύσεις πρέπει να γραφούν αποκλειστικά στην παρεχόμενη κόλλα, και όχι σε αυτό το δίφυλλο. Ό,τι γράψετε εδώ δεν θα διορθωθεί.**
3. Διάρκεια εξέτασης: 2 ΩΡΕΣ.
4. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
5. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
6. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε μολύβι ή/και στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός από κόκκινο.
7. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
8. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
9. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
10. Σύμφωνα με τον κανονισμό εξετάσεων, σε περίπτωση που διαπιστωθεί (κατά τη διάρκεια της εξέτασης είτε της διόρθωσης) αντιγραφή είτε απόπειρα αντιγραφής, θα ενημερωθούν τα αρμόδια όργανα του ιδρύματος.

Θέματα

1. **(Όριο)** *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε το όριο
$$\lim_{x\to 0^+} (\tan x)^{(\tan x)}.$$
2. **(Παράγωγος)** *(1 μονάδα)* Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} x^2 e^{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$
Να υπολογίσετε την παράγωγό της στη θέση $x = 0$.
3. **(Αόριστα Ολοκληρώματα)**
   (α΄) *(0.5 μονάδα)* Να υπολογίσετε την παράγωγο της $\tan x$ και κατόπιν το αόριστο ολοκληρωμα $\int \tan^2 x\, dx$.
   (β΄) *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int x \tan^2 x\, dx$.

4. **(Καταχρηστικά Ολοκληρώματα)** Να υπολογίσετε την τιμή των ακόλουθων καταχρηστικών ολοκληρωμάτων, εφόσον αυτή υπάρχει:
   (α΄) *(1 μονάδα)* $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$.
   (β΄) *(1 μονάδα)* $\int_{-\infty}^\infty \frac{\log|x|}{x}\, dx$.
5. **(Διαφορικές Εξισώσεις)**
   (α΄) *(1 μονάδα)* Να βρείτε τη γενική λύση της ΔΕ
   $$z'(x) - z(x) = xe^x.$$
   (β΄) *(1 μονάδα)* Να βρείτε τη γενική λύση της ΔΕ δεύτερης τάξης
   $$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = xe^x,$$
   χρησιμοποιώντας το προηγούμενο σκέλος και κάνοντας την αντικατάσταση $z(x) = y'(x) - y(x)$.
6. **(Σειρές)** Να προσδιορίσετε αν αποκλίνουν ή συγκλίνουν οι ακόλουθες σειρές:
   (α΄) *(0.5 μονάδα)* $\sum \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.
   (β΄) *(1 μονάδα)* $\sum \frac{\arccos\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2}$.
   (γ΄) *(1 μονάδα)* $\sum a_n$ όπου
   $$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2}, & n \text{ περιττό}, \\ \frac{2}{n}, & n \text{ άρτιο}. \end{cases}$$

Τυπολόγιο

$$\cos(y-x)=\cos x\cos y+\sin x\sin y,\quad \sin\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$
$$\sin 2x=2\sin x\cos x,\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$$
$$\sin x+\sin y=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x+\cos y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x-\sin y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x-\cos y=-2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right],\quad \cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$$
$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right],\quad \cos x<\frac{\sin x}{x}<\frac{1}{\cos x},\ \cos\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0:0<|x-c|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.\qquad \forall\epsilon>0\ \exists\delta>0:c<x<c+\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$$
$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0:c-\delta<x<c\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.\qquad \forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}:x>X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$$
$$\forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}:x<X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.\qquad \forall M\in\mathbb{R}\exists\delta>0:0<|x-c|<\delta\Rightarrow f(x)>M.$$
$$\forall M\in\mathbb{R}\exists X\in\mathbb{R}:x>X\Rightarrow f(x)>M.\qquad \forall\epsilon>0\exists N\in\mathbb{N}:n>N\Rightarrow|a_n-L|<\epsilon.$$

$$|f(x)-f(x_0)|\le C|x-x_0|,\quad |f(y)-f(x)|\le C|y-x|$$
$$(\arcsin y)'=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arccos y)'=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arctan y)'=\frac{1}{1+y^2}$$
$$f(\theta x_0+(1-\theta)x_1)<\theta f(x_0)+(1-\theta)f(x_1)$$
$$L(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^{n}m_i(t_i-t_{i-1}),\quad U(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^{n}M_i(t_i-t_{i-1}),\quad \sum_{i=1}^{n}f(x_i)(t_i-t_{i-1})$$
$$\left\{\begin{array}{c}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}r=\sqrt{x^2+y^2},\\ \cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{array}\right\}$$
$$\frac{1}{2}\int_a^b f^2(\theta)\,d\theta,\quad \pi\int_a^b f^2,\quad 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx,\quad \int_a^b A(t)\,dt,\quad \int_a^b\sqrt{(f'(x))^2+(g'(x))^2}\,dx$$
$$y'+P(x)y=Q(x),\quad y(x)=[S(x)+C]\exp[-R(x)]$$

$$P_{n,a}(x)\quad\triangleq\quad f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
$$y(x)=\left\{y_0+\int_{x_0}^{x}Q(u)\exp\left[\int_{x_0}^{u}P(t)\,dt\right]du\right\}\exp\left[-\int_{x_0}^{x}P(t)\,dt\right]$$
$$E_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x(x-t)^nf^{(n+1)}(t)\,dt,\quad |E_n(x)|\le M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$s_n=\sum_{k=1}^{n}f(k),\quad t_n=\int_1^n f(x)\,dx$$
$$S=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k,\quad s_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k,\quad 0<(-1)^n(S-s_n)<a_{n+1}$$
$$A_{\parallel}=\left[\frac{A\cdot B}{\|B\|^2}\right]B,\quad A_{\perp}=A-A_{\parallel},\quad (x-x_0,y-y_0)(A,B)=0\Leftrightarrow Ax+By=Ax_0+By_0$$
$$\begin{vmatrix}x-x_0&y-y_0&z-z_0\\ x_1&y_1&z_1\\ x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}x-x_0&y-y_0&z-z_0\\ x_1-x_0&y_1-y_0&z_1-z_0\\ x_2-x_0&y_2-y_0&z_2-z_0\end{vmatrix}=0,$$
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\Leftrightarrow Ax+By+Cz=Ax_0+By_0+Cz_0$$

$$y^2=4px,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-\epsilon^2)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(\epsilon^2-1)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\left\{\begin{array}{c}u=(x-x_0)\cos\theta+(y-y_0)\sin\theta,\\ v=-(x-x_0)\sin\theta+(y-y_0)\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\ -\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}$$
$$\left\{\begin{array}{c}x=x_0+u\cos\theta-v\sin\theta,\\ y=y_0+u\sin\theta+v\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\ \sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0+u\\ y_0+v\end{pmatrix},\quad \theta=\frac{1}{2}\mathrm{arccot}\frac{A-C}{B}$$
$$\begin{vmatrix}x_0&y_0&z_0\\ x_1&y_1&z_1\\ x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=x_0\begin{vmatrix}y_1&z_1\\ y_2&z_2\end{vmatrix}-y_0\begin{vmatrix}x_1&z_1\\ x_2&z_2\end{vmatrix}+z_0\begin{vmatrix}x_1&y_1\\ x_2&y_2\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}x_0&y_0\\ x_1&y_1\end{vmatrix}=x_0y_1-x_1y_0.$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 1, 2017-2018
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΕΠΙΚ. ΚΑΘ. ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ

Λύσεις Εξετάσεων Φεβρουαρίου Ακ. Έτους 2018-2019

1. **(Όριο)** *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε το όριο
$$\lim_{x\to 0^+}(\tan x)^{(\tan x)}.$$

Λύση: Παρατηρούμε πως
$$\lim_{x\to 0^+}(\tan x)^{(\tan x)} = \lim_{x\to 0^+}\exp\left[(\log\tan x)(\tan x)\right] = \exp\lim_{x\to 0^+}\left[(\log\tan x)(\tan x)\right].$$

Όμως,
$$\lim_{x\to 0^+}(\log\tan x)(\tan x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\log\tan x}{\frac{1}{\tan x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\tan x}\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{1}{\tan^2 x}\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to 0^+}(-\tan x) = 0.$$

Η δεύτερη ισότητα προέκυψε από τον Κανόνα του L'Hôpital. Επομένως, τελικά,
$$\lim_{x\to 0^+}(\tan x)^{(\tan x)} = e^0 = 1.$$

2. **(Παράγωγος)** *(1 μονάδα)* Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} x^2 e^{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}, & x \neq 0,\\ 0, & x = 0.\end{cases}$$

Να υπολογίσετε την παράγωγό της στη θέση $x = 0$.

Λύση: Έχουμε
$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 e^{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}}{x} = \lim_{x\to 0} x e^{\cos\left(\frac{1}{x}\right)} = 0.$$

Το όριο προκύπτει επειδή η συνάρτηση στην οποία καταλήγουμε είναι το γινόμενο μιας φραγμένης συνάρτησης (της $e^{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}$), με μια που τείνει στο 0 (της x).

3. **(Αόριστα Ολοκληρώματα)**

(α΄) *(0.5 μονάδα)* Να υπολογίσετε την παράγωγο της $\tan x$ και κατόπιν το αόριστο ολοκληρωμα $\int \tan^2 x\, dx$.

(β΄) *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int x\tan^2 x\, dx$.

Λύση:

(α΄) Καταρχάς έχουμε
$$(\tan x)' = \frac{\cos x\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Σχετικά με το ολοκλήρωμα, παρατηρούμε πως
$$\int \tan^2 x\, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\, dx = \int\left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x}\right) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} - \int dx = \tan x - x + C.$$

Πράγματι,
$$(\tan x - x)' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x.$$

(β΄) Παρατηρούμε πως

$$\int x\tan^2 x\,dx = \int x\left(\frac{\sin^2 x+\cos^2 x-\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)dx = \int \frac{x dx}{\cos^2 x} - \int x\,dx = \int x(\tan x)'\,dx - \frac{x^2}{2}+C$$
$$= x\tan x - \int \tan x\,dx - \frac{x^2}{2}+C = x\tan x + \int (\log|\cos x|)'\,dx - \frac{x^2}{2}+C = x\tan x+\log|\cos x| - \frac{x^2}{2}+C.$$

Πράγματι,

$$\left(x\tan x+\log|\cos x|-\frac{x^2}{2}\right)' = \tan x + \frac{x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos x} - x = x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)$$
$$= x\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right) = x\tan^2 x.$$

4. **(Καταχρηστικά Ολοκληρώματα)** Να υπολογίσετε την τιμή των ακόλουθων καταχρηστικών ολοκληρωμάτων, εφόσον αυτή υπάρχει:

(α΄) *(1 μονάδα)* $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$.

(β΄) *(1 μονάδα)* $\int_{-\infty}^\infty \frac{\log|x|}{x}\,dx$.

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε ότι η ολοκληρωτέα απειρίζεται στο αριστερό άκρο ολοκληρωσης, ενώ το δεξί άκρο ολοκλήρωσης είναι το ∞. Επομένως,

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$
$$= \lim_{h\to 0^+}\int_h^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx + \lim_{h\to\infty}\int_1^h \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{h\to 0^+}\left[2\sqrt{x}\right]_h^1 + \lim_{h\to\infty}\left[2\sqrt{x}\right]_1^h = 2+\infty=\infty.$$

(β΄) Παρατηρούμε πως η ολοκληρωτεά συνάρτηση απειρίζεται στο 0, επομένως πρέπει να σπάσουμε το καταχρηστικό ολοκλήρωμα στα 4:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\log|x|}{x}\,dx = \int_{-\infty}^{-1} \frac{\log|x|}{x}\,dx + \int_{-1}^0 \frac{\log|x|}{x}\,dx + \int_0^1 \frac{\log|x|}{x}\,dx + \int_1^\infty \frac{\log|x|}{x}\,dx.$$

Για κάθε ένα από τα ολοκλήρωματα έχουμε:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{-1} \frac{\log|x|}{x}\,dx &= \lim_{h\to-\infty}\int_h^{-1} \frac{\log|x|}{x}\,dx = \lim_{h\to-\infty}\left[\frac{1}{2}(\log|x|)^2\right]_h^{-1} = -\infty,\\
\int_{-1}^{0} \frac{\log|x|}{x}\,dx &= \lim_{h\to 0^-}\int_{-1}^{h} \frac{\log|x|}{x}\,dx = \lim_{h\to 0^-}\left[\frac{1}{2}(\log|x|)^2\right]_{-1}^{h} = \infty,\\
\int_{0}^{1} \frac{\log|x|}{x}\,dx &= \lim_{h\to 0^+}\int_{h}^{1} \frac{\log|x|}{x}\,dx = \lim_{h\to 0^+}\left[\frac{1}{2}(\log|x|)^2\right]_{h}^{1} = -\infty,\\
\int_{1}^{\infty} \frac{\log|x|}{x}\,dx &= \lim_{h\to\infty}\int_{1}^{\infty} \frac{\log|x|}{x}\,dx = \lim_{h\to\infty}\left[\frac{1}{2}(\log|x|)^2\right]_{1}^{h} = \infty,
\end{aligned}$$

και τελικά, επειδή προσθέτουμε ∞ με $-\infty$, το καταχρηστικό ολοκλήρωμα δεν υπάρχει.

5. **(Διαφορικές Εξισώσεις)**

(α΄) *(1 μονάδα)* Να βρείτε τη γενική λύση της ΔΕ

$$z'(x)-z(x)=xe^x.$$

(β΄) *(1 μονάδα)* Να βρείτε τη γενική λύση της ΔΕ δεύτερης τάξης

$$y''(x)-2y'(x)+y(x)=xe^x,$$

χρησιμοποιώντας το προηγούμενο σκέλος και κάνοντας την αντικατάσταση $z(x) = y'(x) - y(x)$.

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως η ΔΕ είναι γραμμική πρώτης τάξης, επομένως κατά τα γνωστά από τη θεωρία

$$z'(x) - z(x) = xe^x \Leftrightarrow z'(x)e^{-x} - e^{-x}z(x) = x \Leftrightarrow \left(z(x)e^{-x}\right)' = \left(\frac{x^2}{2}\right)' \Leftrightarrow z(x) = \frac{x^2}{2}e^x + C_1e^x.$$

Πράγματι, για τη λύση που βρήκαμε,

$$z'(x) = xe^x + \frac{x^2}{2}e^x + C_1e^x,$$

επομένως

$$z'(x) - z(x) = xe^x + \frac{x^2}{2}e^x + C_1e^x - \frac{x^2}{2}e^x - C_1e^x = xe^x.$$

(β΄) Παρατηρήστε πως

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = xe^x \Leftrightarrow (y'(x) - y(x))' - (y'(x) - y(x)) = xe^x \Leftrightarrow z'(x) - z(x) = xe^x$$
$$\Leftrightarrow z(x) = e^x\frac{x^2}{2} + C_1e^x.$$

Η τελευταία συνεπαγωγή προέκυψε από το πρώτο σκέλος. Επομένως,

$$y'(x) - y(x) = e^x\frac{x^2}{2} + C_1e^x \Leftrightarrow y'(x)e^{-x} - y(x)e^{-x} = \frac{x^2}{2} + C_1 \Leftrightarrow \left(y(x)e^{-x}\right)' = (\frac{x^3}{6} + C_1x)'$$
$$\Leftrightarrow y(x)e^{-x} = \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2 \Leftrightarrow y(x) = \frac{x^3}{6}e^x + C_1xe^x + C_2e^x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Πράγματι, για τη λύση που βρήκαμε,

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{x^2}{2}e^x + \frac{x^3}{6}e^x + C_1e^x + C_1xe^x + C_2e^x, \\ y''(x) &= xe^x + \frac{x^2}{2}e^x + \frac{x^2}{2}e^x + \frac{x^3}{6}e^x + C_1e^x + C_1e^x + C_1xe^x + C_2e^x, \end{aligned}$$

άρα

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = xe^x + \frac{x^2}{2}e^x + \frac{x^2}{2}e^x + \frac{x^3}{6}e^x + C_1e^x + C_1e^x + C_1xe^x + C_2e^x - x^2e^x$$
$$- \frac{x^3}{3}e^x - 2C_1e^x - 2C_1xe^x - 2C_2e^x + \frac{x^3}{6}e^x + C_1xe^x + C_2e^x = xe^x.$$

6. Να προσδιορίσετε αν αποκλίνουν ή συγκλίνουν οι ακόλουθες σειρές:

(α΄) *(0.5 μονάδα)* $\sum \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

(β΄) *(1 μονάδα)* $\sum \frac{\arccos\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2}$.

(γ΄) *(1 μονάδα)* $\sum a_n$ όπου

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2}, & n \text{ περιττό}, \\ \frac{2}{n}, & n \text{ άρτιο}. \end{cases}$$

Λύση:

(α΄) Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του ολοκληρώματος, έχουμε

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = \int_0^\infty \left(-2e^{-\sqrt{x}}\right)'\, dx = \left[-2e^{-\sqrt{x}}\right]_0^\infty = 0 + 2,$$

που είναι πεπερασμένο, επομένως, η σειρά συγκλίνει.

(β´) Παρατηρούμε πως $0 \leq \arccos x \leq \pi$, επομένως οι όροι της σειράς είναι όλοι θετικοί, και επιπλέον

$$\frac{\arccos\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2} \leq \frac{\pi}{n^2}$$

Όμως, η σειρά $\sum \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, επομένως θα συγκλίνει και η δοσμένη.

(γ´) Παρατηρήστε οτι οι όροι που αντιστοιχούν σε άρτια n από μόνοι τους δημιουργούν την αρμονική σειρά, η οποία αποκλίνει. Επομένως η αρχική σειρά, που περιλαμβάνει επιπλέον όρους, και αυτή θα αποκλίνει.

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι, ΕΠΙΚ. ΚΑΘ. ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ
ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2019.

ΟΝΟΜΑ ΦΟΙΤΗΤΗ: ....

Οδηγίες (Διαβάστε τες!)

1. **Συμπληρώστε το όνομά σας άνω, και παραδώστε το παρόν με τις λύσεις**.
2. **Οι λύσεις πρέπει να γραφούν αποκλειστικά στην παρεχόμενη κόλλα, και όχι σε αυτό το δίφυλλο. Ό,τι γράψετε εδώ δεν θα διορθωθεί.**
3. Διάρκεια εξέτασης: 2 ΩΡΕΣ.
4. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
5. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
6. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε μολύβι ή/και στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός από κόκκινο.
7. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
8. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
9. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
10. Σύμφωνα με τον κανονισμό εξετάσεων, σε περίπτωση που διαπιστωθεί (κατά τη διάρκεια της εξέτασης είτε της διόρθωσης) αντιγραφή είτε απόπειρα αντιγραφής, θα ενημερωθούν τα αρμόδια όργανα του ιδρύματος.

Θέματα

1. **(Όρια)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια:

   (α΄) *(0.5 μονάδα)* $\lim_{n\to\infty} \frac{e^n + \cos n + \log n}{e^n}$.

   (β΄) *(1 μονάδα)* $\lim_{x\to 0^+} (\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$.

   (γ΄) *(1 μονάδα)* $\lim_{h\to\infty} \int_1^h \frac{1 + |\cos t|}{t}\, dt$.

2. **(Ολοκληρώματα)** Να υπολογίσετε τις τιμές των ακόλουθων ολοκληρωμάτων:

   (α΄) *(0.5 μονάδα)* $\int_{-e}^{e} \frac{x}{1+x^2}\, dx$.

   (β΄) *(1 μονάδα)* $\int_{-1}^{1} \log\left(\frac{x+10}{x+100}\right) dx$.

   (γ΄) *(1 μονάδα)* $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$.

3. **(Διαφορικές εξισώσεις)**

   (α΄) *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης
   $$\tan y(x) = y'(x).$$

   (β΄) *(0.5 μονάδα)* Να βρείτε την ειδική λύση που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Ποιο είναι το μεγαλύτερο πεδίο ορισμού που μπορεί να έχει;

   (γ΄) *(1 μονάδα)* Να βρείτε την ειδική λύση που διέρχεται από το σημείο $(0, \frac{\pi}{6})$. Ποιο είναι το μεγαλύτερο πεδίο ορισμού που μπορεί να έχει;

4. **(Σειρές)**

   (α΄) *(0.5 μονάδα)* Να προσδιορίσετε αν συγκλίνει ή όχι η σειρά
   $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log(\log n))^{2n}}.$$

   (β΄) *(0.5 μονάδα)* Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 \log x$, με $x > 0$. Να προσδιορίσετε το όριο $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ και να εντοπίσετε όλες τις ρίζες της.

   (γ΄) *(1 μονάδα)* Να αποδείξετε ότι αν συγκλίνει η σειρά $\sum a_n$, τότε θα συγκλίνει και η σειρά $\sum a_n^3 \log(a_n)$.

   (δ΄) *(0.5 μονάδα)* Να αποδείξετε ότι μπορεί η σειρά $\sum a_n^3 \log(a_n)$ να συγκλίνει χωρίς όμως να συγκλίνει η σειρά $\sum a_n$, δίνοντας ένα αντιπαράδειγμα.

Τυπολόγιο

$$\cos(y-x)=\cos x\cos y+\sin x\sin y,\quad \sin\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$
$$\sin 2x=2\sin x\cos x,\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$$
$$\sin x+\sin y=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x+\cos y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x-\sin y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x-\cos y=-2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right],\quad \cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$$
$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right],\quad \cos x<\frac{\sin x}{x}<\frac{1}{\cos x},\ \cos\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0: 0<|x-c|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$ $\quad\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0: c<x<c+\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$

$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0: c-\delta<x<c\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$ $\quad\forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}: x>X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$

$\forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}: x<X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$ $\quad\forall M\in\mathbb{R}\exists\delta>0: 0<|x-c|<\delta\Rightarrow f(x)>M.$

$\forall M\in\mathbb{R}\exists X\in\mathbb{R}: x>X\Rightarrow f(x)>M.$ $\quad\forall\epsilon>0\exists N\in\mathbb{N}: n>N\Rightarrow|a_n-L|<\epsilon.$

$$|f(x)-f(x_0)|\le C|x-x_0|,\quad |f(y)-f(x)|\le C|y-x|$$
$$(\arcsin y)'=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arccos y)'=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arctan y)'=\frac{1}{1+y^2}$$
$$f(\theta x_0+(1-\theta)x_1)<\theta f(x_0)+(1-\theta)f(x_1)$$
$$L(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^{n}m_i(t_i-t_{i-1}),\quad U(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^{n}M_i(t_i-t_{i-1}),\quad \sum_{i=1}^{n}f(x_i)(t_i-t_{i-1})$$
$$\left\{\begin{array}{c} x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} r=\sqrt{x^2+y^2},\\ \cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{array}\right\}$$
$$\frac{1}{2}\int_a^b f^2(\theta)\,d\theta,\quad \pi\int_a^b f^2,\ 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx,\quad \int_a^b A(t)\,dt,\quad \int_a^b\sqrt{(f'(x))^2+(g'(x))^2}\,dx$$
$$y'+P(x)y=Q(x),\quad y(x)=[S(x)+C]\exp[-R(x)]$$

$$P_{n,a}(x)\ \triangleq\ f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
$$y(x)=\left\{y_0+\int_{x_0}^{x}Q(u)\exp\left[\int_{x_0}^{u}P(t)\,dt\right]du\right\}\exp\left[-\int_{x_0}^{x}P(t)\,dt\right]$$
$$E_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x(x-t)^nf^{(n+1)}(t)\,dt,\quad |E_n(x)|\le M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$s_n=\sum_{k=1}^{n}f(k),\quad t_n=\int_1^n f(x)\,dx$$
$$S=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k,\quad s_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k,\quad 0<(-1)^n(S-s_n)<a_{n+1}$$
$$A_{\parallel}=\left[\frac{A\cdot B}{\|B\|^2}\right]B,\quad A_{\perp}=A-A_{\parallel},\quad (x-x_0,y-y_0)(A,B)=0\Leftrightarrow Ax+By=Ax_0+By_0$$
$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0\\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0\end{vmatrix}=0,$$
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\Leftrightarrow Ax+By+Cz=Ax_0+By_0+Cz_0$$

$$y^2=4px,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-\epsilon^2)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(\epsilon^2-1)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\left\{\begin{array}{c} u=(x-x_0)\cos\theta+(y-y_0)\sin\theta,\\ v=-(x-x_0)\sin\theta+(y-y_0)\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}$$
$$\left\{\begin{array}{c} x=x_0+u\cos\theta-v\sin\theta,\\ y=y_0+u\sin\theta+v\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0+u\\ y_0+v\end{pmatrix},\quad \theta=\frac{1}{2}\mathrm{arccot}\frac{A-C}{B}$$
$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=x_0\begin{vmatrix} y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}-y_0\begin{vmatrix} x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}+z_0\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} x_0 & y_0\\ x_1 & y_1\end{vmatrix}=x_0y_1-x_1y_0.$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 1, 2018-2019
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΕΠΙΚ. ΚΑΘ. ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ

Λύσεις Εξετάσεων Σεπτεμβρίου Ακ. Έτους 2018-2019

1. **(Όρια)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια:

   (α΄) *(0.5 μονάδα)* $\lim_{n\to\infty} \frac{e^n + \cos n + \log n}{e^n}$.

   (β΄) *(1 μονάδα)* $\lim_{x\to 0^+} (\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$.

   (γ΄) *(1 μονάδα)* $\lim_{h\to\infty} \int_1^h \frac{1+|\cos t|}{t}\, dt$.

   Λύση:

   (α΄) Παρατηρούμε πως έχουμε απροσδιοριστία της μορφής ∞/∞. Μπορούμε να γράψουμε

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n + \cos n + \log n}{e^n} = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{e^n} + \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{e^n}.$$

   Σχετικά με το πρώτο όριο, με χρήση του Κριτηρίου της Παρεμβολής και τη διπλή ανισότητα

   $$-\frac{1}{e^n} \leq \frac{\cos n}{e^n} \leq \frac{1}{e^n}$$

   προκύπτει πως ισούται με 0.
   Σχετικά με το δεύτερο όριο, με χρήση του Κανόνα του L'Hôpital, εύκολα προκύπτει πως

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{ne^n} = 0.$$

   Επομένως, τελικά

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n + \cos n + \log n}{e^n} = 1 + 0 + 0 = 1.$$

   (β΄) Παρατηρούμε πως έχουμε απροσδιοριστία της μορφής 0^0, η οποία μπορεί να αντιμετωπιστεί, παρατηρώντας, καταρχάς, πως

   $$\lim_{x\to 0^+} (\sqrt{x})^{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \exp(\sqrt{x}\log\sqrt{x}) = \exp\left(\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\log\sqrt{x}\right),$$

   υποθέτοντας, φυσικά, ότι τα άνω όρια υπάρχουν. Ακολούθως, χρησιμοποιώντας τον Κανόνα του L'Hôpital,

   $$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\log\sqrt{x} = \lim_{h\to\infty} \frac{1}{h}\log\frac{1}{h} = \lim_{h\to\infty} -\frac{\log h}{h} = \lim_{h\to\infty} -\frac{1}{h} = 0,$$

   επομένως, τελικά,

   $$\lim_{x\to 0^+} (\sqrt{x})^{\sqrt{x}} = e^0 = 1.$$

   (γ΄) Το δοσμένο ολοκλήρωμα δεν μπορεί να υπολογιστεί σε κλειστή μορφή. Μπορούμε, όμως, να παρατηρήσουμε πως

   $$\lim_{h\to\infty} \int_1^h \frac{1+|\cos t|}{t}\, dt \geq \lim_{h\to\infty} \int_1^h \frac{1}{t}\, dt = \lim_{h\to\infty} \log h = \infty,$$

   επομένως και το δοσμένο όριο τείνει στο άπειρο.

2. **(Ολοκληρώματα)** Να υπολογίσετε τις τιμές των ακόλουθων ολοκληρωμάτων:

   (α΄) *(0.5 μονάδα)* $\int_{-e}^{e} \frac{x}{1+x^2}\, dx$.

   (β΄) *(1 μονάδα)* $\int_{-1}^{1} \log\left(\frac{x+10}{x+100}\right) dx$.

(γ΄) *(1 μονάδα)* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx.$

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως

$$\left(\frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right)\right)' = \frac{x}{1+x^2},$$

επομένως

$$\int_{-e}^{e} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int_{-e}^{e} \left(\frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right)\right)' dx = \left(\frac{1}{2}\log\left(1+e^2\right)\right) - \left(\frac{1}{2}\log\left(1+(-e)^2\right)\right) = 0.$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι περιττή, επομένως το ολοκλήρωμα πρέπει να είναι μηδενικό, αφού, για οποιαδήποτε $f(x)$ περιττή, και για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

(β΄) Καταρχάς παρατηρούμε πως

$$\int_{-1}^{1} \log\left(\frac{x+10}{x+100}\right) dx = \int_{-1}^{1} \log(x+10)\,dx - \int_{-1}^{1} \log(x+100)\,dx,$$

επομένως μπορούμε να υπολογίσουμε τα δύο ολοκληρώματα χωριστά.

Σχετικά με το πρώτο ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \log(x+10)\,dx &= \int_{-1}^{1} (x)'\log(x+10)\,dx = [x\log(x+10)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{x}{x+10}\,dx \\
&= \log 11 + \log 9 - \int_{-1}^{1} \frac{x+10-10}{x+10}\,dx = \log 11 + \log 9 - 2 + 10\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x+10} \\
&= \log 11 + \log 9 - 2 + 10\int_{-1}^{1} [\log(x+10)]'\,dx \\
&= \log 11 + \log 9 - 2 + 10\log 11 - 10\log 9 = 11\log 11 - 9\log 9 - 2.
\end{aligned}$$

Ανάλογα, το δεύτερο ολοκλήρωμα προκύπτει

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \log(x+100)\,dx &= \int_{-1}^{1} (x)'\log(x+100)\,dx = [x\log(x+100)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{x}{x+100}\,dx \\
&= \log 101 + \log 99 - \int_{-1}^{1} \frac{x+100-100}{x+100}\,dx \\
&= \log 101 + \log 99 - 2 + 100\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x+100} \\
&= \log 101 + \log 99 - 2 + 100\int_{-1}^{1} [\log(x+100)]'\,dx \\
&= \log 101 + \log 99 - 2 + 100\log 101 - 100\log 99 = 101\log 101 - 99\log 99 - 2.
\end{aligned}$$

Τελικά,

$$\int_{-1}^{1} \log\left(\frac{x+10}{x+100}\right) dx = 11\log 11 - 9\log 9 - 101\log 101 + 99\log 99.$$

(γ΄) Παρατηρούμε πως το ολοκλήρωμα είναι καταχρηστικό. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παρατήρηση ότι η ολοκληρωτέα έχει παράγουσα την αντίστροφη εφαπτόμενη. Εναλλακτικά, και χωρίς να γράψουμε αναλυτικά τον ορισμό του καταχρηστικού ολοκληρώματος, θέτουμε $x = \tan\theta$, επομένως $x = 0 \Rightarrow \theta = 0$ και $x = \infty \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$, επομένως

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin^2\theta + \cos^2\theta} = \frac{\pi}{2}.$$

3. **(Διαφορικές εξισώσεις)** *(2.5 μονάδες)*

   (α΄) *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

   $$\tan y(x) = y'(x).$$

   (β΄) *(0.5 μονάδα)* Να βρείτε την ειδική λύση που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Ποιο είναι το μεγαλύτερο πεδίο ορισμού που μπορεί να έχει;

   (γ΄) *(1 μονάδα)* Να βρείτε την ειδική λύση που διέρχεται από το σημείο $(0, \frac{\pi}{6})$. Ποιο είναι το μεγαλύτερο πεδίο ορισμού που μπορεί να έχει;

   Λύση:

   (α΄) Η διαφορική εξίσωση είναι χωριζομένων μεταβλητών, και, κατά τα γνωστά από τη θεωρία, υποθέτοντας πως $y(x) \neq 0$,

   $$\tan y(x) = y'(x) \Leftrightarrow \frac{dy}{\tan y} = dx \Leftrightarrow \int \frac{\cos y\, dy}{\sin y} = \int dx$$
   $$\Leftrightarrow \log|\sin y(x)| = x + C \Leftrightarrow \sin y(x) = \pm e^{x+C} \Leftrightarrow \sin y(x) = Ke^x,$$

   όπου $K = \pm e^C$, επομένως $K \in \mathbb{R}^*$. Υπάρχει, όμως, και η λύση $y(x) = 0$, επομένως, η γενική λύση είναι η ακόλουθη:

   $$y(x) = \arcsin(Ke^x), \quad K \in \mathbb{R}.$$

   (β΄) Προφανώς σε αυτή την περίπτωση $K = 0$, επομένως $y(x) = 0$, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

   (γ΄) Σε αυτή την περίπτωση, πρέπει

   $$\frac{\pi}{6} = \arcsin(Ke^0) \Leftrightarrow K = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

   επομένως η ειδική λύση είναι η

   $$y(x) = \arcsin\frac{e^x}{2}.$$

   Σχετικά με το πεδίο ορισμού της, θα πρέπει

   $$\frac{e^x}{2} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq \log 2,$$

   επομένως το πεδίο ορισμού είναι το $(-\infty, \log 2)$.

4. **(Σειρές)**

   (α΄) *(0.5 μονάδα)* Να προσδιορίσετε αν συγκλίνει ή όχι η σειρά

   $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log(\log n))^{2n}}.$$

   (β΄) *(0.5 μονάδα)* Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 \log x$, με $x > 0$. Να προσδιορίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ και να εντοπίσετε όλες τις ρίζες της.

   (γ΄) *(1 μονάδα)* Να αποδείξετε ότι αν συγκλίνει η σειρά $\sum a_n$, τότε θα συγκλίνει και η σειρά $\sum a_n^3 \log(a_n)$.

   (δ΄) *(0.5 μονάδα)* Να αποδείξετε ότι μπορεί η σειρά $\sum a_n^3 \log(a_n)$ να συγκλίνει χωρίς όμως να συγκλίνει η σειρά $\sum a_n$, δίνοντας ένα αντιπαράδειγμα.

   Λύση:

   (α΄) Το απλούστερο είναι να χρησιμοποιήσουμε το Κριτήριο της Ρίζας:

   $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{(\log(\log n))^{2n}}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\log(\log n))^2} = 0,$$

   επομένως η σειρά συγκλίνει.

(β΄) Σχετικά με το όριο, έχουμε

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 \log x = \lim_{h\to\infty} \frac{1}{h^2} \log \frac{1}{h} = \lim_{h\to\infty} \frac{-\log h}{h^2} = \lim_{h\to\infty} \frac{\frac{1}{h}}{2h} = 0.$$

Σχετικά με τις ρίζες, παρατηρούμε ότι για κάθε ρίζα x_0,

$$x_0^2 \log x_0 = 0 \Rightarrow \log x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 1,$$

επομένως υπάρχει μόνο μια ρίζα, το $x_0 = 1$.

(γ΄) Θα χρησιμοποιήσουμε το Κριτήριο του Λόγου:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^3 \log a_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} a_n^2 \log a_n = 0.$$

Το όριο προκύπτει χρησιμοποιώντας το δεύτερο σκέλος και παρατηρώντας οτι θα πρέπει $a_n \to 0$, αφού η $\sum a_n$ συγκλίνει.

(δ΄) Ένα αντιπαράδειγμα είναι στην περίπτωση $a_n = 1$. Πράγματι, η σειρά $\sum 1$ δεν συγκλίνει, όμως η σειρά $\sum 1^3 \log 1 = 0$.