ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, 2017-2018
Σ. ΤΟΥΜΠΗΣ

1η Ομάδα Ασκήσεων

1. **(Ανισότητα Bonferroni)** Να δείξετε ότι για οποιαδήποτε δύο ενδεχόμενα A, B, ισχύει η ανισότητα

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1.$$

Ακολούθως να δείξετε ότι, πιο γενικά,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \geq P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) - (n-1).$$

Λύση: Σχετικά με την πρώτη ανισότητα, παρατηρούμε πως

$$1 \geq P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1.$$

Σχετικά με την δεύτερη ανισότητα, παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned}
&1 - P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \\
&= P\left((A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)'\right) = P\left(A_1' \cup A_2' \cup \cdots \cup A_n'\right) \\
&\leq P(A_1') + P(A_2') + \cdots + P(A_n') = (1 - P(A_1)) + (1 - P(A_2)) + \cdots + (1 - P(A_n)) \\
&= n - P(A_1) - P(A_2) - \cdots - P(A_n),
\end{aligned}$$

και το ζητούμενο προκύπτει άμεσα. (Βεβαιωθείτε ότι καταλαβαίνετε κάθε ένα από τα άνω βήματα.)

2. **(5 μπάλες από 60)** Επιλέγουμε διαδοχικά χωρίς επανάθεση 5 μπάλες από μια κάλπη με 60 μπάλες αριθμημένες $1, \ldots, 60$. Έστω ότι οι ενδείξεις τους είναι $k_1, k_2, \ldots, k_5$, με την σειρά με την οποία εξάγονται.

(α΄) Ποια η πιθανότητα να ισχύει $k_1 < k_2 < k_3 < k_4 < k_5$;

(β΄) Ποια η πιθανότητα να ισχύει $k_5 > \max\{k_1, k_2, k_3, k_4\}$;

Λύση:

(α΄) Υπάρχουν δύο τρόποι να απαντήσουμε το ερώτημα. Ο πιο απλός είναι να επικαλεστούμε συμμετρία. Υπάρχουν 5! τρόποι για να μπουν στη σειρά οι 5 αριθμοί που θα προκύψουν, και μόνο ένας τρόπος αντιστοιχεί στο σύνολο ανισοτήτων $k_1 < k_2 < k_3 < k_4 < k_5$. Άρα,

$$p_1 = \frac{1}{5!}.$$

Εναλλακτικά, παρατηρούμε πως υπάρχουν $\frac{60!}{55!}$ πιθανές διατάξεις αριθμών που μπορεί να προκύψουν από την κάλπη. Επιπλέον, υπάρχουν $\binom{60}{5}$ διατάξεις που είναι αύξουσες. Αρκεί να επιλέξουμε 5 αριθμούς, κάτι που γίνεται με $\binom{60}{5}$ τρόπους, και να τους βάλουμε στη σειρά. Άρα,

$$p_1 = \frac{\frac{60!}{55!}}{\binom{60}{5}} = \frac{1}{5!}.$$

(β΄) Και πάλι, μπορούμε να απαντήσουμε το ερώτημα με δύο τρόπους. Αν επικαλεστούμε συμμετρία, παρατηρούμε πως κάθε μια μπάλα που βγαίνει από την κάλπη έχει ίδια πιθανότητα με τις υπόλοιπες να είναι η μεγαλύτερη, άρα

$$p_2 = \frac{1}{5}.$$

Εναλλακτικά, παρατηρούμε, όπως και πριν, πως υπάρχουν $\frac{60!}{55!}$ πιθανές διατάξεις αριθμών που μπορεί να προκύψουν από την κάλπη. Επιπλέον, οι διατάξεις που οδηγούν στη δοσμένη ανισότητα μπορούν να μετρηθούν ως εξής: έχουμε $\binom{60}{5}$ συνδυασμούς αριθμών που μπορεί να προκύψουν, και για κάθε έναν από αυτούς έχουμε 4! τρόπους να βάλουμε στη σειρά τους 4 μικρότερους στις πρώτες 4 θέσεις. Άρα,

$$p_2 = \frac{\frac{60!}{55!}4!}{\binom{60}{5}} = \frac{1}{5}.$$

3. **(Δώρα)** 6 άτομα ανταλλάσσουν δώρα εντελώς τυχαία. Ποια η πιθανότητα ένα τουλάχιστον από τα άτομα να λάβει το δικό του δώρο;

Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε την ακόλουθη εξίσωση:

$$P\left(\cup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{I\subseteq\{1,2,\ldots,n\},\ |I|=k} P\left(\cap_{i\in I} A_i\right).$$

Λύση: Έστω X το πλήθος των ατόμων που καταλήγουν με το δώρο τους. Έστω επίσης A_i, $i = 1,\ldots,6$ το ενδεχόμενο να καταλήξει το άτομο i με το δώρο του. Πρέπει να υπολογίσουμε το ενδεχόμενο $X \geq 0$.

$$\begin{aligned} P(X\geq 0) &= P(A_1\cup\cdots\cup A_6) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i\neq j} P(A_iA_j) + \cdots - P(A_1A_2\ldots A_n) \\ &= 6\times\frac{1}{6} - \binom{6}{2}\times\frac{1}{6\times 5} + \binom{6}{3}\times\frac{1}{6\times 5\times 4} - \binom{6}{4}\times\frac{1}{6\times 5\times 4\times 3} \\ &\quad + \binom{6}{5}\times\frac{1}{6\times 5\times 4\times 3\times 2} - \binom{6}{6}\times\frac{1}{6!} \simeq 0.6319, \end{aligned}$$

το οποίο είναι πολύ κοντά στο $1 - e^{-1}$ (αυτό δεν είναι τυχαίο).

Στους άνω υπολογισμούς, η δεύτερη ισότητα προκύπτει με χρήση της υπόδειξης. Στην τρίτη ισότητα, οι διωνυμικοί όροι εμφανίζονται μετρώντας το πλήθος των όρων του κάθε αθροίσματος. Επίσης, για την ίδια ισότητα, υπολογίζουμε τους όρους του κάθε αθροίσματος, που είναι ίσοι μεταξύ τους με απλή συνδυαστική. Για παράδειγμα θα υπολογίσουμε την πιθανότητα 2 άτομα να λάβουν το δώρο τους. Υπάρχουν συνολικά $6!$ δυνατές μεταθέσεις των δώρων. Από αυτές, υπάρχουν $4!$ μεταθέσεις στις οποίες τα δύο άτομα λαμβάνουν το δώρο τους, γιατί το τρίτο άτομο έχει 4 επιλογές, το τέταρτο άτομο έχει 3 επιλογές, κ.ο.κ. Έτσι η πιθανότητα είναι

$$P(A_iA_j) = \frac{4!}{6!} = \frac{1}{6\times 5}.$$

4. **(Ζευγαρώματα)** Ζευγάρωμα των στοιχείων του συνόλου $\{1,2,\ldots,2n\}$ λέμε κάθε σύνολο της μορφής

$$\{\{a_1,a_2\},\{a_3,a_4\},\ldots\{a_{2n-1},a_{2n}\}\},$$

όπου $a_1,a_2,\ldots,a_{2n}$ είναι τα στοιχεία του $\{1,2,\ldots,2n\}$ (σε ένα ζευγάρωμα, δεν έχει σημασία η σειρά των ζευγαριών, ούτε υπάρχει σειρά μέσα σε κάθε ζευγάρι, για αυτό και πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε άγκιστρα και όχι παρενθέσεις). Να βρεθεί το πλήθος των διαφορετικών ζευγαρωμάτων του $\{1,2,\ldots,2n\}$.

Σαν εφαρμογή του άνω αποτελέσματος, εξετάστε το εξής πρόβλημα: Έχουμε n ξυλάκια και σπάμε το καθένα από αυτά σε ένα μικρό και ένα μεγάλο κομμάτι. Τα $2n$ κομμάτια που προκύπτουν ζευγαρώνονται τυχαία και δημιουργούνται n καινούργια ξυλάκια. Να βρεθούν οι πιθανότητες:

(α΄) Κάθε κομμάτι ζευγαρώνεται με εκείνο με το οποίο ήταν πριν συγκολλημένο.

(β΄) Κάθε μεγάλο κομμάτι ζευγαρώνεται με μικρό κομμάτι.

Λύση: Υπάρχουν δύο τρόποι για να βρούμε το πλήθος των ζευγαριών. Ο πιο απλός είναι να βάλουμε τους αριθμούς σε αύξουσα σειρά, και να αρχίσουμε να δημιουργούμε ζευγάρια διαδοχικά, επιλέγοντας σε κάθε από τα n βήματα τον μικρότερο διαθέσιμο αριθμό σαν το πρώτο μέλος του ζευγαριού και έναν οποιονδήποτε από τους άλλους σαν τον δεύτερο. Παρατηρήστε πως έχουμε $2n-1$ επιλογές για το πρώτο ζευγάρι, $2n-3$ επιλογές για το δεύτερο ζευγάρι, κ.ο.κ., οπότε τελικά υπάρχουν

$$c_n = (2n-1)\times(2n-3)\times\cdots\times 3\times 1$$

δυνατά ζευγαρώματα.

Εναλλακτικά, παρατηρούμε ότι αν η σειρά των ζευγαριών και η θέση του αριθμού στο ζευγάρι είχαν σημασία, τότε θα είχαμε $(2n)!$ ζευγαρώματα. Όμως η σειρά των ζευγαριών δεν έχει σημασία, άρα πρέπει να διαιρέσουμε τον άνω αριθμό με τις δυνατές μεταθέσεις των ζευγαριών, $n!$, για να πάρουμε τον αριθμό των ζευγαρωμάτων αν έχει σημασία μόνο η θέση του αριθμού στο ζευγάρι. Επειδή όμως ούτε η θέση του αριθμού στο ζευγάρι έχει σημασία, πρέπει να διαιρέσουμε με τον αριθμό 2 για κάθε ζευγάρι, δηλαδή συνολικά με τον αριθμό 2^n. Προκύπτει τελικά πως υπάρχουν

$$c_n = \frac{(2n)!}{n!2^n} = (2n-1)\times(2n-3)\times\cdots\times 3\times 1$$

δυνατά ζευγαρώματα.

Εξετάζοντας το πρόβλημα με τα n ξυλάκια, παρατηρούμε πως από τα c_n ζευγαρώματα, μόνο ένα αντιστοιχεί στην περίπτωση που το κάθε μικρό κομμάτι βρίσκει το δικό του μεγάλο κομμάτι. Άρα, η πιθανότητα του ενδεχόμενου A κάθε κομμάτι να ζευγαρώνεται με εκείνο που πριν ήταν συγκολλημένο είναι

$$P(A) = \frac{1}{c_n} = \frac{1}{(2n-1) \times (2n-3) \dots 3 \times 1}.$$

Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα του ενδεχόμενου B κάθε μεγάλο κομμάτι να καταλήξει με ένα μικρό, παρατηρούμε πως το πρώτο μεγάλο κομμάτι έχει n επιλογές (οποιοδήποτε από τα n μικρά), το δεύτερο μεγάλο κομμάτι έχει $n-1$ επιλογές, κ.ο.κ., και επομένως υπάρχουν $n!$ αποτελέσματα που ανήκουν στο B, συνεπώς

$$P(B) = \frac{n!}{c_n}.$$

5. **(Τουρνουά)** Σε ένα τουρνουά καλαθοσφαίρισης συμμετέχουν 8 ομάδες Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ,Η,Θ. Το τουρνουά διεξάγεται σε τρεις γύρους, σύμφωνα με το Σχήμα 1. Κάθε αγώνας έχει νικητή και χαμένο (δεν υπάρχουν ισοπαλίες) και ο νικητής προκρίνεται στον επόμενο γύρο. Οι ομάδες τοποθετούνται στις θέσεις 1 έως 8 με κλήρωση, χωρίς προτίμηση στο αποτέλεσμα. Παρατηρήστε ότι διεξάγεται μόνο μια κλήρωση, στην αρχή του τουρνουά, και ότι θα γίνουν ακριβώς 7 αγώνες. Όλες οι ομάδες είναι ισοδύναμες, και επομένως τα 2 αποτελέσματα ενός αγώνα είναι ισοπίθανα. Υποθέτοντας πως η κλήρωση δεν έχει γίνει ακόμα, απαντήστε τα ακόλουθα:

(α΄) Ποια είναι η πιθανότητα οι ομάδες Α,Β να παίξουν μεταξύ τους στον τελικό γύρο;

(β΄) Ποια είναι η πιθανότητα οι ομάδες Α,Β να παίξουν μεταξύ τους σε οποιονδήποτε από τους τρεις γύρους;

(γ΄) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει η κλήρωση στον πρώτο γύρο, αν δεν μας νοιάζει η σειρά που παίζουν οι ομάδες σε ένα αγώνα, σε οποιοδήποτε στάδιο του διαγωνισμού;

Λύση:

(α΄) Υπάρχουν $\binom{8}{2} = 28$ ζεύγη ομάδων, και δεν υπάρχει κάποιο ζεύγος ομάδων που να έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να φτάσει στον τελικό από κάποιο άλλο. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{1}{28}$.

Εναλλακτικά παρατηρήστε πως υπάρχει πιθανότητα $\frac{4}{7}$ να τοποθετηθούν οι Α,Β σε διαφορετικές τετράδες (ώστε να μπορούν να κερδίσουν η κάθε μια και τους 2 αγώνες μέχρι τον τελικό και να συναντηθούν εκεί και όχι νωρίτερα). Πράγματι, με δεδομένο ότι ξέρουμε που έχει κληρωθεί η πρώτη ομάδα, η δεύτερη ομάδα πρέπει να κληρωθεί σε 4 από 7 επιλογές. Με δεδομένο αυτό το ενδεχόμενο, έχουμε πιθανότητα $\frac{1}{2^4}$ να κερδίσουν οι ομάδες Α,Β και τους 4 αγώνες που έχουν να δώσουν (2 αγώνες η κάθε μια), άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{4}{7} \times \frac{1}{2^4} = \frac{1}{28}$.

(β΄) Οι Α,Β θα παίξουν μαζί είτε σε προημιτελικό, είτε σε ημιτελικό, είτε σε τελικό. Τα ενδεχόμενα αυτά είναι ξένα, επομένως αρκεί να υπολογίσουμε και να προσθέσουμε τις πιθανότητές τους.

i. Το πρώτο ενδεχόμενο θα συμβεί αν οι ομάδες κληρωθούν στον ίδιο προημιτελικό. Αν φανταστούμε ότι έχει τοποθετηθεί η πρώτη ομάδα, η δεύτερη θα τοποθετηθεί στον ίδιο προημιτελικό με πιθανότητα $\frac{1}{7}$.

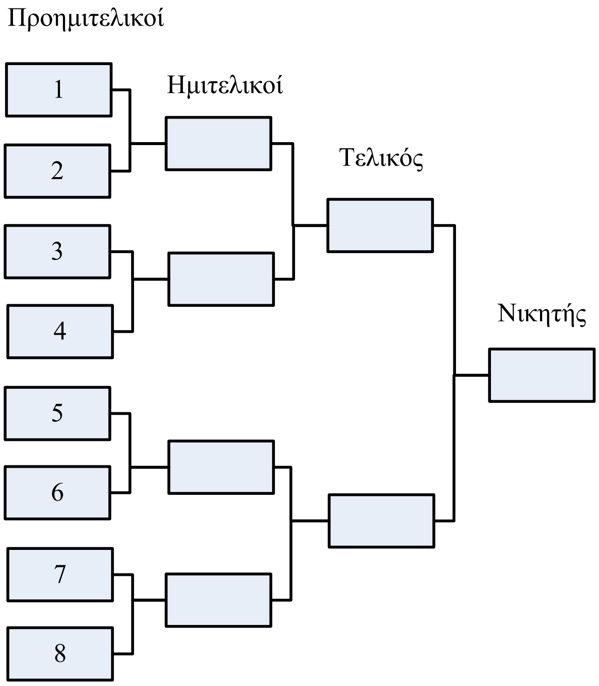
ii. Για να συμβεί το δεύτερο ενδεχόμενο, πρέπει να κληρωθούν οι ομάδες στην ίδια τετράδα αλλά όχι στο ίδιο ζεύγος (κάτι που συμβαίνει με πιθανότητα $\frac{2}{7}$), και ακολούθως να νικήσουν μια φορά η μια (αυτό γίνεται με πιθανότητα $\frac{1}{4}$. Τελικά η πιθανότητα είναι $\frac{2}{7} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{14}$.

iii. Το τελευταίο ενδεχόμενο έχει υπολογιστεί στο προηγούμενο σκέλος, και ισούται με $\frac{1}{28}$.

Προσθέτοντας, προκύπτει τελικά πως η πιθανότητα είναι $\frac{1}{4}$.

(γ΄) Παρατηρήστε πως υπάρχουν $8!$ μεταθέσεις με τις οποίες μπορούμε να βάλουμε τις ομάδες στις 8 θέσεις. Όμως, για κάθε μετάθεση όπου στο πρώτο ζεύγος εμφανίζονται 2 συγκεκριμένες ομάδες, υπάρχει μια άλλη μετάθεση όπου εμφανίζονται οι ίδιες ομάδες με αντίστροφη σειρά. Επειδή η σειρά δεν έχει σημασία, πρέπει να διαιρέσουμε με το 2. Παρόμοια πρέπει να διαιρέσουμε με το 2 και για τα άλλα 3 ζεύγη. Καταλήγουμε έτσι σε $8!/2^4$ αποτελέσματα, εκ των οποίων και πάλι ορισμένα εμφανίζονται πολλές φορές. Πράγματι, δεν έχει σημασία η σειρά με την οποία εμφανίζονται οι νικητές των ζευγαριών στους προημιτελικούς, άρα πρέπει να διαιρέσουμε με ένα 2^2. Τέλος, με παρόμοια λογική πρέπει να διαιρέσουμε με ένα ακόμα 2 λόγω της συμμετρίας που εμφανίζεται στον τελικό. Άρα τελικά υπάρχουν $8!/2^7 = 315$ τρόποι για να γίνει η κλήρωση.

Εναλλακτικά, μπορούμε να σκεφτούμε ως εξής. Αν τοποθετηθούν σε μια αυθαίρετη σειρά (π.χ. αρχαιότητας) οι ομάδες, και επιλέγουν αντιπάλους με σειρά αρχαιότητας, ο πρώτος που θα επιλέξει έχει 7 επιλογές, ο δεύτερος 5, ο τρίτος 3, και ο τελευταίος 1. Τοποθετούμε εκ των υστέρων τα 4 ζεύγη σε μια αυθαίρετη σειρά, και το πρώτο εξ αυτών επιλέγει το δικό του ζευγάρι, με 3 τρόπους. Σε αυτό το σημείο, το τουρνουά έχει προσδιορισθεί πλήρως. Υπάρχουν λοιπόν $7 \times 5 \times 3 \times 3 = 315$ τρόποι για να γίνει η κλήρωση.



Σχήμα 1: Το τουρνουά της Άσκησης 4.

6. **(Survivor)** Δύο ομάδες, η A και η B, δίνουν διαδοχικούς αγώνες που λήγουν με τη νίκη της ομάδας A με πιθανότητα p ή τη νίκη της ομάδας B με πιθανότητα $1-p$, ανεξάρτητα από τους άλλους αγώνες. Νικά η ομάδα που θα κάνει πρώτη 10 νίκες. Να γράψετε ένα σύστημα εξισώσεων που μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την πιθανότητα να κερδίσει η ομάδα A, χρησιμοποιώντας δεσμευμένες πιθανότητες. ΜΗΝ λύσετε το σύστημα.

   Λύση: Έστω $P_{i,j}$ η πιθανότητα να κερδίσει η ομάδα A, με δεδομένο ότι το σκορ είναι $i-j$. Παρατηρήστε πως

$$\begin{aligned} P_{i,j} &= pP_{i+1,j} + (1-p)P_{i,j+1}, \quad 0 \leq i,j \leq 9, \\ P_{i,10} &= 0, \quad 0 \leq i \leq 9, \\ P_{10,j} &= 1, \quad 0 \leq j \leq 9. \end{aligned}$$

   Η πρώτη ομάδα από τις άνω εξισώσεις προέκυψε κάνοντας δέσμευση στο αποτέλεσμα του αγώνα που γίνεται όταν το σκορ είναι $i-j$. Οι άλλες δύο ομάδες αποτελούν αρχικοποίηση.

   Παρατηρήστε πως έχουμε ένα γραμμικό σύστημα με 120 εξισώσεις και 120 αγνώστους (δεν εμφανίζεται πουθενά η $P_{10,10}$). Το σύστημα είναι αραιό και μπορεί να λυθεί γρήγορα, λόγω της δομής του.

7. **(Τριαδικό Κανάλι)** Στο Σχήμα 2 έχουμε σχεδιάσει ένα μαθηματικό μοντέλο για το τριαδικό κανάλι επικοινωνίας. Σε αυτό το κανάλι, δεν μεταδίδουμε μόνο δύο σύμβολα, όπως γίνεται συνήθως (το 0 και το 1), αλλά τρία, το 0, το 1, και το 2. Τα σύμβολα εισόδου 0, 1, 2 εμφανίζονται με πιθανότητες $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ και $\frac{1}{2}$ αντιστοίχως, και μεταδίδονται μέσω του καναλιού. Δυστυχώς, στο κανάλι γίνονται σφάλματα, λόγω θορύβου. Συγκεκριμένα, με πιθανότητα $1-\epsilon$ μεταδίδεται το σωστό σύμβολο, και με πιθανότητα ϵ κάποιο λάθος, όπως φαίνεται στο σχήμα.

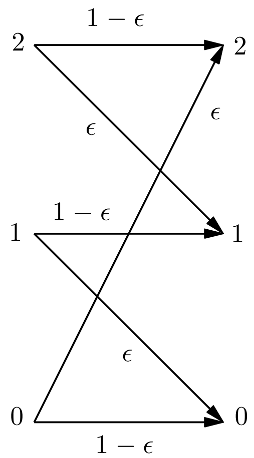
   (α΄) Βρείτε τις πιθανότητες με τις οποίες εμφανίζονται τα σύμβολα στην έξοδο.

   (β΄) Έστω ότι παρατηρήσαμε 1 στην έξοδο. Ποια είναι η πιθανότητα η είσοδος να ήταν 0; 1; 2;

   Λύση:

   (α΄) Ορίζουμε τα ενδεχόμενα A_i το σύμβολο εισόδου να είναι το i, και B_i το σύμβολο εξόδου να είναι το i, όπου $i = 0, 1, 2$. Η άσκηση μας δίνει ότι:

$$P(B_2|A_2) = 1-\epsilon, \;\; P(B_1|A_2) = \epsilon, \;\; P(B_0|A_2) = 0,$$
$$P(B_2|A_1) = 0, \;\; P(B_1|A_1) = 1-\epsilon, \;\; P(B_0|A_1) = \epsilon,$$
$$P(B_2|A_0) = \epsilon, \;\; P(B_1|A_0) = 0, \;\; P(B_0|A_0) = 1-\epsilon.$$



Σχήμα 2: Άσκηση 6.

Από το νόμο της ολικής πιθανότητας, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
P(B_2) &= P(B_2|A_2)P(A_2) + P(B_2|A_1)P(A_1) + P(B_2|A_0)P(A_0) \\
&= (1-\epsilon) \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{4} + \epsilon \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{4}, \\
P(B_1) &= P(B_1|A_2)P(A_2) + P(B_1|A_1)P(A_1) + P(B_1|A_0)P(A_0) \\
&= \epsilon \times \frac{1}{2} + (1-\epsilon) \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{\epsilon}{4}, \\
P(B_0) &= P(B_0|A_2)P(A_2) + P(B_0|A_1)P(A_1) + P(B_0|A_0)P(A_0) \\
&= 0 \times \frac{1}{2} + \epsilon \times \frac{1}{4} + (1-\epsilon) \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι $P(B_0) + P(B_1) + P(B_2) = 1$, όπως αναμενόταν.

(β΄) Ουσιαστικά εφαρμόζουμε τον Κανόνα του Bayes:

$$\begin{aligned}
P(A_2|B_1) &= \frac{P(B_1|A_2)P(A_2)}{P(B_1)} = \frac{2\epsilon}{1+\epsilon}, \\
P(A_1|B_1) &= \frac{P(B_1|A_1)P(A_1)}{P(B_1)} = \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}, \\
P(A_0|B_1) &= \frac{P(B_1|A_0)P(A_0)}{P(B_1)} = 0.
\end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι $P(A_2|B_1) + P(A_1|B_1) + P(A_0|B_1) = 1$, όπως επίσης αναμενόταν.

8. **(Στίγμα)** Από το σύνολο κάποιου πληθυσμού, το 1% των ατόμων έχει το γενετικό στίγμα κάποιας εν μέρει κληρονομικής ασθένειας. Αν και οι δύο γονείς έχουν το στίγμα, κάθε παιδί τους έχει πιθανότητα 50% να έχει το στίγμα. Αν μόνο ένας από τους δύο γονείς έχει το στίγμα, κάθε παιδί τους έχει πιθανότητα 2% να έχει το στίγμα. Αν δεν έχει το στίγμα κανένας από τους δύο, τότε δεν το έχει και το παιδί. Υποθέτουμε ότι η κληρονομικότητα είναι ανεξάρτητη από παιδί σε παιδί είτε έχουν οι γονείς το στίγμα είτε όχι, και ότι οι γονείς έχουν το στίγμα ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο. (Παρατηρήστε ότι το τελευταίο μπορεί αν μην ισχύει σε αντίστοιχες πραγματικές περιπτώσεις, καθώς ζεύγη ατόμων που έχουν και οι δύο το στίγμα μπορεί να αποθαρρύνονται από το να κάνουν παιδιά.)

   (α΄) Ποια η πιθανότητα τα δύο παιδιά ενός ζευγαριού στο οποίο μόνο ο ένας γονιός έχει το στίγμα, να έχουν και τα δύο το στίγμα;

   (β΄) Αν δεν γνωρίζουμε τίποτα για τους γονείς, ποια η πιθανότητα τα δύο παιδιά ενός τυχαίου ζευγαριού να έχουν και τα δύο το στίγμα;

   (γ΄) Αντίστροφα, δεδομένου ότι διαπιστώνουμε πως και τα δύο παιδιά ενός ζευγαριού έχουν το στίγμα, ποια η πιθανότητα ακριβώς ένας γονιός (οποιοσδήποτε από τους δύο) να έχει το στίγμα; Ποια η πιθανότητα να έχουν το στίγμα και οι δύο;

Λύση: Έστω A το ενδεχόμενο να έχουν και οι δύο γονείς στίγμα. Λόγω ανεξαρτησίας, $P(A) = 0.01^2 = 10^{-4}$. Έστω C το ενδεχόμενο να μην έχει κανείς από τους γονείς στίγμα. Και πάλι λόγω ανεξαρτησίας, $P(C) = 0.99^2 = 0.9801$. Τέλος, έστω B το ενδεχόμενο να έχει ακριβώς ένας από τους γονείς στίγμα. Καθώς τα A, B, C είναι διαμέριση, θα έχουμε $P(B) = 1 - P(A) - P(C) = 1 - 0.01^2 - 0.99^2 = 0.0198$.

Επίσης, έστω S_1, S_2 τα ενδεχόμενα να έχουν στίγμα το πρώτο και το δεύτερο παιδί αντιστοίχως.

Καταρχάς παρατηρήστε ότι τα ενδεχόμενα S_1, S_2 είναι ανεξάρτητα με δέσμευση σε κάποιο από τα A, B, C, δηλαδή

$$P(S_1S_2|A) = P(S_1|A)P(S_2|A), \quad P(S_1S_2|B) = P(S_1|B)P(S_2|B), \quad P(S_1S_2|C) = P(S_1|C)P(S_2|C),$$

αλλά τα S_1, S_2 δεν είναι ανεξάρτητα, δηλαδή δεν ισχύει ότι

$$P(S_1S_2) = P(S_1)P(S_2).$$

Διαισθητικά, αν δεν γνωρίζουμε αν έχουν οι γονείς στίγμα, και μάθουμε ότι το ένα παιδί έχει στίγμα, αυτόματα αυξάνεται η πιθανότητα να έχει στίγμα και το άλλο παιδί, διότι αυξήθηκαν οι πιθανότητες να έχουν στίγμα οι γονείς. Σαν εύκολη άσκηση, επαληθεύστε πως δεν ισχύει η άνω.

(α΄) Έχουμε, λόγω της υπόθεσης της ανεξαρτησίας:

$$P(S_1S_2|B) = P(S_1|B)P(S_2|B) = 0.02^2 = 0.0004.$$

(β΄) Εφαρμόζουμε τον Νόμο της Ολικής Πιθανότητας:

$$\begin{aligned} P(S_1S_2) &= P(S_1S_2|A)P(A) + P(S_1S_2|B)P(B) + P(S_1S_2|C)P(C) \\ &= P(S_1|A)P(S_2|A)P(A) + P(S_1|B)P(S_2|B)P(B) + P(S_1|C)P(S_2|C)P(C) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 10^{-4} + (0.02)^2 \times 0.0198 + 0 = 3.292 \times 10^{-5}. \end{aligned}$$

(γ΄) Για να υπολογίσουμε την πρώτη πιθανότητα, ουσιαστικά εφαρμόζουμε τον Κανόνα του Bayes:

$$P(B|S_1S_2) = \frac{P(BS_1S_2)}{P(S_1S_2)} = \frac{P(S_1S_2|B)P(B)}{P(S_1S_2)} = \frac{0.02^2 \times 0.0198}{3.292 \times 10^{-5}} = 0.2406.$$

Τέλος, αφού προφανώς $P(C|S_1S_2) = 0$, θα έχουμε

$$P(A|S_1S_2) = 1 - P(B|S_1S_2) - P(C|S_1S_2) = 1 - 0 - 0.2406 = 0.7594.$$

2η Ομάδα Ασκήσεων

9. **(Κολοκύθες)** Κάθε εβδομάδα, ένα μανάβης έχει X πελάτες που ζητούν να αγοράσουν μια κολοκύθα, εφόσον έχουν μείνει απούλητες κολοκύθες, όπου η Τ.Μ. X έχει την ακόλουθη συνάρτηση μάζας πιθανότητας:

$$p_X(x) = \frac{9-x}{10}, \quad x = 5, 6, 7, 8.$$

Στην αρχή της εβδομάδας ο μανάβης αγοράζει κολοκύθες προς 2 ευρώ τη μια, ενώ κατά τη διάρκεια της εβδομάδας τις πουλά προς 4 ευρώ τη μία. Στο τέλος της εβδομάδας ο μανάβης πετά όσες κολοκύθες του έχουν απομείνει. Αν ο μανάβης θέλει να μεγιστοποιήσει το αναμενόμενο ΚΑΘΑΡΟ κέρδος του, πόσες κολοκύθες πρέπει να αγοράσει στην αρχή της εβδομάδας; *(Υπόδειξη: υπολογίστε τα αναμενόμενα καθαρά κέρδη του μανάβη αν αγοράσει στην αρχή της εβδομάδας x κολοκύθες, με $x = 5, 6, 7, 8$, και συγκρίνετέ τα.)*

Λύση: Ο μανάβης βγάζει 2 ευρώ καθαρό κέρδος για κάθε κολοκύθα που αγοράζει και κατόπιν πουλάει, και -2 καθαρό κέρδος για κάθε κολοκύθα που αγοράζει και δεν καταφέρνει να μεταπωλήσει. Έστω Z το αναμενόμενο καθαρό κέρδος του μανάβη. Το αναμενόμενο κέρδος του εξαρτάται από το πόσες κολοκύθες επιλέγει να αγοράσει. Παίρνουμε περιπτώσεις:

(α΄) Έστω πως ο μανάβης αγοράζει 8 κολοκύθες. Έχουμε:

$$Z = \begin{cases} 8 \times 2 = 16, & \text{με πιθανότητα } \frac{1}{10}, \\ 7 \times 2 - 2 = 12, & \text{με πιθανότητα } \frac{2}{10}, \\ 6 \times 2 - 2 \times 2 = 8, & \text{με πιθανότητα } \frac{3}{10}, \\ 5 \times 2 - 3 \times 2 = 4, & \text{με πιθανότητα } \frac{4}{10}. \end{cases}$$

με μέση τιμή

$$() = 16 \times \frac{1}{10} + 12 \times \frac{2}{10} + 8 \times \frac{3}{10} + 4 \times \frac{4}{10} = 8.$$

(β΄) Έστω πως ο μανάβης αγοράζει 7 κολοκύθες. Έχουμε:

$$Z = \begin{cases} 7 \times 2 = 14, & \text{με πιθανότητα } \frac{3}{10}, \\ 6 \times 2 - 2 = 10, & \text{με πιθανότητα } \frac{3}{10}, \\ 5 \times 2 - 2 \times 2 = 6, & \text{με πιθανότητα } \frac{4}{10}. \end{cases}$$

με μέση τιμή

$$() = 14 \times \frac{3}{10} + 10 \times \frac{3}{10} + 6 \times \frac{4}{10} = \frac{96}{10}.$$

(γ΄) Έστω πως ο μανάβης αγοράζει 6 κολοκύθες. Έχουμε:

$$Z = \begin{cases} 6 \times 2 = 12, & \text{με πιθανότητα } \frac{6}{10}, \\ 5 \times 2 - 2 = 8, & \text{με πιθανότητα } \frac{4}{10}. \end{cases}$$

με μέση τιμή

$$() = 12 \times \frac{6}{10} + 8 \times \frac{4}{10} = \frac{104}{10}.$$

(δ΄) Έστω πως ο μανάβης αγοράζει 5 κολοκύθες. Θα τις πουλήσει σίγουρα όλες, άρα θα έχει κέρδος 10.

Άρα, τελικά, συμφέρει τον μανάβη να αγοράσει 6 κολοκύθες, διότι τότε μεγιστοποιείται το αναμενόμενο κέρδος του.

10. **(Magic: The Gathering)** Έχουμε ένα σετ από 60 διαφορετικές κάρτες Magic: The Gathering, εκ των οποίων η μια είναι η Firefly και άλλη μια η Magmasaur. Έστω το ακόλουθο πείραμα: επιλέγω στην τύχη 2 κάρτες από τις 60, χωρίς επανάθεση, και χωρίς κάποια προτίμηση στον συνδυασμό των καρτών που θα επιλέξω.

Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα:

(α΄) Ποια είναι η πιθανότητα στην επιλογή μου να υπάρχει η Firefly;

(β΄) Ποια είναι η πιθανότητα η επιλογή μου να αποτελείται από την Firefly **και** την Magmasaur;

(γ΄) Ποια είναι η πιθανότητα η επιλογή μου να περιλαμβάνει την Firefly **ή** την Magmasaur (και ενδεχομένως και τις δύο);

(δ΄) Δώστε ένα τύπο (χωρίς να κάνετε τις πράξεις) που να δίνει **επακριβώς** την πιθανότητα να βρω την Firefly ακριβώς 5 φορές αν επαναλάβω το πείραμα 100 φορές, και τα επαναλαμβανόμενα πειράματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Λύση:

(α΄) Υπάρχουν $\binom{60}{2}$ ισοπίθανοι συνδυασμοί ζευγών. Το ενδεχόμενο A που ερευνούμε αντιστοιχεί σε 59 συνδυασμούς. Πράγματι, αν η μία κάρτα είναι η Firefly, για την άλλη κάρτα έχουμε 59 επιλογές. Άρα η πιθανότητα του A είναι

$$P(A) = \frac{59}{\binom{60}{2}} = \frac{1}{30}.$$

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να παρατηρήσουμε ότι η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με την πιθανότητα η πρώτη κάρτα να είναι η Firefly, που είναι $\frac{1}{60}$, συν την πιθανότητα η δεύτερη κάρτα να είναι ο Firefly, που είναι επίσης $\frac{1}{60}$. (Κατά τα δοσμένα, η πιθανότητα να είναι και οι δύο η Firefly είναι 0, γιατί δεν έχουμε επανάθεση.)

(β΄) Υπάρχουν $\binom{60}{2}$ ισοπίθανοι συνδυασμοί ζευγών. Το ενδεχόμενο B που ερευνούμε αντιστοιχεί σε ένα μόνο συνδυασμό, άρα η πιθανότητά του είναι

$$P(B) = \frac{1}{\binom{60}{2}} = \frac{2}{59 \times 60} = \frac{1}{1770}.$$

Εναλλακτικά, παρατηρήστε πως η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με την πιθανότητα η πρώτη κάρτα να είναι μια από τις δύο που ψάχνουμε, που συμβαίνει με πιθανότητα $\frac{2}{60}$, επί την πιθανότητα $\frac{1}{59}$ η δεύτερη να είναι αυτή που ψάχνουμε, με δεδομένο ότι ήδη βρήκαμε μια.

(γ΄) Έστω C το συγκεκριμένο ενδεχόμενο. Είναι πιο εύκολο να υπολογίσουμε την πιθανότητα του συμπληρώματός του, C', δηλαδή του ενδεχόμενο να μην βρούμε καμία από τις δύο κάρτες. Και πάλι, υπάρχουν $\binom{60}{2}$ ισοπίθανοι συνδυασμοί ζευγών, και στο C' αντιστοιχούν $\binom{58}{2}$. Άρα τελικά

$$P(C') = \frac{\binom{58}{2}}{\binom{60}{2}} = \frac{58!58!2!}{56!2!60!} = \frac{58 \times 57}{60 \times 59} = \frac{551}{590} \Rightarrow P(C) = 1 - \frac{551}{590} = \frac{39}{551}.$$

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα του C' ως εξής: Δεν θα βρω καμία από τις δύο αν η πρώτη που θα επιλέξω δεν είναι κάποια από αυτές, που συμβαίνει με πιθανότητα $\frac{58}{60}$, και, με δεδομένο ότι η πρώτη δεν είναι κάποια από αυτές, να μην είναι και η δεύτερη. Αυτό γίνεται με πιθανότητα $\frac{57}{59}$.

(δ΄) Εκτελώ 100 πειράματα, καθένα με πιθανότητα επιτυχίας $\frac{1}{30}$, όπως βρήκαμε στο πρώτο σκέλος, άρα η κατανομή του πλήθους M των καρτών του Firefly που βρίσκω είναι η διωνυμική, με παραμέτρους $N = 100$, $p = \frac{1}{30}$. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι η

$$P(M = 5) = \binom{100}{5}\left(\frac{1}{30}\right)^5\left(\frac{29}{30}\right)^{95} \simeq 0.1237.$$

Η προσέγγιση Poisson μας δίνει πιθανότητα $\simeq 0.1223$.

11. **(Πίτσες και μακαρονάδες)** Ένας οικοδεσπότης ετοιμάζεται να υποδεχτεί 20 καλεσμένους για φαγητό. Κάθε καλεσμένος με την άφιξή του θα θελήσει να φάει πίτσα με πιθανότητα $p = 0.6$ και μακαρονάδα με πιθανότητα $1-p = 0.4$, ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους. Ο οικοδεσπότης, προκειμένου να μην χρονοτριβήσουν, παραγγέλνει από πριν 16 πίτσες και 12 μακαρονάδες. Ποια είναι η πιθανότητα να μην μπορούν να φάνε όλοι το φαγητό της επιλογής τους;

    Λύση: Έστω A το ενδεχόμενο να μην φάει ένας καλεσμένος το φαγητό της επιλογής του. Το A μπορεί να γραφεί ως η ένωση δύο ξένων ενδεχόμενων A_1 και A_2, όπου A_1 είναι το ενδεχόμενο να ζητήσουν πάνω από 16 άτομα πίτσα, και A_2 το ενδεχόμενο να ζητήσουν περισσότερα από 12 άτομα μακαρονάδα, ή αλλιώς λιγότερα από 8 άτομα πίτσα. Έστω X το πλήθος των ατόμων που επιλέγουν πίτσα. Παρατηρούμε πως το X ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $N = 20$ (το πλήθος των πειραμάτων) και $p = 0.6$ (η πιθανότητα επιτυχίας). Παρατηρούμε, τέλος, πως

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) = \sum_{x=17}^{20} P(X = x) + \sum_{x=1}^{7} P(X = x) \\ &= \sum_{x=1,2,3,4,5,6,7,17,18,19,20} \binom{20}{x} 0.6^x 0.4^{20-x} \simeq 0.037. \end{aligned}$$

12. **(Κυνήγι Χήνας)** Δύο κυνηγοί, ο A και ο B, κυνηγούν χήνες με τον ακόλουθο τρόπο: οι χήνες εμφανίζονται διαδοχικά, και όποτε εμφανίζεται μια, την πυροβολούν και οι δύο ταυτόχρονα. Ο A πετυχαίνει την χήνα με πιθανότητα $\frac{1}{2}$, ενώ ο B την πετυχαίνει με πιθανότητα $\frac{1}{4}$. Τα αποτελέσματα των πυροβολισμών είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Η χήνα σκοτώνεται αν την πετύχει έστω ένας, και επιζεί αν αστοχήσουν και οι δύο. Επειδή οι πυροβολισμοί είναι ταυτόχρονοι, αν η χήνα σκοτωθεί κανείς από τους A και B δεν είναι σίγουρος ότι όντως την πέτυχε.

    (α΄) Από τις χήνες που εμφανίζονται, τι ποσοστό γλιτώνει, και τι ποσοστό χτυπιέται και από τους δύο;

    (β΄) Με δεδομένο ότι μια χήνα έχει χτυπηθεί, ποια είναι η πιθανότητα ότι την πέτυχε ο A μόνο;

    (γ΄) Αν εμφανιστούν συνολικά 100 χήνες, ποια είναι η πιθανότητα να επιβιώσουν ακριβώς 10;

    (δ΄) Αν έχουν εμφανιστεί 5 χήνες και έχουν όλες επιβιώσει, ποια είναι η πιθανότητα η πρώτη που θα σκοτωθεί να είναι η 8η;

    Λύση:

    (α΄) Έστω A το ενδεχόμενο να πετύχει ο κυνηγός A την χήνα και B το ενδεχόμενο να την πετύχει ο κυνηγός B. Η χήνα γλιτώνει με πιθανότητα

$$P(A' \cap B') = P(A')P(B') = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}.$$

Η πρώτη ισότητα προέκυψε λόγω της ανεξαρτησίας των A, B, άρα και των A', B' (γνωστή ιδιότητα της ανεξαρτησίας). Άρα το ποσοστό που γλιτώνει είναι το $\frac{3}{8} \times 100\%$.
Η χήνα χτυπιέται και από τους δύο με πιθανότητα

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8},$$

όπου και πάλι χρησιμοποιήσαμε την ανεξαρτησία των A, B, στην πρώτη ισότητα. Άρα, το ποσοστό που χτυπιέται και από τους δύο είναι το $\frac{1}{8} \times 100\%$.

(β΄) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η

$$P(A \cap B' | A \cup B) = \frac{P«A \cap B') \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \cap B')}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)P(B')}{1 - P(A' \cap B')} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{8}} = \frac{3}{5}.$$

(γ΄) Κάθε μια από τις 100 χήνες γλιτώνει ανεξάρτητα από τις άλλες, και όλες έχουν την ίδια πιθανότητα επιβίωσης, $P(A' \cap B') = \frac{3}{8}$. Επομένως, το πλήθος των χηνών που θα επιβιώσουν περιγράφεται από την διωνυμική κατανομή, με παραμέτρους $N = 100$ και $p = \frac{3}{8}$. Κατά τα γνωστά από την διωνυμική κατανομή, η ζητούμενη πιθανότητα είναι η

$$\binom{100}{10} \left(\frac{3}{8}\right)^{10} \left(1 - \frac{3}{8}\right)^{100-10} = \binom{100}{10} \left(\frac{3}{8}\right)^{10} \left(\frac{5}{8}\right)^{90}.$$

(δ΄) Παρατηρήστε πως ο αριθμός των προσπαθειών μέχρι την πρώτη κατάρριψη περιγράφεται από την γεωμετρική κατανομή, με πιθανότητα επιτυχίας $P(A \cup B) = 1 - P(A' \cap B') = \frac{5}{8}$. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της έλλειψης μνήμης, προκύπτει πως η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με την πιθανότητα η πρώτη χήνα που θα σκοτωθεί να είναι η 3η, δηλαδή $\left(\frac{3}{8}\right)^2 \times \frac{5}{8} = \frac{45}{512}$.

13. **(Λαχειοφόρος αγορά)** Σε μια λαχειοφόρο αγορά υπάρχουν 10 λαχνοί, εκ των οποίων κερδίζουν οι δύο, από ένα δώρο ο καθένας (τα δύο δώρα είναι πανομοιότυπα). Δύο άτομα αγοράζουν από δύο λαχνούς ο καθένας. Έστω $X, Y \in \{0, 1, 2\}$ το πλήθος των δώρων που κερδίζει ο καθένας.

(α΄) Να υπολογίσετε την από κοινού μάζα πιθανότητας $p_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y)$, για κάθε $x \in \{0, 1, 2\}$, $y \in \{0, 1, 2\}$. Αποτυπώστε τη σε ένα πίνακα 3×3.

(β΄) Βάσει του προηγούμενου σκέλους, ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχόμενου A να πάρουν και τα δύο δώρα οι δύο διαγωνιζόμενοι; Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχόμενου B ένας (οποιοσδήποτε) από τους δύο να πάρει και τα δύο δώρα; Επίσης, υπολογίστε τις μάζες $p_X(x)$, $p_Y(y)$, τις μέσες τιμές $E(X)$, $E(Y)$, και την συνδιακύμανση $\mathrm{COV}(X, Y)$.

Δώστε όλα τα αποτελέσματα σε μορφή απλών κλασμάτων.

Λύση:

(α΄) Αφού $X, Y \in \{0, 1, 2\}$, πρέπει να υπολογίσουμε 9 τιμές συνολικά. Παρατηρήστε όμως ότι

$$p_{XY}(2, 2) = p_{XY}(2, 1) = p_{XY}(1, 2) = 0,$$

αφού έχουμε μόνο 2 δώρα. Επιπλέον, λόγω συμμετρίας, $p_{XY}(0, 1) = p_{XY}(1, 0)$ και $p_{XY}(0, 2) = p_{XY}(2, 0)$. Άρα, τελικά μας μένει να υπολογίσουμε 4 τιμές της από κοινού μάζας, τις $p_{XY}(0, 0)$, $p_{XY}(1, 1)$, $p_{XY}(1, 0)$, $p_{XY}(2, 0)$.

Η $p_{XY}(0, 0)$ ισούται με την πιθανότητα να πάρουμε 4 λαχνούς από 10, εκ των οποίων δύο κερδίζουν, και να μην επιλέξουμε κανέναν από τους δύο. Άρα,

$$p_{XY}(0, 0) = \frac{\binom{8}{4}}{\binom{10}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Η $p_{XY}(2, 0)$ ισούται με την πιθανότητα να επιλέξει ο πρώτος παίκτης 2 λαχνούς ανάμεσα στους 10, και να πετύχει και τους δύο λαχνούς που κερδίζουν. Άρα,

$$p_{XY}(2, 0) = \frac{1}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{45}.$$

Η $p_{XY}(1, 0)$ ισούται με την πιθανότητα να επιλέξει ο πρώτος παίκτης 2 λαχνούς ανάμεσα στους 10, και να πετύχει ένα λαχνό που κερδίζει, ενώ ο δεύτερος να επιλέξει 2 λαχνούς ανάμεσα σε 8 λαχνούς που περιέχουν ένα που κερδίζει και να μην τον βρει. Άρα,

$$p_{XY}(1, 0) = \frac{2 \times 8 \times \binom{7}{2}}{\binom{10}{2}\binom{8}{2}} = \frac{4}{15}.$$

Η $p_{XY}(1, 1)$ ισούται με την πιθανότητα να επιλέξει ο πρώτος παίκτης 2 λαχνούς ανάμεσα στους 10, και να πετύχει ένα λαχνό που κερδίζει, ενώ ο δεύτερος να επιλέξει ανάμεσα σε 8 λαχνούς που περιέχουν ένα που κερδίζει και να τον βρει. Άρα,

$$p_{XY}(1, 1) = \frac{2 \times 8 \times 1 \times 7}{\binom{10}{2}\binom{8}{2}} = \frac{4}{45}.$$

Συγκεντρωτικά, έχουμε τον πίνακα

x / y	0	1	2
0	$15/45$	$12/45$	$1/45$
1	$12/45$	$4/45$	0
2	$1/45$	0	0

(β΄) Με χρήση του πίνακα, βρίσκουμε πως

$$\begin{aligned} P(A) &= p_{XY}(1,1) + p_{XY}(2,0) + p_{XY}(0,2) = \frac{4}{45} + \frac{1}{45} + \frac{1}{45} = \frac{2}{15}, \\ P(B) &= p_{XY}(2,0) + p_{XY}(0,2) = \frac{1}{45} + \frac{1}{45} = \frac{2}{45}. \end{aligned}$$

Έχοντας την από κοινού μάζα, εύκολα βρίσκουμε πως

$$\begin{aligned} p_X(0) &= p_{XY}(0,0) + p_{XY}(0,1) + p_{XY}(0,2) = \frac{28}{45}, \\ p_X(1) &= p_{XY}(1,0) + p_{XY}(1,1) + p_{XY}(1,2) = \frac{16}{45}, \\ p_X(2) &= p_{XY}(2,0) + p_{XY}(2,1) + p_{XY}(2,2) = \frac{1}{45}, \end{aligned}$$

ενώ λόγω συμμετρίας

$$p_Y(0) = \frac{28}{45}, \quad p_Y(1) = \frac{16}{45}, \quad p_Y(2) = \frac{1}{45}.$$

Άρα,

$$E(X) = E(Y) = 0 \times \frac{28}{45} + 1 \times \frac{16}{45} + 2 \times \frac{1}{45} = \frac{2}{5},$$

και

$$\mathrm{COV}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{4}{45} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = -\frac{16}{225}.$$

14. **(Το πρόβλημα του συλλέκτη κουπονιών)** Υποθέτουμε ότι υπάρχουν n είδη διαφορετικών κουπονιών, και κάθε φορά που κάποιος αγοράζει ένα κουπόνι, αυτό μπορεί να είναι ισοπίθανα οποιοδήποτε από τα n διαφορετικά είδη. Ποια είναι η μέση τιμή του αριθμού κουπονιών που πρέπει να αγοράσει κανείς ώστε να έχει συλλέξει ένα κουπόνι από κάθε είδος;

Λύση: Έστω X ο αριθμός των απαιτούμενων δοκιμών ώσπου να δούμε και τα n διαφορετικά κουπόνια, και για $i = 1, 2, \ldots, n$, έστω X_i ο αριθμός των δοκιμών που απαιτείται από την στιγμή που έχουμε δει $i-1$ διαφορετικά κουπόνια μέχρι την στιγμή που θα δούμε ένα νέο διαφορετικό από τα προηγούμενα. Η X_i είναι γεωμετρική τυχαία μεταβλητή με παράμετρο $p_i = (n-(i-1))/n$, και επομένως με μέση τιμή $1/p_i = n/(n-i+1)$. Επειδή $X = X_1 + \cdots + X_n$, η γραμμικότητα της μέσης τιμής δίνει

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n-i+1} = n \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \simeq n \log n.$$

Η τελευταία προσεγγιστική ισότητα ισχύει για μεγάλα n, λόγω της διπλής ανισότητας

$$\log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \log n.$$

Και τα δύο σκέλη μπορούν να αποδειχτούν αν συγκρίνετε την $f(x) = 1/x$ με κατάλληλα ορισμένη κλιμακωτή συνάρτηση και πάρετε το ολοκλήρωμα από 1 έως n. Το άθροισμα είναι γνωστό ως αρμονική σειρά.

15. **(Η μέθοδος του ανεμιστήρα)** Ένας διδάσκων διορθώνει γραπτά τελικών εξετάσεων Πιθανοτήτων με τη μέθοδο του ανεμιστήρα. Συγκεκριμένα, αφήνει κάθε γραπτό μπροστά από ένα ανεμιστήρα. Το γραπτό πέφτει στο πάτωμα σε απόσταση X από τον διδάσκοντα, που μοντελοποιείται ως Τ.Μ. με την ακόλουθη πυκνότητα:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{v} e^{-x/v}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Η τιμή v είναι μια παράμετρος που εξαρτάται από την ένταση του ανεμιστήρα. Αν $X \geq 10$, τότε ο βαθμός Y που λαμβάνει ο φοιτητής είναι 10. Αλλιώς, ο βαθμός που λαμβάνει ο φοιτητής είναι το ακέραιο μέρος $\lfloor X \rfloor$ του X, δηλαδή ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος ή ίσος του X. Επομένως, δεν επιτρέπονται ημιακέραιοι βαθμοί. Ο φοιτητής περνά το μάθημα αν πάρει βαθμό 5 και άνω.

(α΄) Αν ο διδάσκων θέλει να περάσει ακριβώς το 10% των φοιτητών, πόση πρέπει να είναι η τιμή του v;

(β΄) Να δώσετε μια μαθηματική έκφραση για την πιθανότητα $P(Y = k)$, για κάθε ένα $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$.

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως ένας φοιτητής θα περάσει αν και μόνο αν $Y \geq 5$, επομένως απαιτούμε

$$\int_5^\infty \frac{1}{v} e^{-x/v}\, dx = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \int_5^\infty \left(-e^{-x/v}\right)'\, dx = \frac{1}{10} \Leftrightarrow 0 + e^{-5/v} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow -\frac{5}{v} = -\log 10 \Leftrightarrow v = \frac{5}{\log 10} \simeq 2.1715.$$

(β΄) Ειδικά για την περίπτωση $k = 10$, έχουμε

$$P(Y = 10) = \int_{10}^\infty \frac{1}{v} e^{-x/v}\, dx = \int_{10}^\infty \left(-e^{-x/v}\right)'\, dx = e^{-10/v}.$$

Στις περιπτώσεις $k = 0, 1, \ldots, 9$, έχουμε

$$P(Y = k) = \int_k^{k+1} \frac{1}{v} e^{-x/v}\, dx = \int_k^{k+1} \left(-e^{-x/v}\right)'\, dx = e^{-k/v} - e^{-(k+1)/v}.$$

Σχετικά με τη μέση τιμή της άνω Τ.Μ. Y, κατά τα γνωστά από τον ορισμό της μέσης τιμής διακριτών Τ.Μ., έχουμε

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{10} kP(Y = k) = \sum_{k=1}^{9} k \left[e^{-k/v} - e^{-(k+1)/v}\right] + 10 \left[e^{-10/v}\right].$$

16. **(Delivery)** Είστε στο σπίτι σας και εσείς και οι καλεσμένοι σας έχετε παραγγείλει κοτόπουλο από το εστιατόριο A και πίτσα από το εστιατόριο B. Θεωρήστε ότι δώσατε και τις δύο παραγγελίες την ίδια χρονική στιγμή. Ο χρόνος παράδοσης είναι τυχαίος και ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο 30 για το εστιατόριο A και την εκθετική κατανομή με παράμετρο 20 για το εστιατόριο B. (Οι χρόνοι αυτοί θεωρήστε ότι είναι ανεξάρτητοι.)

(α΄) Πόσο θα περιμένετε κατά μέσο όρο μέχρι να αρχίσετε το γεύμα σας; Για λόγους ευγένειας αρχίζετε το γεύμα μόλις παραδοθούν και οι δύο παραγγελίες. *(Υπόδειξη: εάν X_A, X_B οι χρόνοι παράδοσης από τα εστιατόρια A και B αντίστοιχα, πρώτα βρείτε τη συνάρτηση κατανομής της* $\max(X_A, X_B)$*, έπειτα την πυκνότητα και τέλος υπολογίστε τη μέση τιμή.)*

(β΄) Εάν δεν περιμένετε και τις δύο παραγγελίες για να αρχίσετε το γεύμα, πόσος κατά μέσο όρο χρόνος θα περάσει μέχρι να φάνε οι «τυχεροί» των οποίων η παραγγελία παραδίδεται πρώτη;

Λύση:

(α΄) Εάν $F(x)$ είναι η συνάρτηση κατανομής του μέγιστου χρόνου $X = \max(X_A, X_B)$ τότε

$$\begin{aligned} F(x) &= P(\max(X_A, X_B) \leq x) = P(X_A \leq x, X_B \leq x) = P(X_A \leq x)P(X_B \leq x) \\ &= (1 - e^{-x/30})(1 - e^{-x/20}) = 1 - e^{-x/30} - e^{-x/20} + e^{-x/12}, \end{aligned}$$

όπου η τρίτη ισότητα προκύπτει από την ανεξαρτησία των X_A, X_B. Άρα η πυκνότητα $f(x)$ της X είναι

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{30} e^{-x/30} + \frac{1}{20} e^{-x/20} - \frac{1}{12} e^{-x/12}.$$

Συνεπώς η μέση τιμή είναι

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^\infty x f(x) dx = \int_0^\infty \frac{x}{30} e^{-x/30} dx + \int_0^\infty \frac{x}{20} e^{-x/20} dx - \int_0^\infty \frac{x}{12} e^{-x/12} dx \\ &= 30 + 20 - 12 = 38. \end{aligned}$$

Το ολοκληρώματα προκύπτουν παρατηρώντας πως ισούνται με τις μέσες τιμές εκθετικών Τ.Μ. με παραμέτρους 30, 20, και 12 αντιστοίχως.

(β΄) Σε αυτή την περίπτωση θέλουμε να βρούμε τη μέση τιμή του πιο σύντομου χρόνου $\min(X_A, X_B)$. Πρώτα υπολογίζουμε τη συνάρτηση κατανομής:

$$\begin{aligned} P(\min(X_A, X_B) \leq x) &= 1 - P(\min(X_A, X_B) > x) = 1 - P(X_A > x, X_B > x) \\ &= 1 - P(X_A > x)P(X_B > x) = 1 - e^{-x/30} e^{-x/20} = 1 - e^{x/12}. \end{aligned}$$

Άρα ο πιο σύντομος χρόνος έχει εκθετική κατανομή με παράμετρο 12, και επομένως η μέση τιμή του είναι 12.

17. **(Δύο εξετάσεις)** Ένας υποψήφιος για εισαγωγή σε μια στρατιωτική σχολή πρέπει να δώσει δύο εξετάσεις, μια φυσικών ικανοτήτων και μια νοητικών ικανοτήτων. Έστω X, Y τα αποτελέσματα στις δύο εξετάσεις, όπου, λόγω κανονικοποίησης, δίνεται ότι $0 \leq X, Y \leq \pi/2$. Έστω πως η από κοινού πυκνότητα πιθανότητας των δύο εξετάσεων είναι η ακόλουθη:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\cos(x-y), & 0 \leq x, y \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(α΄) Υπολογίστε τις περιθώριες πυκνότητες $f_X(x)$, $f_Y(y)$.

(β΄) Είναι οι X, Y, ανεξάρτητες;

(γ΄) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(\pi/4 \leq X, Y \leq \pi/2)$.

Λύση: Αν και δεν ζητείται να το δείξετε, παρατηρήστε πως, όπως πρέπει, το ολοκλήρωμα της από κοινού πυκνότητας είναι μονάδα:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f_{XY}(x,y)\,dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos(x-y)\,dx \right) dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(\sin(x-y))'\,dx \right) dy \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin(\frac{\pi}{2}-y) + \sin y \right) dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y\,dy = [-\cos y]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1. \end{aligned}$$

Στην τέταρτη ισότητα σπάσαμε το ολοκλήρωμα στα δύο, και εφαρμόσαμε στο πρώτο την αλλαγή μεταβλητής $x \to \frac{\pi}{2} - x$.

(α΄) Κατά τα γνωστά από τη θεωρία:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos(x-y)\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\sin(x-y)\right)'\,dy \\ &= \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sin(x-\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x). \end{aligned}$$

Λόγω συμμετρίας, αμέσως προκύπτει πως επιπλέον θα έχουμε

$$f_Y(y) = \frac{1}{2}(\sin y + \cos y).$$

(β΄) Για να είναι οι X, Y ανεξάρτητες, θα πρέπει $f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$, για κάθε $x, y \in [0, \pi/2]$. Η ισότητα όμως,δεν ισχύει για πολλά ζεύγη, για παράδειγμα όταν $x = y = 0$, οπότε

$$f_{XY}(0,0) = \frac{1}{2}\cos(0-0) = \frac{1}{2}, \qquad f_X(0) = f_Y(0) = \frac{1}{2}\times 0 + \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2},$$

και $f_{XY}(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$.

(γ΄) Κατά τα γνωστά από τη θεωρία:

$$\begin{aligned} P(\pi/4 \leq X, Y \leq \pi/2) &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\int_{\pi/4}^{\pi/2} f_{XY}(x,y)\,dx \right) dy = \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \Big[\sin(x-y) \Big]_{\pi/4}^{\pi/2} dy \\ &= \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \left[\sin(\pi/2-y) - \sin(\pi/4-y))\right] dy = \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \left[\sin y - \cos(\pi/4-y)\right]' dy \\ &= \frac{1}{2}\left(\sin(\pi/2) - \sin(\pi/4) - \cos(\pi/4) + \cos 0\right) = 1 - \sqrt{2}/2. \end{aligned}$$

18. **(Wololo)** Κάθε μοναχός έχει την ικανότητα να προσηλυτίζει έναν ιππότη μετά από κατήχηση διάρκειας X η οποία είναι συνεχής Τ.Μ. με πυκνότητα

$$f_X(x) = \begin{cases} (x-2)/2, & x \in [2,4], \\ 0, & x \notin [2,4]. \end{cases}$$

(α΄) Ποια είναι η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας $F_X(x)$ και η μέση τιμή $E(X)$ της X;

(β΄) Πέντε μοναχοί επιχειρούν να προσηλυτίσουν ένα ιππότη, και οι χρόνοι κατήχησης που απαιτούνται για τον καθένα είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους και ακολουθούν την πυκνότητα του προηγούμενου σκέλους. Οι κατηχήσεις και των 5 ξεκινάνε ταυτόχρονα. Έστω Y ο χρόνος μεταξύ της έναρξης της κατήχησης και του πρώτου προσηλυτισμού. Ποια είναι η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας του Y;

Λύση:

(α΄) Σχετικά με την κατανομή $F_X(x)$, παίρνουμε περιπτώσεις. Αν $x < 2$, τότε

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0.$$

Αν $2 \leq x \leq 4$, τότε

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{2}^{x} \frac{t-2}{2}\,dt = \left.\frac{(t-2)^2}{4}\right|_2^x = \frac{(x-2)^2}{4}.$$

Τέλος, αν $x > 4$, τότε

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{2}^{4} \frac{t-2}{2}\,dt = \left.\frac{(t-2)^2}{4}\right|_2^4 = 1.$$

Συγκεντρωτικά,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2, \\ \frac{(x-2)^2}{4}, & 2 \leq x \leq 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Σχετικά με τη μέση τιμή, έχουμε

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_{2}^{4} x(x-2)/2\,dx = \int_{2}^{4} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2}\right)' dx = \frac{64}{6} - 8 - \frac{8}{6} + 2 = \frac{10}{3}.$$

(β΄) Έστω X_i, $i = 1, \ldots, 5$ οι χρόνοι που χρειάζονται οι 5 μοναχοί για να επιτύχουν προσηλυτισμό. Από την υπόθεση τα X_i είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και έχουν την κατανομή του X του προηγούμενου σκέλους. Παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = 1 - P(Y > y) = 1 - P(X_1 > y,\ X_2 > y, \ldots, X_5 > y) \\ &= 1 - [P(X > y)]^5 = 1 - [1 - F_X(y)]^5 = \begin{cases} 0, & y < 2, \\ 1 - \left(1 - \frac{(y-2)^2}{4}\right)^5, & 2 \leq y \leq 4, \\ 1, & y > 4. \end{cases} \end{aligned}$$

19. **(Καρέκλες)** Στο πανηγύρι του Σωτήρος του Ζυγοβιστίου ο έφορος της εκκλησίας φροντίζει για την προμήθεια καρεκλών. Ο έφορος γνωρίζει ότι υπάρχουν 1000 Ζυγοβιστινοί, καθένας εκ των οποίων θα επισκεφθεί το πανηγύρι ανεξάρτητα από τους άλλους, με πιθανότητα $\frac{1}{2}$. Πόσες καρέκλες πρέπει να προμηθευτεί ο έφορος, ώστε η πιθανότητα να έχουν όλοι όσοι έρθουν καρέκλα να υπερβαίνει το 99%; Αρκεί να δώσετε μια μαθηματική έκφραση, χωρίς να υπολογίσετε ακριβή τιμή.

Λύση: Έστω οι 1000 Τ.Μ. Bernoulli X_i, $i = 1, \ldots, 1000$, τέτοιες ώστε $X_i = 1$ αν έρθει ο i-οστός Ζυγοβιστινός, και $X_i = 0$ αν δεν έρθει. Έχουμε $E(X_i) = \mu = \frac{1}{2}$ και $\mathrm{VAR}(X_i) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ επομένως η τυπική απόκλιση των X_i ισούται με $\sigma = \sqrt{\mathrm{VAR}(X_i)} = \frac{1}{2}$.

Έστω πως ο έφορος της εκκλησίας προμηθεύεται K καρέκλες. Τότε, η πιθανότητα να μην επαρκούν οι καρέκλες ισούται με

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{1000} X_i > K\right) &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{1000} X_i - 1000\mu}{\sqrt{1000}\sigma} > \frac{K - 1000\mu}{\sqrt{1000}\sigma}\right) \\ &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{1000} X_i - 1000 \times \frac{1}{2}}{\sqrt{1000} \times \frac{1}{2}} > \frac{K - 1000 \times \frac{1}{2}}{\sqrt{1000} \times \frac{1}{2}}\right) \\ &= P\left(Z > \frac{K - 500}{5\sqrt{10}}\right) \simeq 1 - \Phi\left(\frac{K-500}{5\sqrt{10}}\right). \end{aligned}$$

Η τελευταία προσεγγιστική ισότητα προκύπτει από το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα. Ο αριθμός K πρέπει να ικανοποιεί την ανισότητα

$$1 - \Phi\left(\frac{K-500}{5\sqrt{10}}\right) < 0.01 \Leftrightarrow \Phi^{-1}(0.99) < \frac{K-500}{5\sqrt{10}} \Leftrightarrow K > 500 + 5\sqrt{10}\Phi^{-1}(0.99) \Leftrightarrow K > 536.78,$$

και επειδή το K πρέπει να είναι ακέραιο, προκύπτει ότι ο έφορος πρέπει να αγοράσει 537 καρέκλες. Στην πρώτη ισοδυναμία χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η συνάρτηση Φ, άρα και η αντίστροφή της Φ^{-1}, είναι γνησίως αύξουσες.

Μία ελαφρώς καλύτερη προσέγγιση θα μπορούσε να γίνει αν αρχικά προσεγγίζαμε την $P\left(\sum_{i=1}^{1000} X_i > K + \frac{1}{2}\right)$. (Μπορείτε να καταλάβετε γιατί;) Θα προέκυπτε τότε ότι $K + \frac{1}{2} > 536.78 \Leftrightarrow K > 536.28$, επομένως και πάλι $K = 537$.

Χωρίς την προσέγγιση, αλλά με χρήση υπολογιστή, προκύπτει πως πράγματι ο $K = 537$ είναι ο μικρότερος ακέραιος για τον οποίο η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας μιας διωνυμικής με παραμέτρους N και p υπερβαίνει το 0.99. Επομένως, στο συγκεκριμένο πρόβλημα το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα δεν εισήγαγε κάποιο σφάλμα.

20. **(Καρπούζια)** Ένα ανοιχτό φορτηγάκι μπορεί να αντέξει συνολικά 3000 κιλά φορτίου πριν πάθει βλάβη. Το βάρος κάθε καρπουζιού από μια καλλιέργεια είναι Τ.Μ. με μέση τιμή 15 κιλά και τυπική απόκλιση 1 κιλό. Έστω N_0 το μέγιστο πλήθος των καρπουζιών που μπορούμε να φορτώσουμε στο φορτηγάκι ώστε η πιθανότητα να υπερβεί το βάρος τους τα 3000 κιλά να είναι μικρότερη από 10^{-4}. Βρείτε μια συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί το N_0. Η συνθήκη μπορεί να εμφανίζει τη συνάρτηση $\Phi(\cdot)$.

Λύση: Το N_0 είναι ο μέγιστος ακέραιος N για τον οποίο ισχύει το ακόλουθο:

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{n=1}^{N} X_n > 3000\right) < 10^{-4} \Leftrightarrow P\left(\sum_{n=1}^{N} X_n \leq 3000\right) > 1 - 10^{-4} \\ \Leftrightarrow P\left(\frac{\sum_{n=1}^{N} X_n - 15N}{\sqrt{N}} \leq \frac{3000 - 15N}{\sqrt{N}}\right) > 1 - 10^{-4} \Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{3000 - 15N}{\sqrt{N}}\right) > 1 - 10^{-4} \\ \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{3000 - 15N}{\sqrt{N}}\right) > 1 - 10^{-4} \Leftrightarrow \frac{3000 - 15N}{\sqrt{N}} > \Phi^{-1}(1 - 10^{-4}), \end{aligned}$$

όπου η Τ.Μ. Z είναι, σύμφωνα με το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα, τυπική κανονική Τ.Μ. Η τελευταία ισοδυναμία προκύπτει από το ότι η $\Phi(\cdot)$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση.

Παρατηρήστε ότι το αριστερό σκέλος της τελευταίας ανισότητας, όταν $N \in \mathbb{R}$ και $N > 0$, είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του N, έχει όριο το ∞ για $N \to 0^+$ και όριο το $-\infty$ για $N \to \infty$. Επομένως, πράγματι, όπως αναμενόταν από τη διαίσθησή μας, η συνθήκη ικανοποιείται για όλα τα θετικά ακέραια N μέχρι κάποιο μέγιστο ακέραιο N_0.

Ακολούθως, θα βρούμε το N_0. Θέτουμε $a = \Phi^{-1}(1 - 10^{-4})$, $X = \sqrt{N}$ και λύνουμε την εξίσωση

$$\begin{aligned} \frac{3000 - 15X^2}{X} = a \Leftrightarrow 3000 - 15X^2 = aX \Leftrightarrow 15X^2 + aX - 3000 = 0 \\ \Leftrightarrow X = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4 \times 15 \times 3000}}{30} \Leftrightarrow X = 14.0187 \Leftrightarrow N = 196.52. \end{aligned}$$

Στην τέταρτη ισοδυναμία χρησιμοποιήσαμε το ότι το $a = \Phi^{-1}(1 - 10^{-4}) \simeq 3.7190$ (όπως προκύπτει με χρήση πινάκων ή Η/Υ) και το ότι το $X > 0$.

Επειδή το N είναι ακέραιο, προκύπτει το πασίγνωστο εμπειρικό αποτέλεσμα ότι μπορούμε να φορτώσουμε μέχρι 196 καρπούζια ένα φορτηγάκι χωρίς η πιθανότητα βλάβης να υπερβεί το 10^{-4}.

3η Ομάδα Ασκήσεων

21. **(Δεσμευμένη πιθανότητα)** Έστω συνεχείς τυχαίες μεταβλητές X, Y με από κοινού πυκνότητα πιθανότητας

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{x}{y}} e^{-y}}{y}, & 0 < x, y < \infty, \\ 0, & \text{αλλού}. \end{cases}$$

Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X > 1 | Y = y)$.

Λύση: Καταρχήν υπολογίζουμε την υπό συνθήκη πυκνότητα πιθανότητας της X, με δεδομένο ότι $Y = y$:

$$f_X(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{e^{-\frac{x}{y}} e^{-y}/y}{e^{-y} \int_0^\infty \frac{1}{y} e^{-\frac{x}{y}}\, dx} = \frac{e^{-\frac{x}{y}}}{y}.$$

Συνεπώς,

$$P(X > 1 | Y = y) = \int_1^\infty \frac{e^{-\frac{x}{y}}}{y}\, dx = -\left[e^{-\frac{x}{y}}\right]_1^\infty = e^{-\frac{1}{y}}.$$

22. **(Έλλειψη μνήμης)** Έστω τυχαία μεταβλητή X, κατανεμημένη εκθετικά, με παράμετρο λ:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

(α΄) Βρείτε την $F_X(x|X > t)$. Πως ακριβώς διαφέρει η $F_X(x|X > t)$ από την $F_X(x)$?

(β΄) Βρείτε την $f_X(x|X > t)$.

(γ΄) Δείξτε ότι $P(X > t + x|X > t) = P(X > x)$. Εξηγήστε γιατί αυτή η ιδιότητα αποκαλείται η ιδιότητα της *έλλειψης μνήμης*.

Λύση:

(α΄)

$$F_X(x|X > t) = P(X \leq x|X > t) = \frac{P(\{X \leq x\} \cap \{X > t\})}{P(X > t)} = \frac{P(t < X \leq x)}{P(X > t)}.$$

Όμως

$$\begin{aligned} P(X > t) &= \int_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = e^{-\lambda t}, \\ P(t < X \leq x) &= \begin{cases} \int_t^x \lambda e^{-\lambda y}\, dy = e^{-\lambda t} - e^{-\lambda x}, & x \geq t, \\ 0, & x < t. \end{cases} \end{aligned}$$

Συνδιάζοντας τα άνω, προκύπτει πως:

$$F_X(x|X > t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda(x-t)}, & x \geq t, \\ 0, & x < t. \end{cases}$$

Η $F_X(x|X > t)$ έχει την ίδια μορφή με την $F_X(x)$, με τη διαφορά ότι είναι μετατοπισμένη προς τα δεξιά κατά t.

(β΄)

$$f_X(x|X > t) = \frac{dF_X(x|X > t)}{dx} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-t)}, & x \geq t, \\ 0, & x < t. \end{cases}$$

Η $f_X(x|X > t)$ έχει την ίδια μορφή με την $f_X(x)$, με τη διαφορά ότι είναι μετατοπισμένη προς τα δεξιά κατά t.

(γ΄) Καταρχήν παρατηρούμε ότι η ιδιότητα είναι προφανής αν $x \leq 0$. Η ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι όταν $x > 0$:

$$P(X > t + x|X > t) = 1 - F_X(t + x|X > t) = e^{-\lambda(t+x-t)} = e^{-\lambda x} = P(X > x).$$

Για να κατανοήσουμε την φυσική σημασία της ιδιότητας, ας υποθέσουμε ότι η X είναι η ηλικία ενός ατόμου. Σύμφωνα με την ιδιότητα, αν κάποιος μας πει ότι το άτομο έχει ήδη ζήσει t χρόνια, τότε η πιθανότητα να ζήσει τουλάχιστον άλλα x είναι ίδια με την πιθανότητα που θα δίναμε για να ζήσει τουλάχιστον x χρόνια στην αρχή της ζωής του, και δεν εξαρτάται από τα χρόνια t που έχει ζήσει. Συνεπώς, το άτομο έχει απώλεια μνήμης σχετικά με την ηλικία του.

23. **(Εξαρτημένες γκαουσιανές μεταβλητές)** Έστω η από κοινού κατανομή πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών X και Y

$$f_{X,Y}(x, y) = c\, e^{-(x^2+2xy+2y^2)}, \quad x, y \in R,$$

όπου $c > 0$ γνωστή σταθερά. Προσδιορίστε τη δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας $f_{X|Y}(x|y)$. Ποια κατανομή προκύπτει? Είναι οι X, Y ανεξάρτητες? *(Υπόδειξη: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+y)^2}\, dx = \sqrt{\pi}$.)*

Λύση: Έχουμε

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dx \\ &= c\, e^{-y^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+y)^2}\, dx \\ &= c\, e^{-y^2} \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{1}{2}}}\, e^{-\frac{(x-(-y))^2}{2\frac{1}{2}}}\, dx \\ &= c\, \sqrt{\pi}\, e^{-y^2}, \quad y \in R. \end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα προκύπτει αν παρατηρήσουμε ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας γκαουσιανής τυχαίας μεταβλητής με μέση τιμή $-y$ και διασπορά $\frac{1}{2}$. Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να είχαμε χρησιμοποιήσει την υπόδειξη. Ακολούθως έχουμε:

$$f_{X|Y}(x|y) \quad = \quad \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-(x+y)^2}, \quad x,y \in R,$$

δηλαδή η δεσμευμένη κατανομή της X δοθέντος ότι $Y \simeq y$, είναι γκαουσιανή με μέση τιμή $-y$ και διασπορά $\frac{1}{2}$. Οι X, Y δεν είναι ανεξάρτητες, καθώς η δεσμευμένη κατανομή $f_{X|Y}(x|y)$ εξαρτάται από την τιμή του y.

24. **(Υπολογισμός δεσμευμένων πυκνοτήτων)** Η από κοινού πυκνότητα πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών X και Y είναι

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2, & 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(α΄) Υπολογίστε τη δεσμευμένη πυκνότητα πιθανότητας $f_{X|Y}(x,y)$, για $0 < x, y < 1$.

(β΄) Υπολογίστε τη δεσμευμένη πυκνότητα πιθανότητας $f_{Y|X}(y,x)$, για $0 < x, y < 1$.

(γ΄) Υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα $P\left[\frac{1}{3} < Y \leq \frac{1}{2}|X \simeq \frac{2}{3}\right]$.

(δ΄) Είναι οι X, Y ανεξάρτητες?

Λύση:

(α΄)

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{2}{\int_y^1 f_{X,Y}(x,y)\,dx} = \frac{2}{2(1-y)} = \frac{1}{1-y}, & y < x < 1, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(β΄) Όμοια

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < y < x, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(γ΄) Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο σκέλος,

$$P(\frac{1}{3} < Y \leq \frac{1}{2}|X \simeq \frac{2}{3}) = \frac{3}{2}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} dy = \frac{1}{4}.$$

(δ΄) Οι X, Y δεν είναι ανεξάρτητες, καθώς η $f_{X|Y}(x|y)$ εξαρτάται από το y και αντιστρόφως.

25. **(Υπολογισμός δεσμευμένων μαζών)** Βρείτε τις δεσμευμένες συναρτήσεις μάζας πιθανότητας της Y δεδομένου ότι $X = -1$, για τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις.

	X		
Y	-1	0	1
-1	$1/6$	0	$1/6$
0	0	$1/3$	0
1	$1/6$	0	$1/6$

	X		
Y	-1	0	1
-1	$1/9$	$1/9$	$1/9$
0	$1/9$	$1/9$	$1/9$
1	$1/9$	$1/9$	$1/9$

	X		
Y	-1	0	1
-1	0	0	$1/3$
0	0	$1/3$	0
1	$1/3$	0	0

Λύση: Χρησιμοποιούμε τον ορισμό $p_{Y|X}(y|x) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_X(x)}$ και έχουμε:

(α΄) $p_{Y|X}(-1|-1) = \frac{1/6}{1/3} = \frac{1}{2}$, $p_{Y|X}(0|-1) = \frac{0}{1/3} = 0$, $p_{Y|X}(1|-1) = \frac{1/6}{1/3} = \frac{1}{2}$.

(β΄) $p_{Y|X}(-1|-1) = \frac{1/9}{1/3} = \frac{1}{3}$, $p_{Y|X}(0|-1) = \frac{1/9}{1/3} = \frac{1}{3}$, $p_{Y|X}(1|-1) = \frac{1/9}{1/3} = \frac{1}{3}$.

(γ΄) $p_{Y|X}(-1|-1) = \frac{0}{1/3} = 0$, $p_{Y|X}(0|-1) = \frac{0}{1/3} = 0$, $p_{Y|X}(1|-1) = \frac{1/3}{1/3} = 1$.

26. **(n ταμίες)** Ένας πελάτης μπαίνει σε ένα κατάστημα και εξυπηρετείται από τον ταμεία I, όπου $I = i$ με πιθανότητα p_i και $i = 1, \ldots, n$. Ο χρόνος που χρειάζεται ο ταμίας i για να ολοκληρώσει την εξυπηρέτηση είναι μια εκθετικά κατανεμημένη τυχαία μεταβλητή με παράμετρο (ρυθμό) α_i.

(α΄) Βρείτε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του χρόνου T που χρειάζεται ένας πελάτης για να εξυπηρετηθεί *(Υπόδειξη: Θα έχει τη μορφή αθροίσματος)*.

(β΄) Βρείτε την $E[T]$ και την $\mathrm{VAR}[T]$. *(Υποδείξεις: Δεν χρειάζεστε το προηγούμενο σκέλος. Η τιμή της $E[T]$ είναι διαισθητικά προφανής. Για τον υπολογισμό της $\mathrm{VAR}[T]$, χρησιμοποιήστε τη σχέση $\mathrm{VAR}[T] = E[T^2]-(E[T])^2$.)*

Λύση: Η άσκηση δίνει πως:

$$f_{T|I}(t|i) = \begin{cases} a_i e^{-a_i t}, & t \geq 0, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(α΄)

$$f_T(t) = \sum_{i=1}^{n} p_i f_{T|I}(t|i) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} p_i a_i e^{-a_i t}, & t \geq 0, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(β΄)

$$\begin{aligned} E[T] &= \sum_{i=1}^{n} p_i E[T|I=i] = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{a_i}, \\ E[T^2] &= \sum_{i=1}^{n} p_i E[T^2|I=i] = \sum_{i=1}^{n} \frac{2p_i}{a_i^2}, \\ \mathrm{VAR}[T] &= E[T^2]-(E[T])^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{2p_i}{a_i^2} - \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{a_i}\right]^2. \end{aligned}$$

27. **(Τυχαία μεταβλητή με παράμετρο άλλη τυχαία μεταβλητή)** Ο αριθμός των ελαττωμάτων N σε ένα ολοκληρωμένο κύκλωμα VLSI είναι τυχαία μεταβλητή Poisson με παράμετρο R. Η παράμετρος R, με τη σειρά της, είναι τυχαία μεταβλητή Γάμμα, με παραμέτρους α και λ. (Συνεπώς, κατά τα γνωστά για την κατανομή Γάμμα, $E[R] = \frac{\alpha}{\lambda}$, $E[R^2] = \frac{\alpha}{\lambda^2} + \frac{\alpha^2}{\lambda^2}$.)

(α΄) Να βρεθεί η συνάρτηση μάζας πιθανότητας του αριθμού των ελαττωμάτων N.

(β΄) Χρησιμοποιήστε γνωστές σχέσεις για την υπό συνθήκη μέση τιμή για να υπολογίσετε τις $E[N]$ και $\mathrm{Var}[N]$. *(Υπόδειξη: $\mathrm{VAR}[N] = E[N^2] - (E[N])^2$.)*

Λύση: Εξ υποθέσεως $p_{N|R}(n|r) = \frac{r^n}{n!}e^{-r}$, όπου n μη αρνητικός ακέραιος. Επιπλέον, $f_R(r) = \frac{\lambda(\lambda r)^{a-1}e^{-\lambda r}}{\Gamma(a)}$ για $r \geq 0$ και $f_R(r) = 0$ για $r < 0$.

(α΄)

$$p_N(n) = \int_0^\infty p_{N|R}(n|r) f_R(r)\,dr = \int_0^\infty \frac{r^n}{n!}e^{-r}\frac{\lambda(\lambda r)^{a-1}e^{-\lambda r}}{\Gamma(a)}\,dr =$$

$$\frac{\lambda^a}{n!\Gamma(a)}\int_0^\infty r^{n+a-1}e^{-(\lambda+1)r}\,dr = \frac{\lambda^a\Gamma(n+a)}{(\lambda+1)^{n+a}n!\Gamma(a)}\int_0^\infty \frac{(\lambda+1)^{n+a}r^{n+a-1}e^{-(\lambda+1)r}}{\Gamma(n+a)}\,dr = \frac{\lambda^a\Gamma(n+a)}{(\lambda+1)^{n+a}n!\Gamma(a)}.$$

Η τελευταία ισότητα προκύπτει από το ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι η πυκνότητα πιθανότητας Γάμμα, με παραμέτρους $n+a$ και $\lambda+1$.

(β΄)

$$\begin{aligned} E[N] &= \int_0^\infty E[N|R=r] f_R(r)\,dr = \int_0^\infty r f_R(r)\,dr = E[R] = \frac{a}{\lambda}, \\ E[N^2] &= \int_0^\infty E[N^2|R=r] f_R(r)\,dr = \int_0^\infty (r+r^2) f_R(r)\,dr = E[R] + E[R^2] = \frac{a}{\lambda} + \frac{a}{\lambda^2} + \frac{a^2}{\lambda^2}, \\ \mathrm{VAR}[N] &= E[N^2] - (E[N])^2 = \frac{a}{\lambda} + \frac{a}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

28. **(Άλλη μια τυχαία μεταβλητή με παράμετρο μια άλλη τυχαία μεταβλητή)** Η διάρκεια ζωής X μιας συσκευής είναι εκθετικά κατανεμημένη με μέση τιμή $\frac{1}{R}$. Υποθέτουμε ότι λόγω μη προβλέψιμων ανωμαλιών στην διαδικασία παραγωγής, η παράμετρος R είναι επίσης τυχαία, και ακολουθεί την κατανομή Γάμμα.

(α΄) Βρείτε την από κοινού πυκνότητα πιθανότητας των X και R.

(β΄) Βρείτε την πυκνότητα πιθανότητα της X.

(γ΄) Βρείτε τη μέση τιμή και την διασπορά της X, χωρίς να κάνετε χρήση του προηγούμενου σκέλους.

Λύση: Η άσκηση μας δίνει πως

$$f_{X|R}(x|r) = \begin{cases} re^{-r}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{αλλού}, \end{cases} \quad f_R(r) = \begin{cases} \frac{\lambda(\lambda r)^{a-1}e^{-\lambda r}}{\Gamma(a)}, & r \geq 0, \\ 0, & \text{αλλού}. \end{cases}$$

(α΄)

$$f_{X,R}(x,r) = f_{X|R}(x|r)f_R(r) = \begin{cases} re^{-rx}\frac{\lambda(\lambda r)^{a-1}e^{-\lambda r}}{\Gamma(a)}, & x, r \geq 0, \\ 0, & \text{αλλού}. \end{cases}$$

(β΄) Για $x < 0$ προφανώς $f_X(x) = 0$. Για $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^\infty re^{-rx}\frac{\lambda(\lambda r)^{a-1}e^{-\lambda r}}{\Gamma(a)}\,dr = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\int_0^\infty r^a e^{-r(x+\lambda)}\,dr \\ &= \frac{\lambda^a\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)(x+\lambda)^{a+1}} = \frac{\lambda^a a\Gamma(a)}{\Gamma(a)(x+\lambda)^{a+1}} = \frac{a\lambda^a}{(x+\lambda)^{a+1}}. \end{aligned}$$

Στην τέταρτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τη γνωστή ιδιότητα $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(γ΄)

$$E[X] = \int_0^\infty E[X|R=r]f_R(r)\,dr = \int_0^\infty \frac{1}{r}\frac{\lambda(\lambda r)^{a-1}e^{-\lambda r}}{\Gamma(a)}\,dr = \frac{\Gamma(a-1)}{\Gamma(a)}\lambda\int_0^\infty \frac{\lambda(\lambda r)^{a-2}e^{-\lambda r}}{\Gamma(a-1)}\,dr.$$

Το ολοκλήρωμα του τελευταίου σκέλους απειρίζεται στην περίπτωση $a \leq 1$. Στην περίπτωση που $a > 1$, ισούται με τη μονάδα γιατί η ολοκληρωτέα συνάρτηση ισούται με την πυκνότητα πιθανότητα της κατανομής Γάμμα, με παραμέτρους λ και $a-1$. Συνεπώς:

$$E[X] = \begin{cases} \frac{\lambda\Gamma(a-1)}{\Gamma(a)}, & a > 1, \\ \infty, & a \leq 1. \end{cases}$$

Η διασπορά υπολογίζεται με ανάλογο τρόπο:

$$E[X^2] = \int_0^\infty E[X^2|R=r]f_R(r)\,dr = \int_0^\infty \frac{2}{r^2}\frac{\lambda(\lambda r)^{a-1}e^{-\lambda r}}{\Gamma(a)}\,dr = \frac{2\lambda^2\Gamma(a-2)}{\Gamma(a)}\lambda\int_0^\infty \frac{\lambda(\lambda r)^{a-3}e^{-\lambda r}}{\Gamma(a-2)}\,dr.$$

Το ολοκλήρωμα του τελευταίου σκέλους απειρίζεται στην περίπτωση $a \leq 2$. Στην περίπτωση που $a > 2$, ισούται με τη μονάδα γιατί η ολοκληρωτέα συνάρτηση ισούται με την πυκνότητα πιθανότητα της κατανομής Γάμμα, με παραμέτρους λ και $a-2$. Συνεπώς:

$$E[X] = \begin{cases} \frac{2\lambda^2\Gamma(a-2)}{\Gamma(a)}, & a > 2, \\ \infty, & a \leq 2. \end{cases} \Rightarrow \text{VAR}[X] = \begin{cases} \lambda^2\left[\frac{2\Gamma(a-2)}{\Gamma(a)} - (\frac{\Gamma(a-1)}{\Gamma(a)})^2\right], & a > 2, \\ \infty, & a \leq 2. \end{cases}$$

29. **(Άθροισμα με τυχαίο αριθμό τυχαίων όρων)** Έστω η ακολουθία ανεξάρτητων πραγματικών τυχαίων μεταβλητών $\{X_n, n = 1, 2, ...\}$, που ακολουθούν την ίδια κατανομή πιθανότητας. Έστω η μη αρνητική ακέραια τυχαία μεταβλητή N, που είναι ανεξάρτητη των $\{X_n, n = 1, 2, ...\}$. Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή

$$Z = \sum_{i=1}^N X_i.$$

Υπολογίστε τη μέση τιμή $E[Z]$ και τη διασπορά $\text{VAR}[Z]$ συναρτήσει των $E[X_1]$, $E[N]$, $\text{VAR}[X_1]$, $\text{VAR}[N]$.

Λύση: Για να υπολογίσουμε την μέση τιμή, εφαρμόζουμε τον κανόνα $E[Z] = E[E[Z|N]]$:

$$\begin{aligned} E[Z] &= E[E[Z|N]] = \sum_{n=1}^\infty E[Z|N=n]p_N(n) = \sum_{n=1}^\infty E[\sum_{i=1}^N X_i|N=n]p_N(n) \\ &= \sum_{n=1}^\infty E[\sum_{i=1}^n X_i|N=n]p_N(n) = \sum_{n=1}^\infty E[\sum_{i=1}^n X_i]p_N(n) \\ &= \sum_{n=1}^\infty\sum_{i=1}^n E[X_i]p_N(n) = \sum_{n=1}^\infty nE[X_1]p_N(n) = E[X_1]\sum_{n=1}^\infty np_N(n) = E[N]E[X_1]. \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό της διασποράς, υπολογίζουμε καταρχήν την $E[Z^2]$, για την οποία έχουμε:

$$E[Z^2] = E[E[Z^2|N]].$$

Παρατηρήστε πως:

$$\begin{aligned} E[Z^2|N=n] &= E[\sum_{i=1}^{N} X_i^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1,j\neq i}^{N} X_iX_j|N=n] = E[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} X_iX_j|N=n] \\ &= E[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} X_iX_j] \\ &= nE[X_1^2] + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} E[X_i]E[X_j] \quad \text{(λόγω ανεξαρτησίας)} \\ &= nE[X_1^2] + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} E[X_1]^2 \\ &= nE[X_1^2] + n(n-1)E[X_1]^2, \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} E[Z^2] &= E[E[Z^2|N]] = E[N]E[X_1^2] + E[N(N-1)]E[X_1]^2 \\ &= E[N]E[X_1^2] + (E[N^2]-E[N])E[X_1]^2, \end{aligned}$$

άρα η διασπορά $\mathrm{VAR}[Z] = E[Z^2] - E[Z]^2$ δίνεται από

$$\begin{aligned} \mathrm{VAR}[Z] &= E[N]E[X_1^2] + (E[N^2] - E[N]^2 - E[N])E[X_1]^2 \\ &= E[N](E[X_1^2] - E[X_1]^2) + (E[N^2] - E[N]^2)E[X_1]^2 \\ &= E[N]\mathrm{VAR}[X_1] + \mathrm{VAR}[N]E[X_1]^2. \end{aligned}$$

30. **(Poisson τυχαίες μεταβλητές Bernoulli)** Θεωρούμε μια ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών $\{X_n\}$, όπου $n = 1, 2, \ldots$, με την ίδια συνάρτηση μάζας πιθανότητας Bernoulli, δηλαδή

$$P(X_n = 1) = p = 1 - P(X_n = 0), \quad 0 < p < 1, \quad n = 1, 2, \ldots$$

και την τυχαία μεταβλητή N που ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο λ, και είναι ανεξάρτητη των $\{X_n,\ n = 1, 2, ...\}$. Ορίζουμε τις τυχαίες μεταβλητές

$$Y \triangleq \sum_{i=1}^{N} X_i, \quad Z \triangleq N - Y.$$

Προσδιορίστε τις συναρτήσεις μάζας πιθανότητας των Y και Z. Ποιες κατανομές προκύπτουν?

Λύση: Αφού οι $\{X_n,\ n = 1, 2, ...\}$ είναι i.i.d. Bernoulli με παράμετρο p, τότε η δεσμευμένη κατανομή της Y δοθέντος ότι $N = n$ είναι διωνυμική, δηλαδή

$$P(Y = k|N = n) = \frac{n!}{k!(n-k)!}\, p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots n.$$

Εφαρμόζοντας το νόμο ολικής πιθανότητας παίρνουμε

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(Y = k|N = n)P(N = n) \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!}\, p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda}\, \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda}\, \frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{(n-k)}}{(n-k)!} = e^{-\lambda}\, \frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^j}{j!} \\ &= e^{-\lambda}\, \frac{(\lambda p)^k}{k!}\, e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p}\, \frac{(\lambda p)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots \end{aligned}$$

δηλαδή η κατανομή της Y είναι Poisson με παράμετρο λp. Για την Z γράφουμε

$$Z = \sum_{i=1}^{N} (1 - X_i),$$

οπότε όμοια προκύπτει ότι η Z είναι Poisson με παράμετρο $\lambda(1-p)$. Ώστε διαχωρίστηκε η αρχική τυχαία μεταβλητή N με κατανομή Poisson με παράμετρο λ σε δύο επιμέρους τυχαίες μεταβλητές Poisson με παραμέτρους λp και $\lambda(1-p)$ μέσω δοκιμών Bernoulli.

4η Ομάδα Ασκήσεων

31. **(Τυχαίος Περίπατος σε Γράφο)** Ένα σωματίδιο εκτελεί τυχαίο περίπατο στις κορυφές ενός συνεκτικού γράφου. Για απλότητα, υποθέτουμε ότι κάθε ζεύγος κορυφών συνδέεται με το πολύ μια ακμή, και πως μια κορυφή δεν είναι ποτέ συνδεδεμένη με τον εαυτό της. Όταν το σωματίδιο είναι σε μια ακμή, επιλέγει την επόμενη που θα επισκεφτεί ανάμεσα σε όλες τις γειτονικές, με ίσες πιθανότητες. Έστω $N < \infty$ ο συνολικός αριθμός κορυφών. Συμβολίζουμε τις κορυφές με τους ακεραίους $1, 2, \ldots, N$. Αν υποθέσουμε ότι ο συνολικός αριθμός ακμών είναι η, και πως όλες οι προϋποθέσεις ύπαρξης στατικής κατανομής ικανοποιούνται, τότε να δειχθεί ότι η στατική κατανομή δίνεται από την εξίσωση $\pi_i = \frac{d_i}{2\eta}$, $i = 1, \ldots, N$, όπου d_i είναι ο βαθμός της κορυφής i, δηλαδή ο αριθμός των γειτονικών κορυφών της.

    Λύση: Αρκεί να δειχθεί ότι η υποψήφια κατανομή ικανοποιεί τις εξισώσεις

    $$\sum_{i=1}^{N} \pi_i = 1, \quad \pi_j = \sum_{1 \le i \le n} P_{ij} \pi_i, j = 1, \ldots, N.$$

    Αν αντικαταστήσουμε τις υποψήφιες τιμές στην πρώτη από αυτές, προκύπτει ότι $\sum_{i=1}^{N} d_i = 2\eta$. Η εξίσωση όμως αυτή ισχύει, καθώς αν προσθέσουμε τον αριθμό των βαθμών, θα υπολογίσουμε κάθε ακμή ακριβώς δύο φορές, μια φορά για κάθε μια από τις δύο κορυφές της. Επίσης, παρατηρώντας ότι μεταβάσεις επιτρέπονται μόνο μεταξύ κορυφών που μοιράζονται ακμή, και αντικαθιστώντας τις υποψήφιες τιμές για την στατική κατανομή στην εξίσωση $\pi_j = \sum_{1 \le i \le n} P_{ij} \pi_i$, προκύπτει ότι $d_j = \sum_{\text{όλοι οι γείτονες του}|j} 1$, που προφανώς ισχύει. Όλες οι εξισώσεις ικανοποιούνται, συνεπώς η στατική κατανομή πράγματι δίνεται από την εξίσωση $\pi_i = \frac{d_i}{2\eta}$.

32. **(Φιδάκι)** Το παιχνίδι «Φιδάκι» (στα αγγλικά «Snakes and Ladders») παίζεται ως εξής: έχουμε ένα ταμπλό από n διαδοχικά τετράγωνα αριθμημένα ως $1, \ldots, n$. Ο παίχτης τοποθετεί αρχικά το πιόνι του στο τετράγωνο 1 και σε κάθε γύρο ρίχνει ένα ζάρι. Αν φέρει j και είναι στη θέση i, μετακινεί το πιόνι του στη θέση $i + j$. Υπάρχουν όμως οι ακόλουθες εξαιρέσεις:

    (α΄) Αν η θέση $i + j$ ενώνεται με ένα φιδάκι με μια θέση $k < i + j$, τότε το πιόνι αυτόματα μεταφέρεται στη θέση k. Άρα τα φιδάκια μας δυσκολεύουν να προχωρήσουμε μπροστά.

    (β΄) Αν η θέση $i + j$ ενώνεται με μια σκάλα με μια θέση $k > i + j$, τότε το πιόνι αυτόματα μεταφέρεται στη θέση k. Άρα οι σκάλες βοηθούν να προχωρήσουμε μπροστά.

    (γ΄) Αν είμαστε στη θέση $i > n - 6$, τότε αν φέρουμε ζαριά j τέτοια ώστε $i + j \ge n$, μεταφερόμαστε στη θέση n.

    Το παιχνίδι τελειώνει όταν φτάσουμε στη θέση n. Αν παίζουν k παίκτες, κερδίζει όποιος φτάσει στη θέση n με τις λιγότερες ζαριές.

    Παράδειγμα ενός ταμπλό παιχνιδιού είναι το ταμπλό του Σχήματος 3. (Στο συγκεκριμένο ταμπλό, οι θέσεις 43, 52, 16, και 59 περιέχουν διακοσμητικές ζωγραφιές που δεν επηρεάζουν το παιχνίδι.)

    (α΄) Εξηγήστε γιατί το παιχνίδι μπορεί να μοντελοποιηθεί ως αλυσίδα Markov.

    (β΄) Ποιά είναι η αλυσίδα Markov που αντιστοιχεί στο ταμπλώ του Σχήματος 3? (Δώστε μερικές ενδεικτικές τιμές του πίνακα μεταβάσεων.) Ποιές είναι οι κλάσεις από τις οποίες αποτελείται η συγκεκριμένη αλυσίδα? Είναι μεταβατικές ή επαναληπτικές?

    (γ΄) Να υλοποιήσετε πρόγραμμα που θα λαμβάνει ως είσοδο ένα ταμπλώ και να υπολογίζει την κατανομή του αριθμού των ζαριών X που χρειάζεται ένας παίκτης για να τελειώσει. Σχεδιάστε την κατανομή για το ταμπλώ του Σχήματος 3.

    Λύση:

Σχήμα 3: Άσκηση 31.

(α´) Το παιχνίδι μπορεί να μοντελοποιηθεί ως αλυσίδα Markov όπου κάθε τετράγωνο από όπου δεν ξεκινά φιδάκι ή σκάλα να είναι μια κατάσταση. Πράγματι, όταν είμαστε στο τετράγωνο i, θα βρεθούμε στο τετράγωνο j με πιθανότητα που εξαρτάται από τα i και j και όχι από τις μεταβάσεις που έγιναν στο παρελθόν. Επιπλέον, παρατηρήστε ότι για κάθε σκάλα ή φιδάκι υπάρχει ένα τετράγωνο που δεν θα επισκεφτούμε ποτέ, άρα δεν χρειάζεται να το μοντελοποιήσουμε ως κατάσταση.

(β´) Η αλυσίδα Markov περιλαμβάνει $64 - 8 = 56$ καταστάσεις. Μερικές ενδεικτικές τιμές του πίνακα μεταβάσεων του Σχήματος 3 είναι οι ακόλουθες:

$$P(1,1) = 0,\ P(1,2) = \frac{1}{6},\ P(1,18) = \frac{1}{6},\ P(1,4) = \frac{1}{6},\ P(1,5) = \frac{1}{6},\ P(1,6) = \frac{1}{6},\ P(1,6) = \frac{1}{6},$$
$$P(2,2) = 0,\ P(2,18) = \frac{1}{6},\ P(2,4) = \frac{1}{6},\ P(2,5) = \frac{1}{6},\ P(2,6) = \frac{1}{6},\ P(2,7) = \frac{1}{6},\ P(2,8) = \frac{1}{6},$$
$$P(4,4) = 0,\ P(4,5) = \frac{1}{6},\ P(4,6) = \frac{1}{6},\ P(4,7) = \frac{1}{6},\ P(4,8) = \frac{1}{6},\ P(4,9) = \frac{1}{6},\ P(4,10) = \frac{1}{6}, \ldots$$

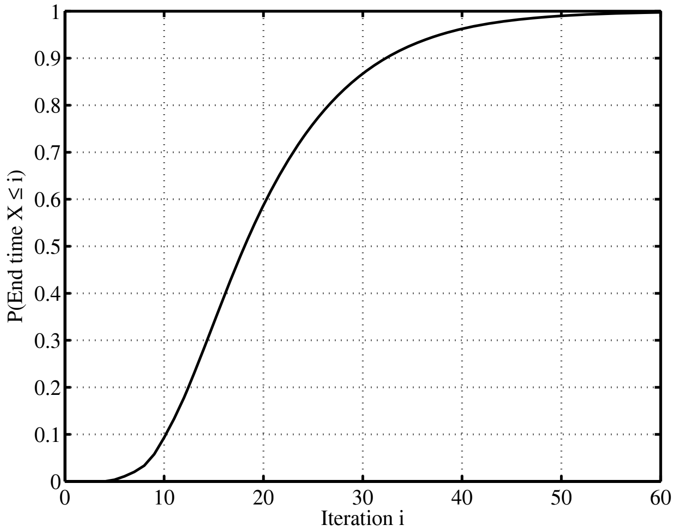
Οι κλάσεις είναι οι ακόλουθες:

$$\{1\},\ \{2\},\ \{4\},\ \{28\},\ \{30\},\ \{31\},\ \{63\},\ \{64\},$$
$$\{5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,20,21,22,23,25,26\}$$
$$\{32,33,34,35,36,37,38,39,40,41,42,43,44,45,46,47,49,50,51,52,53,54,55,56,57,59,60,61\}.$$

Προφανώς, όλες οι κλάσεις εκτός από την $\{64\}$ είναι μεταβατικές, αφού σε όποια από αυτές και να είμαστε υπάρχει περίπτωση να φύγουμε χωρίς επιστροφή. Παρατηρήστε ότι τα ακόλουθα τετράγωνα δεν ανήκουν σε καμία κλάση: 3, 19, 24, 27, 29, 48, 58, 62. Πράγματι, το πιόνι μας ποτέ δεν θα βρεθεί σε κάποιο από αυτά, μετά το πέρας μιας ζαριάς.

(γ´) Ένα πρόγραμμα που υπολογίζει την κατανομή είναι το ακόλουθο:

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

startup;
clear;
x=1/6;

% we initialize the matrix
P=zeros(64,64);

% we create the plain squares
for i=1:58,
    for j=1:6,
        P(i,i+j)=x;
    end;
end;

% we create the end squares
P(58,59)=x; P(58,60)=x; P(58,61)=x; P(58,62)=x; P(58,63)=x; P(58,64)=x;
P(59,60)=x; P(59,61)=x; P(59,62)=x; P(59,63)=x; P(59,64)=2*x;
P(60,61)=x; P(60,62)=x; P(60,63)=x; P(60,64)=3*x;
P(61,62)=x; P(61,63)=x; P(61,64)=4*x;
P(62,63)=x; P(62,64)=5*x;
P(63,64)=1;
P(64,64)=1;

% we implement the snakes and ladders
mods=[3 18; 24 39; 29 53; 48 63; 19 5; 27 8; 58 41; 62 32];

for i=1:size(mods,1),
    for j=1:6,
       if mods(i,1)-j>0,
```



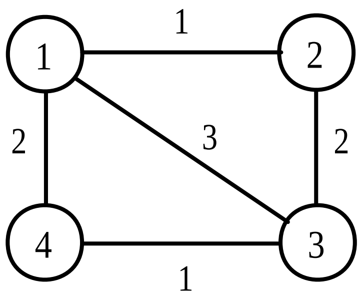
Σχήμα 4: Η κατανομή της Άσκησης 31.

```
            P(mods(i,1)-j,mods(i,1))=0;
            P(mods(i,1)-j,mods(i,2))=x;
        end;
    end;
end;

% We calcuate the cdf
b=eye(64);
prob=zeros(60,1);
for i=1:60,
    b=b*P;
    prob(i)=b(1,64);

end;

% We plot the results
figure(1);
plot(prob);
grid on;
xlabel('Iteration i');
ylabel('P(End time X \leq i)');
print -deps snakes.eps

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

Το πρόγραμμα λειτουργεί δημιουργώντας τον πίνακα μεταβάσεων P, και υπολογίζοντας διαδοχικά τις δυνάμεις P^i. Το στοιχείο $(1,64)$ του P_i εκφράζει την πιθανότητα να βρεθούμε μετά από i επαναλήψεις στη θέση 64, έχοντας ξεκινήσει από τη θέση 1. Η πιθανότητα αυτή ισούται με την κατανομή $F_X(x) = P[X \leq x]$. Παρατηρήστε ότι, για να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς, έχουμε μοντελοποιήσει ως καταστάσεις *και* τα τετράγωνα από όπου ξεκινούν σκάλες και φιδάκια, παρότι αυτές οι καταστάσεις δεν θα τις επισκευτούμε ποτέ. (Η θεωρία όμως καλύπτει και την περίπτωση ύπαρξης τέτοιων καταστάσεων.) Η κατανομή του X, όπως υπολογίζεται από το άνω πρόγραμμα, έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 4.

33. **(Δεσμευμένη πιθανότητα για την παρελθούσα κατάσταση)** Μια αλυσίδα Markov διακριτού χρόνου έχει τις τρεις καταστάσεις $0, 1, 2$, και πίνακα μεταβάσεων

$$P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}.$$



Σχήμα 5: Άσκηση 33.

Μετά από την εκτέλεση ενός πολύ μεγάλου αριθμού μεταβάσεων, παρατηρούμε την αλυσίδα και την βρίσκουμε στην κατάσταση 1. Ποιά είναι η δεσμευμένη πιθανότητα ότι η αλυσίδα ήταν στην κατάσταση 2 κατά την προηγούμενη χρονική στιγμή? *(Υπόδειξη: πρέπει να υπολογισθεί το* $\lim_{n\to\infty} P(X_{n-1} = 2|X_n = 1)$*.)*

Λύση: Θα χρειαστούμε τη στατική κατανομή (π_0, π_1, π_2) που δίνει τις πιθανότητες η αλυσίδα να βρίσκεται στις διαφορές καταστάσεις καθώς ο αριθμός των μεταβάσεων τείνει στο άπειρο. (Όλες οι προυποθέσεις για την ύπαρξή της ικανοποιούνται.) Κατά τα γνωστά, η στατική κατανομή δίνεται από τις εξισώσεις

$$[\pi_0\pi_1\pi_2] = [\pi_0\pi_1\pi_2]P \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \pi_0 = 0.4\pi_0 + 0.6\pi_1 + 0.4\pi_2 \\ \pi_1 = 0.4\pi_0 + 0.2\pi_1 + 0.2\pi_2 \\ \pi_2 = 0.2\pi_0 + 0.2\pi_1 + 0.4\pi_2 \end{array} \right\}$$

μαζί με την εξίσωση $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$. Με απλές αντικαταστάσεις προκύπτει ότι $\pi_0 = \frac{11}{24}$, $\pi_1 = \frac{7}{24}$, $\pi_2 = \frac{1}{4}$. Ακολούθως, παρατηρούμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} P(X_{n-1} = 2|X_n = 1) = \lim_{n\to\infty} \frac{P(X_{n-1} = 2, X_n = 1)}{P(X_n = 1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{P(X_n|X_{n-1} = 2)P(X_{n-1} = 2)}{P(X_n = 1)} = \frac{P_{21}\pi_2}{\pi_1} = \frac{6}{35}.$$

34. **(Αλυσίδες Markov πάνω σε γράφους)**

(α΄) Έστω ο γράφος του Σχήματος 5, πάνω στον οποίο υποθέτουμε ότι κινείται ένα άτομο ως εξής: όταν βρίσκεται σε ένα κόμβο επιλέγει τον επόμενο κόμβο που θα επισκεφτεί ανεξάρτητα από που ήταν πριν, και με πιθανότητα ανάλογη του βάρους της ακμής που ενώνει τους δύο κόμβους. Για παράδειγμα, αν το άτομο βρίσκεται στον κόμβο 2, αποκλείεται να επισκεφτεί τον κόμβο 4, ενώ η πιθανότητα να επισκεφτεί τον κόμβο 3 είναι διπλάσια της πιθανότητας να επισκεφτεί τον κόμβο 1. Να καταγράψετε τον πίνακα μεταβάσεων της διακριτής αλυσίδας Markov που δημιουργείται. Έχει η αλυσίδα μόνιμη κατάσταση? Αν ναι, υπολογίστε τις οριακές πιθανότητες π_i. *(Υπόδειξη: για να μειώσετε τις πράξεις που απαιτούνται, παρατηρήστε ότι, λόγω συμμετρίας, ορισμένες οριακές πιθανότητες πρέπει να είναι ίσες μεταξύ τους.)*

(β΄) Μπορείτε να γενικεύσετε το αποτέλεσμά σας για *οποιονδήποτε* γράφο όπου δύο κόμβοι i, j συνδέονται με ακμή βάρους w_{ij}, εφόσον αυτός ο γράφος ικανοποιεί τις συνθήκες για να έχει οριακές πιθανότητες? *(Υπόδειξη: το ευκολότερο είναι να μαντέψετε το αποτέλεσμα, χρησιμοποιώντας το προηγούμενο σκέλος για έμπνευση, και κατόπιν να το επαληθεύσετε.)*

Λύση:

(α΄) Ο πίνακας μεταβάσεων είναι ο ακόλουθος:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} & \frac{3}{6} & \frac{2}{6} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{3}{6} & \frac{2}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Οι οριακές πιθανότητες πρέπει να ικανοποιούν τις συνθήκες:

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= \frac{1}{6}(2\pi_2 + 3\pi_3 + 4\pi_4), \\
\pi_2 &= \frac{1}{6}(\pi_1 + 2\pi_3), \\
\pi_3 &= \frac{1}{6}(3\pi_1 + 2\pi_2 + \pi_4), \\
\pi_4 &= \frac{1}{6}(2\pi_1 + \pi_3).
\end{aligned}$$

Λόγω συμμετρίας, πρέπει να έχουμε $\pi_2 = \pi_4$ και $\pi_1 = \pi_3$. Με αντικατάσταση στην πρώτη εξίσωση, προκύπτει ότι $\pi_1 = 2\pi_2$, και επειδή

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \Rightarrow 2\pi_1 + 2\pi_2 = 1 \Rightarrow \pi_1 + \pi_2 = \frac{1}{2},$$

προκύπτει τελικά ότι

$$\pi_1 = \pi_3 = \frac{1}{3}, \;\; \pi_2 = \pi_4 = \frac{1}{6}.$$

(β΄) Σε αυτή την περίπτωση, η πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση i στην κατάσταση j θα είναι:

$$P_{ij} = \frac{w_{ij}}{\sum_k w_{ik}}.$$

Είναι (περίπου) προφανές ότι η οριακή πιθανότητα να βρισκόμαστε στον κόμβο i είναι ανάλογη του αθροίσματος των βαρών όλων των ακμών που βγαίνουν από τον κόμβο:

$$\pi_i = K \sum_k w_{ik},$$

όπου K είναι μια σταθερά που θα υπολογίσουμε εκ των υστέρων. Πράγματι, μπορούμε να επαληθεύσουμε πως:

$$\sum_i \pi_i P_{ij} = \sum_i K(\sum_k w_{ik}) \frac{w_{ij}}{\sum_k w_{ik}} = K \sum_i w_{ij} = K \sum_k w_{jk} = \pi_j.$$

Στην προτελευταία ισότητα, χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $w_{ij} = w_{ji}$, επομένως το άθροισμα των βαρών των ακμών που «μπαίνουν» σε ένα κόμβο ισούται με το άθροισμα των ακμών που «βγαίνουν» από αυτόν. Μένει ο προσδιορισμός του συντελεστή K, για τον οποίο έχουμε

$$\sum_i \pi_i = 1 \Rightarrow K \sum_i \sum_k w_{ik} = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{\sum_{i,k} w_{ik}} \Rightarrow \pi_i = \frac{\sum_k w_{ik}}{\sum_{i,k} w_{ik}}.$$

35. **(Υπολογισμός οριακών πιθανοτήτων)** Δίνεται ο παρακάτω πίνακας μετάβασης μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας διακριτού χρόνου τριών καταστάσεων:

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

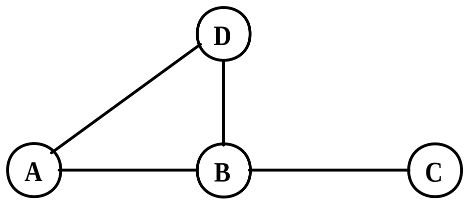
Ικανοποιούνται οι συνθήκες για την ύπαρξη οριακών πιθανοτήτων? Εξηγήστε. Μακροπρόθεσμα, τι ποσοστό του χρόνου βρίσκεται η αλυσίδα σε κάθε μία από τις τρεις καταστάσεις?

Λύση: Η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι αδιαχώριστη, απεριοδική και θετικά επαναληπτική. Τα ποσοστά του χρόνου δίνονται από τις οριακές πιθανότητες π_0, π_1, π_2, που προκύπτουν λύνοντας το σύστημα εξισώσεων

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{2} \pi_i P_{ij}, \quad j = 0, 1, 2,$$

μαζί με τη σχέση $\sum_{i=0}^{2} \pi_i = 1$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= 0.5\pi_0 + 0.3\pi_1 + 0.2\pi_2, \\
\pi_1 &= 0.4\pi_0 + 0.4\pi_1 + 0.3\pi_2, \\
\pi_2 &= 0.1\pi_0 + 0.3\pi_1 + 0.5\pi_2, \\
\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 &= 1.
\end{aligned}$$



Σχήμα 6: Άσκηση 35

Οποιεσδήποτε δύο από τις τρεις πρώτες και η τελευταία δίνουν τη λύση

$$\pi_0 = \frac{21}{62}, \quad \pi_1 = \frac{23}{62}, \quad \pi_2 = \frac{9}{31}.$$

36. **(Απλό σιδηροδρομικό δίκτυο)** Οι τέσσερεις πόλεις A, B, C, D, ενώνονται μέσω σιδηρόδρομου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6, και εξυπηρετούνται από ένα τρένο. Κάθε πρωί, σε οποιαδήποτε πόλη και αν βρίσκεται, το τρένο επιλέγει τυχαία και ισοπίθανα μία από τις γραμμές που εγκαταλείπουν την πόλη και την χρησιμοποιεί για να επισκεφθεί μια από τις γειτονικές πόλεις, όπου και διανυκτερεύει. Υποθέτωντας ότι το τρένο ακολουθεί αυτό τον κανόνα εδώ και πολλές μέρες, να υπολογισθεί η πιθανότητα το τρένο να βρεθεί σήμερα στην πόλη D.

Λύση: Η διαδρομή του τρένου μπορεί να μοντελοποιηθεί ως μια αλυσίδα Markov, με τέσσερεις καταστάσεις (A, B, C, D), και με πίνακα μεταβάσεων τον ακόλουθο:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Οι συνθήκες για να υπάρχει η στατική κατανομή $(\pi_A, \pi_B, \pi_C, \pi_D)$ ικανοποιούνται. Η στατική κατανομή πρέπει να ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\pi_A = \frac{1}{3}\pi_B + \frac{1}{4}\pi_D, \;\; \pi_B = \frac{1}{2}\pi_A + \pi_C + \frac{1}{4}\pi_D, \;\; \pi_C = \frac{1}{3}\pi_B, \;\; \pi_D = \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_B, \;\; \pi_A + \pi_B + \pi_C + \pi_D = 1.$$

από τις οποίες προκύπτει εύκολα ότι $\pi_A = \frac{1}{4}$, $\pi_B = \frac{3}{8}$, $\pi_C = \frac{1}{4}$, $\pi_D = \frac{1}{8}$. Συνεπώς, η πιθανότητα να είναι σήμερα το τρένο στην πόλη D είναι $\frac{1}{8}$.

37. **(Διπλά Στοχαστικοί Πίνακες)** Ένας πίνακας μεταβάσεων **P** καλείται **διπλά στοχαστικός** αν το άθροισμα όλων των *στηλών* του ισούται με τη μονάδα, δηλαδή

$$\sum_i P_{ij} = 1, \;\; \forall j.$$

(α΄) Έστω αδιαχώριστη απεριοδική αλυσίδα Markov διακριτού χρόνου με πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων $M+1$, έστω $0, 1, 2, \ldots, M$. Να δείξετε ότι αν ο πίνακας μεταβάσεων που την περιγράφει είναι διπλά στοχαστικός, τότε οι οριακές της πιθανότητες είναι όλες ίσες μεταξύ τους.

(β΄) Σαν ειδική περίπτωση του άνω σκέλους, έστω το εξής πρόβλημα: Ρίχνουμε διαδοχικά ένα δίκαιο ζάρι, και προσθέτουμε τα αποτελέσματα. Έστω X_n οι διαδοχικές ζαριές και $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ τα διαδοχικά αθροίσματα, όπου $n = 1, 2, \ldots$. Κατασκευάστε κατάλληλη αλυσίδα Markov, ορίζοντας πλήρως τις καταστάσεις της και τον πίνακα μεταβάσεων της, και χρησιμοποιήστε τη για να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} P[Y_n = \text{πολλαπλάσιο του } 13].$$

(γ΄) Αν το ζάρι δεν ήταν δίκαιο, αλλά είχαμε ότι

$$P(X_i = l) = p_l, \;\; l = 1, \ldots, 6, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

θα άλλαζε το αποτέλεσμα? Πότε και γιατί? Απαντήστε αυτό το σκέλος μόνο διαισθητικά, χωρίς πράξεις.

Λύση:

(α΄) Αν οι οριακές πιθανότητες είναι όλες ίσες μεταξύ τους, προφανώς θα είναι ίσες με $\frac{1}{M+1}$, ώστε να ικανοποιείται η σχέση

$$\sum_{j=0}^{M} \pi_j = 1.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι θα ικανοποιούνται και οι σχέσεις

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{M} \pi_i P_{ij}, \ \ \forall\, j. \tag{1}$$

Πράγματι,

$$\sum_{i=0}^{M} \pi_i P_{ij} = \sum_{i=0}^{M} \frac{1}{M+1} P_{ij} = \frac{1}{M+1} \sum_{i=0}^{M} P_{ij} = \frac{1}{M+1} = \pi_j,$$

όπου η πρώτη ισότητα προέκυψε βάσει της υπόθεσης για τις οριακές πιθανότητες, και η προτελευταία ισότητα προέκυψε βάσει της υπόθεσης περί διπλής στοχαστικότητας. Άρα, ικανοποιούνται και οι σχέσεις (1).

(β΄) Ορίζω τον χρόνο $n = 1, 2, \ldots$ ως τις χρονικές στιγμές μετά από κάθε ζαριά. Ορίζω επίσης την κατάσταση j ως την κατάσταση που βρισκόμαστε όταν $Y_n = 13k + j$, όπου $k \in \mathbb{Z}$ και $j = 0, 1, 2, \ldots, 12$. Παρατηρήστε ότι η κατάσταση είναι καλώς ορισμένη, καθώς για κάθε Y_n υπάρχουν ακριβώς ένα k και ένα j για τα οποία $Y_n = 13k + j$. Ο πίνακας μεταβάσεων αυτής της αλυσίδας Markov προφανώς είναι ο

$$P = \begin{bmatrix}
0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\
\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\
\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\
\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\
\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\
\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\
\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

Προφανώς ο πίνακας είναι διπλά στοχαστικός, ενώ προφανώς η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη και απεριοδική. Άρα με χρήση του προηγούμενου σκέλους, η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με $\frac{1}{13}$.

(γ΄) Έστω τώρα πως η πιθανότητα να φέρουμε l ισούται με p_l. Ο καινούργιος πίνακας μεταβάσεων είναι ο ακόλουθος:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \\ p_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \\ p_5 & p_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ p_4 & p_5 & p_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Παρατηρήστε ότι και πάλι ο πίνακας μεταβάσεων είναι διπλά στοχαστικός! Άρα, η πιθανότητα θα συνεχίζει να ισχύει, εφόσον όμως η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη και απεριοδική. Διαισθητικά, είναι προφανές ότι πάντα η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη. Δηλαδή όποια και να είναι η κατανομή $\{p_l\}$, μπορούμε να πάμε από οποιαδήποτε κατάσταση σε οποιαδήποτε άλλη (θα ίσχυε αυτό αν παίρναμε το 12 αντί για το 13?) Όμως, μπορεί για ορισμένες κατανομές $\{p_l\}$ η αλυσίδα που προκύπτει να είναι περιοδική, ενώ για άλλες να μην είναι. Δύο παραδείγματα είναι τα εξής:

$$p_1 = 1,\ p_2 = 0,\ p_3 = 0,\ p_4 = 0,\ p_5 = 0,\ p_6 = 0,$$
$$p_1 = \frac{1}{2},\ p_2 = \frac{1}{2},\ p_3 = 0,\ p_4 = 0,\ p_5 = 0,\ p_6 = 0.$$

Στην πρώτη περίπτωση, υπάρχει περίοδος 13, και στη δεύτερη περίοδος 1.

38. **(«ο διαιτητής κ. Δαρμένος»)** Κάθε φορά που μια ομάδα ποδοσφαίρου κερδίζει ένα παιχνίδι, κερδίζει και το επόμενο με πιθανότητα 0.8, λόγω ανεβασμένης ψυχολογίας. Αν το χάσει, κερδίζει το επόμενο με πιθανότητα 0.4, λόγω πεσμένης ψυχολογίας. Στα παιχνίδια που τελικά χάνει, γίνονται επεισόδια με πιθανότητα 0.8, ενώ σε αυτά που κερδίζει, γίνονται επεισόδια με πιθανότητα 0.1. Σε τι ποσοστό παιχνιδιών γίνονται επεισόδια?

    Λύση: Καταρχήν παρατηρούμε πως η αλληλουχία από νίκες και ήττες μπορεί να μοντελοποιηθεί από μια αλυσίδα Markov με πίνακα μεταβάσεων
    $$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}.$$
    Εννοείται πως η πρώτη κατάσταση αντιστοιχεί σε νίκη, και η δεύτερη σε ήττα. Οι οριακές πιθανότητες προκύπτουν από το σύστημα εξισώσεων
    $$\begin{aligned} \pi_0 &= 0.8\pi_0 + 0.4\pi_1, \\ \pi_1 &= 0.2\pi_0 + 0.6\pi_1, \\ \pi_0 + \pi_1 &= 1, \end{aligned}$$
    από το οποίο εύκολα προκύπτει πως:
    $$\pi_0 = \frac{2}{3},\ \ \pi_1 = \frac{1}{3}.$$
    Ακολούθως, έστω πως A_n είναι η πιθανότητα να γίνουν επεισόδια στο n-οστό παιχνίδι. Παρατηρούμε πως:
    $$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} P[A_n] &= \lim_{n\to\infty} \{P[A|W_n]P[W_n] + P[A|L_n]P[L_n]\} \\ &= \lim_{n\to\infty} P[A|W_n]P[W_n] + \lim_{n\to\infty} P[A|L_n]P[L_n] \\ &= P[A|W_n] \lim_{n\to\infty} P[W_n] + P[A|L_n] \lim_{n\to\infty} P[L_n] \\ &= 0.1 \times \frac{2}{3} + 0.8 \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Στα άνω, W_n και L_n είναι αντίστοιχα τα ενδεχόμενα να κερδίζει ή να χάσει η ομάδα το n-οστό παιχνίδι. Η πρώτη ισότητα προκύπτει από το νόμο της ολικής πιθανότητας, παρατηρώντας πως τα W_n, L_n αποτελούν διαμέριση. Η τέταρτη ισότητα προκύπτει εξ υποθέσεως για τις δεσμευμένες πιθανότητες και τα άνω για τις οριακές πιθανότητες της αλυσίδας. Άρα, η πιθανότητα να γίνουν επεισόδια μετά από παιχνίδι, εφόσον έχουν γίνει ήδη πολλά παιχνίδια, είναι 1 στα 3, και ακολούθως, βάσει της θεωρίας, προκύπτει ότι το ποσοστό των παιχνιδιών που γίνονται επεισόδια είναι επίσης 1 στα 3.

5η Ομάδα Ασκήσεων

39. **(Μεταμόσχευση Νεφρού)** Δύο ασθενείς A και B χρειάζονται μεταμόσχευση νεφρού. Αν δεν λάβουν νέο νεφρό, ο ασθενής A θα αποβιώσει μετά από χρόνο εκθετικά κατανεμημένο με μέση τιμή $\frac{1}{\mu_A}$, και ο ασθενής B θα αποβιώσει μετά από εκθετικά κατανεμημένο χρόνο με μέση τιμή $\frac{1}{\mu_B}$. Διαθέσιμα νεφρά έρχονται σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Έχει αποφασισθεί ότι το πρώτο νεφρό θα δοθεί στον A, εκτός αν αποβιώσει, οπότε το πρώτο νεφρό παίρνει ο B. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες επιβίωσης των A και B.

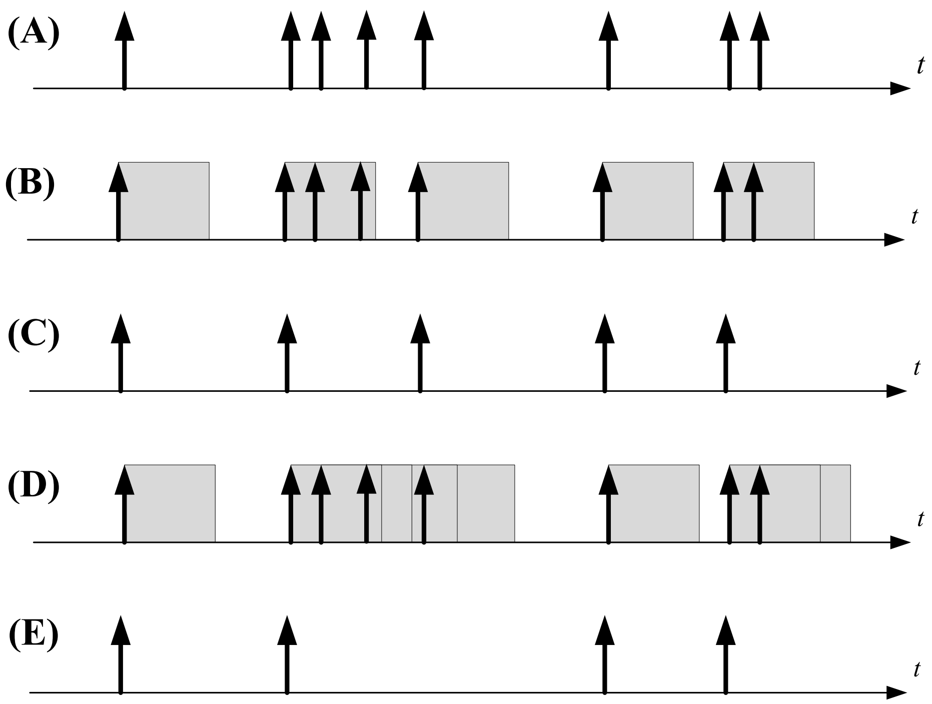
    Λύση: Καταρχήν παρατηρούμε ότι αν οι X_i, $i = 1, \ldots, n$ είναι εκθετικές τυχαίες μεταβλητές με ρυθμούς λ_i, $i = 1, \ldots, n$, τότε
$$P(X_j = \min_{1\leq i\leq n}\{X_i\}) = \frac{\lambda_j}{\sum_{1\leq i\leq n}\lambda_i}.$$
    Έστω T_A και T_B οι εκθετικοί χρόνοι ζωής των A και B αν δεν κάνουν μεταμόσχευση. Έστω επίσης T_1 ο χρόνος μέχρι την άφιξη του πρώτου νεφρού, και T_2 ο επιπλέον χρόνος μέχρι την άφιξη του δεύτερου νεφρού. Κατά τα γνωστά για τη διαδικασία Poisson, οι T_1 και T_2 ακολουθούν την εκθετική κατανομή με ρυθμό λ.

    (α΄) Ο ασθενής A θα επιβιώσει αν $T_1 < T_A$. Αυτό θα γίνει με πιθανότητα $\frac{\lambda}{\lambda+\mu_A}$.

    (β΄) Ο ασθενής B θα επιβιώσει μόνο εφόσον $T_B > \min\{T_A, T_B, T_1\}$ (αναγκαία συνθήκη, που συμβαίνει με πιθανότητα $\frac{\lambda+\mu_A}{\lambda+\mu_A+\mu_B}$) και, με δεδομένο αυτό το ενδεχόμενο, αν ο επιπλέον χρόνος που θα ζήσει ο B υπερβαίνει τον χρόνο μέχρι την άφιξη του επόμενου νεφρού. Λόγω της έλλειψης μνήμης της εκθετικής κατανομής, η πιθανότητα αυτού του δεσμευμένου ενδεχόμενου είναι $\frac{\lambda}{\lambda+\mu_B}$. Συνδυάζοντας τις δύο πιθανότητες, προκύπτει ότι ο B θα επιβιώσει με πιθανότητα $\frac{\lambda+\mu_A}{\lambda+\mu_A+\mu_B} \times \frac{\lambda}{\lambda+\mu_B}$.

40. **(Χαρακτηριστική συνάρτηση και συνδιακύμανση στην διαδικασία Poisson)** Έστω $\{N(t),\ t \geq 0\}$ τυχαία διαδικασία Poisson με ρυθμό αφίξεων $\lambda > 0$. Υπολογίστε τη χαρακτηριστική συνάρτηση $E[e^{i\theta N(t)}]$, όπου $t \geq 0$, i η φανταστική μονάδα, και $\theta \in \mathbf{R}$, και τη συνδιακύμανση COV$[N(t_1), N(t_2)]$, όπου $t_1, t_2 \geq 0$. *(Υπόδειξη: υποθέστε ότι $t_1 \leq t_2$, και χρησιμοποιήστε την ανεξαρτησία των αφίξεων που συμβαίνουν σε διακριτά διαστήματα.)*

    Λύση: Η χαρακτηριστική συνάρτηση είναι
$$E[e^{i\theta N(t)}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{i\theta k} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} = \exp(-\lambda t)\exp\left(\lambda t e^{i\theta}\right) = \exp\left[\lambda t(e^{i\theta}-1)\right], \quad t \geq 0, \ \ \theta \in \mathbf{R}.$$
    Έστω $t_1 \leq t_2$. Η συνδιακύμανση υπολογίζεται ως εξής:
$$\begin{aligned} \mathrm{COV}[N(t_2), N(t_1)] &= E[N(t_2)N(t_1)] - E[N(t_2)]E[N(t_1)] \\ &= E[(N(t_2)-N(t_1))N(t_1)] + E[N(t_1)^2] - E[N(t_2)]E[N(t_1)] \\ &= E[N(t_2)-N(t_1)]E[N(t_1)] + E[N(t_1)^2] - E[N(t_2)]E[N(t_1)]. \end{aligned} \tag{2}$$
    Στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την υπόδειξη περί ανεξαρτησίας. Επίσης έχουμε:
$$E[N(t_1)] = \lambda t_1, \quad E[N(t_2)] = \lambda t_2, \quad E[N(t_2)-N(t_1)] = \lambda(t_2-t_1), \tag{3}$$
    και επιπλέον
$$\begin{aligned} E[N^2(t_1)] &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-\lambda t_1}\frac{(\lambda t_1)^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty}(k-1+1)e^{-\lambda t_1}\frac{(\lambda t_1)^k}{(k-1)!} \\ &= \lambda t_1 \sum_{k=1}^{\infty}(k-1)e^{-\lambda t_1}\frac{(\lambda t_1)^{k-1}}{(k-1)!} + \lambda t_1 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda t_1}\frac{(\lambda t_1)^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= (\lambda t_1)^2 + \lambda t_1. \end{aligned} \tag{4}$$



Σχήμα 7: Άσκηση 40.

Αντικαθιστώντας τις (4) και (3) στην (2) βρίσκουμε:

$$\mathrm{COV}[N(t_2), N(t_1)] = \lambda(t_2 - t_1)\lambda t_1 + (\lambda t_1)^2 + \lambda t_1 - \lambda^2 t_1 t_2 = \lambda t_1, \quad t_1 \leq t_2,$$

άρα, λόγω συμμετρίας στον ορισμό της συνδιακύμανσης,

$$\mathrm{COV}[N(t_2), N(t_1)] = \lambda \min\{t_1, t_2\}, \quad t_1, t_2 \geq 0.$$

41. **(Μετρητής Geiger)** Ένας μετρητής Geiger χρησιμοποιείται για την παρατήρηση μιας πηγής ραδιενέργειας που εκπέμπει σωμάτια άλφα, Τα σωμάτια εκπέμπονται σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Ο ανιχνευτής παράγει μια (ηχητική) ένδειξη για κάθε σωμάτιο που ανιχνεύει. Λόγω της λειτουργίας του ανιχνευτή, για ένα διάστημα μετά την ανίχνευση του σωμάτιου, ο ανιχνευτής είναι «τυφλός», οπότε και να έρθει ένα σωμάτιο, δεν θα το ανιχνεύσει. Όταν όμως ο ανιχνευτής δεν έχει τυφλωθεί, ανιχνεύει πάντα κάθε σωμάτιο που θα εκπέμψει η πηγή. Ένα παράδειγμα της λειτουργίας φαίνεται στο Σχήμα 7: Στο (A) φαίνεται μια σειρά από αφίξεις σωματιδίων, στο (B) φαίνονται οι «τυφλές» περίοδοι του ανιχνευτή με γκρίζο, και στο (C) φαίνεται η διαδικασία των ηχητικών ενδείξεων.

   (α΄) Έχει η διαδικασία των ενδείξεων ανεξάρτητα διαστήματα? Έχει η διαδικασία των ενδείξεων στατικά διαστήματα? Είναι η διαδικασία Poisson? Εξηγήστε με λίγα λόγια.

   (β΄) Ποια είναι η πυκνότητα πιθανότητας του χρόνου μεταξύ των αφίξεων των ηχητικών ενδείξεων?

   (γ΄) Τι ποσοστό του χρόνου το χρόνου είναι ο ανιχνευτής τυφλός?

   (δ΄) Απαντήστε το προηγούμενο ερώτημα, κάνοντας όμως την ακόλουθη τροποποίηση στο μοντέλο του ανιχνευτή: Όταν ο ανιχνευτής είναι τυφλός και έχουμε άφιξη σωμάτιου, ο χρόνος παραμονής σε αυτή την κατάσταση επεκτείνεται. Ο ανιχνευτής παύει να είναι τυφλός μόνο όταν το τελευταίο σωμάτιο που παράχθηκε από την πηγή ήταν πριν από χρόνο T. Ουσιαστικά, κάθε άφιξη σωμάτιου ξεκινά τη δικιά της τυφλή περίοδο. Παράδειγμα της λειτουργίας του ανιχνευτή σε αυτή την περίπτωση φαίνεται στο Σχήμα 7. Συγκεκριμένα, αν στο (A) φαίνεται ένα παράδειγμα αφίξεων, στο (D) φαίνονται με γκρίζο οι τυφλές περίοδοι, και στο (E) φαίνονται οι ηχητικές ενδείξεις.

Λύση:

(α΄) Η διαδικασία δεν έχει ανεξάρτητα διαστήματα, γιατί αν γνωρίζουμε τι συνέβη σε ένα διάστημα, αποκτούμε γνώση για το τι θα γίνει και σε άλλα. Για παράδειγμα, αν $T = 10$, και στο διάστημα $(0, 1)$ έχουμε ηχητικό σήμα, αποκλείεται να είχαμε και στο $(2, 3)$. Η διαδικασία όμως έχει στατικά διαστήματα, γιατί ο αριθμός των αφίξεων σε ένα διάστημα εξαρτάται μόνο από το μέγεθος του διαστήματος. Αφού η διαδικασία έχει δεν έχει ανεξάρτητα διαστήματα, δεν μπορεί να είναι Poisson.

(β΄) Όταν έρθει μια άφιξη ηχητικού σήματος, ο ανιχνευτής είναι τυφλός για χρόνο , και ακολούθως έχουμε άφιξη μετά από εκθετικό χρόνο. Άρα, η πυκνότητα του χρόνου X μεταξύ δύο αφίξεων είναι

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < T, \\ \lambda \exp[-\lambda(x - T)], & x \geq T. \end{cases}$$

(γ΄) Έστω D (Down) η κατάσταση στην οποία ο ανιχνευτής είναι τυφλός, και U (Up) η κατάσταση στην οποία μπορεί να ανιχνεύσει. Έστω $E[D] = T$ η μέση διάρκεια μιας κατάστασης D και $E[U]$ η μέση διάρκεια μιας κατάστασης U. Έχουμε $E[D] = T$ και $E[U] = 1/\lambda$. Προφανώς το ποσοστό του χρόνου που ο ανιχνευτής είναι τυφλός είναι

$$p = \frac{E[D]}{E[D] + E[U]} = \frac{T}{T + 1/\lambda}.$$

(δ΄) Σε αυτή την περίπτωση, συνεχίζει να ισχύει ότι $E[U] = 1/\lambda$, αλλά ο μέσος χρόνος που ο ανιχνευτής είναι τυφλός δεν είναι πλέον $E[D] = T$. Έστω T ο τυχαίος χρόνος μεταξύ μιας άφιξης σωματιδίου *που τυφλώνει τον ανιχνευτή*, και της επόμενης άφιξης. Προφανώς ο χρόνος T είναι κατανεμημένος εκθετικά, με παράμετρο λ. Παρατηρούμε πως:

$$\begin{aligned}
E[D] &= \int_0^\infty E[D|T = t]\lambda \exp(-\lambda t)\, dt \\
&= \int_0^T E[D|T = t]\lambda \exp(-\lambda t)\, dt + \int_T^\infty E[D|T = t]\lambda \exp(-\lambda t)\, dt \\
&= \int_0^T (E[D] + t)\lambda \exp(-\lambda t)\, dt + \int_T^\infty T\lambda \exp(-\lambda t)\, dt \\
&= E[D] \int_0^T \lambda \exp(-\lambda t)\, dt + \int_o^T \lambda t \exp(-\lambda t)\, dt + T \int_T^\infty \lambda \exp(-\lambda t)\, dt \\
&= E[D]\, [-\exp(-\lambda t)]_0^T - \int_0^T t[\exp(-\lambda t)]'\, dt + T[-\exp(-\lambda t)]_T^\infty \\
&= E[D][1 - \exp(-\lambda T)] - [t \exp(-\lambda t)]_0^T + \int_0^T \exp(-\lambda t) + T \exp(-\lambda T) \\
&= E[D](1 - \exp(-\lambda T)) - \frac{1}{\lambda} \int_0^T \exp(-\lambda t) \\
&= E[D](1 - \exp(-\lambda T)) + \frac{1}{\lambda}(1 - \exp(-\lambda T)),
\end{aligned}$$

και τελικά, λύνοντας ως προς $E[D]$, προκύπτει πως

$$E[D] = \frac{\exp(\lambda T) - 1}{\lambda}.$$

Άρα τελικά, το ζητούμενο ποσοστό ισούται με

$$p = \frac{E[D]}{E[D] + E[U]} = \frac{\exp(\lambda T) - 1}{\exp(\lambda T)}.$$

42. **(Τέσσερις Μηχανές)** Τέσσερις μηχανές έχουν τοποθετηθεί σε ένα εργοστάσιο, και λειτουργούν με τον ακόλουθο τρόπο. Η μηχανή i λειτουργεί για χρόνο εκθετικά κατανεμημένο με ρυθμό λ_i, και αφού παύσει να λειτουργεί μπαίνει σε μια κατάσταση επιδιόρθωσης που κρατά επίσης εκθετικό χρόνο, με ρυθμό μ_i. Οι διαδικασίες αυτές για τις 4 μηχανές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Έστω $X_i(t) = 1$ όταν λειτουργεί η μηχανή i και $X_i(t) = 0$ όταν δεν λειτουργεί.

(α΄) Σε ποιο ποσοστό του χρόνου λειτουργεί κάθε μια από τις μηχανές? Σε ποιο ποσοστό του χρόνου λειτουργούν ταυτοχρόνως όλες?

(β΄) Έστω
$$\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), X_3(t), X_4(t)).$$
Εξηγήστε γιατί η διαδικασία είναι αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου. Δείξτε γραφικά την αλυσίδα σε ένα διάγραμμα καταστάσεων, όπου θα φαίνονται όλες οι καταστάσεις και οι ρυθμοί μετάβασης. Βρείτε μια απλή έκφραση για τις οριακές πιθανότητες.

(γ΄) Είναι η άνω αλυσίδα αντιστρέψιμη στο χρόνο?

Λύση:

(α΄) Παρατηρήστε ότι κάθε μια από τις $\{X_i(t)\}$ είναι αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου. Υπολογίζοντας τις εξισώσεις ισορροπίας, εύκολα προκύπτει πως, στη μόνιμη κατάσταση,
$$P(X_i = 1) = \frac{1/\lambda_i}{1/\lambda_i + 1/\mu_i}, \;\; P(X_i = 0) = \frac{1/\mu_i}{1/\lambda_i + 1/\mu_i}. \tag{5}$$
Επιπλέον, λόγω ανεξαρτησίας, η πιθανότητα να λειτουργούν και οι 4 ισούται με
$$P(X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = 1) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)P(X_3 = 1)P(X_4 = 1) = \prod_{i=1}^{4} \frac{1/\lambda_i}{1/\lambda_i + 1/\mu_i}.$$

(β΄) Η διαδικασία $\mathbf{X}(t)$ είναι αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου γιατί όλες οι μεταβάσεις είναι εκθετικά κατανεμημένες, και ανεξάρτητες μεταξύ τους. Παρατηρήστε πως υπάρχουν 16 καταστάσεις, και κάθε μια επικοινωνεί με άλλες 4. Στο Σχήμα 8 έχει σχεδιαστεί το διάγραμμα καταστάσεων. Παρατηρήστε ότι η πρώτη και η τελευταία σειρά καταστάσεων επικοινωνούν μεταξύ τους, όπως και η πρώτη και η τελευταία στήλη. Λόγω ανεξαρτησίας, έχουμε
$$P(X_1 = i_1, X_2 = i_2, X_3 = i_3, X_4 = i_4) = P(X_1 = i_1)P(X_2 = i_2)P(X_3 = i_3)P(X_4 = i_4),$$
όπου οι πιθανότητες του δεξιού σκέλους δίνονται από την (5).

(γ΄) Διαισθητικά, είναι αναμενόμενο ότι η αλυσίδα είναι αντιστρέψιμη, λόγω της ανεξαρτησίας των διαδικασιών $\{X_i(t)\}$. Για να δείξουμε την αντιστρεψιμότητα, πρέπει να δείξουμε ότι για οποιεσδήποτε καταστάσεις που επικοινωνούν μεταξύ τους, πρέπει οι ρυθμοί μετάβασης μεταξύ τους να είναι ίσοι. Πράγματι, αν εστιάσουμε στις μεταβάσεις λόγω της μηχανής 4:
$$\begin{aligned} P(X_1 = i_1, X_2 = i_2, X_3 = i_3, X_4 = 0)\mu_4 &= P(X_1 = i_1, X_2 = i_2, X_3 = i_3, X_4 = 1)\lambda_4 \\ \Leftrightarrow P(X_1 = i_1)P(X_2 = i_2)P(X_3 = i_3)P(X_4 = 0)\mu_4 &= P(X_1 = i_1)P(X_2 = i_2)P(X_3 = i_3)P(X_4 = 1)\lambda_4 \\ \Leftrightarrow P(X_4 = 0)\mu_4 &= P(X_4 = 1)\lambda_4, \end{aligned}$$
που εύκολα προκύπτει ότι ισχύει, με χρήση της (5). Λόγω συμμετρίας, προκύπτει η ισότητα και για τα άλλα ζεύγη των συγκοινωνούντων καταστάσεων, που αντιστοιχούν στις μεταβάσεις των άλλων μηχανών, άρα η αλυσίδα είναι αντιστρέψιμη στο χρόνο.

43. **(Ελληνική πιάτσα ταξί)** Σε μια πιάτσα ταξί έρχονται ταξί με ρυθμό μ και πελάτες με ρυθμό λ. Όταν ένα ταξί έρθει και δεν βρει πελάτη να περιμένει, αναχωρεί. Όταν ένα ταξί έρθει και βρει πελάτες, παίρνει τον πρώτο στην ουρά και μέχρι άλλους 3 πελάτες που έχουν τον ίδιο προορισμό με τον πρώτο πελάτη. Κάθε ένας από τους υπόλοιπους πελάτες έχει τον ίδιο προορισμό με τον πρώτο στην ουρά πελάτη με πιθανότητα p, ανεξάρτητα από τους άλλους πελάτες. Δεν υπάρχει περιορισμός στο πόσοι πελάτες μπορεί να περιμένουν στην πιάτσα.

(α΄) Να μοντελοποιήσετε το σύστημα ως μια αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου, δείχνοντας τις πιθανότητες μετάβασης.

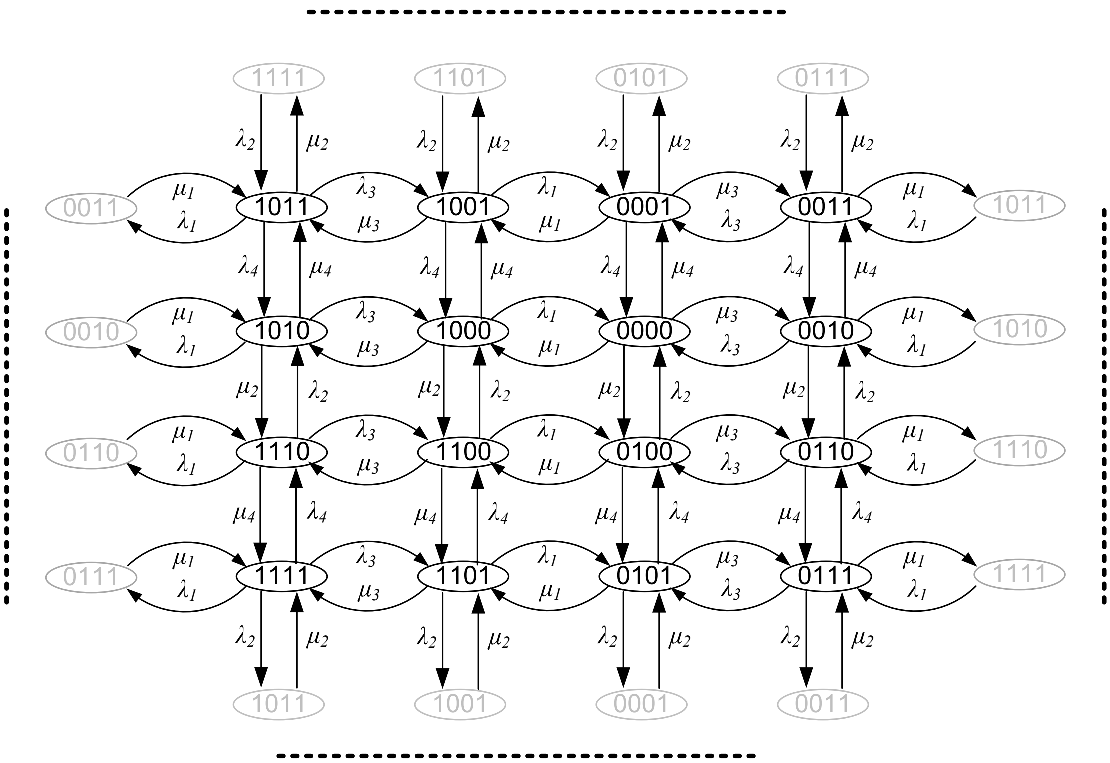
(β΄) Μπορείτε να μαντέψετε ποια είναι η συνθήκη ώστε να υπάρχει στατική κατανομή; Στα επόμενα σκέλη, να θεωρήσετε την στατική κατανομή γνωστή.

(γ΄) Στην στατική κατανομή, πόσοι πελάτες περιμένουν κατά μέσο όρο στην ουρά όταν έρχεται ένα ταξί;

(δ΄) Πόσο χρόνο κάνει κατά μέσο όρο ένας πελάτης για να μπει σε ταξί;

(ε΄) Τι ποσοστό των ταξί φεύγουν με k πελάτες, όπου $k = 0, 1, 2, 3$;

Λύση:



Σχήμα 8: Άσκηση 41

(α΄) Μπορούμε να μοντελοποιήσουμε το σύστημα ως μια αλυσίδα Markov με καταστάσεις $0, 1, 2, \ldots$ που εκφράζουν το πλήθος των πελατών που περιμένουν στην πιάτσα. Σχετικά με τους ρυθμούς μεταβάσεων προς μεγαλύτερες καταστάσεις, έχουμε, απλά,

$$q_{n,n+1} = \lambda, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Σχετικά με τους ρυθμούς μεταβάσεως προς μικρότερες καταστάσεις, υπάρχει η επιπλοκή ότι η άφιξη ενός ταξί μπορεί να αφαιρέσει από την ουρά πάνω από 1 πελάτη. Θα εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση που είμαστε στην κατάσταση $n \geq 4$. Με δεδομένο ότι έχουμε άφιξη ταξί,

i. θα πάμε από την κατάσταση n στην κατάσταση $n-1$ αν οι $n-1$ πελάτες έχουν όλοι διαφορετικό προορισμό από τον πελάτη που είναι στην κορυφή της ουράς, άρα

$$q_{n,n-1} = \mu(1-p)^{n-1},$$

ii. θα πάμε από την κατάσταση n στην κατάσταση $n-2$ αν ακριβώς ένας από τους $n-1$ πελάτες έχει τον ίδιο προορισμό με τον πελάτη που είναι στην κορυφή της ουράς, άρα

$$q_{n,n-2} = \mu(n-1)p(1-p)^{n-2},$$

iii. θα πάμε από την κατάσταση n στην κατάσταση $n-3$ αν ακριβώς δύο από τους $n-1$ πελάτες έχουν τον ίδιο προορισμό με τον πελάτη που είναι στην κορυφή της ουράς, άρα

$$q_{n,n-3} = \mu(n-1)(n-2)p^2(1-p)^{n-3}/2,$$

iv. θα πάμε από την κατάσταση n στην κατάσταση $n-4$ αν τουλάχιστον τρεις από τους $n-1$ έχουν τον ίδιο προορισμό με τον πελάτη που είναι στην κορυφή της ουράς, άρα

$$q_{n,n-3} = \mu\left[1-(1-p)^{n-1}-(n-1)p(1-p)^{n-2}-(n-1)(n-2)p^2(1-p)^{n-3}/2\right].$$

Τέλος, εύκολα προκύπτουν και οι ειδικές περιπτώσεις

$$\begin{aligned} q_{1,0} &= \mu, \\ q_{2,0} &= \mu p, \\ q_{2,1} &= \mu(1-p), \\ p_{3,0} &= \mu p^2, \\ p_{3,1} &= 2\mu p(1-p), \\ p_{3,2} &= \mu(1-p)^2, \end{aligned}$$

(β΄) Σχετικά με τη συνθήκη ύπαρξης στατικής κατανομής, παρατηρούμε πως όταν το σύστημα έχει πολλούς πελάτες, πάντοτε κάθε ταξί θα φεύγει με 4 πελάτες, άρα αυτοί θα φεύγουν με ρυθμό 4μ, άρα πρέπει $4\mu > \lambda$.

(γ΄) Επειδή τα ταξί έρχονται σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson, ισχύει η ιδιότητα PASTA, επομένως ένα ταξί θα βλέπει κατά μέσο όρο

$$N = \sum_{i=0}^{\infty} i\pi_i$$

πελάτες.

(δ΄) Σύμφωνα με το νόμο του Little, αφού έρχονται πελάτες με ρυθμό λ, κάθε πελάτης θα περιμένει, σύμφωνα με το νόμο του Little, για χρόνο N/λ.

(ε΄) Έστω $P(A_k)$ η πιθανότητα ένα ταξί που έρχεται να φύγει με k πελάτες, όπου $k = 0, 1, 2, 3$. Θα κάνουμε δέσμευση στο πόσους πελάτες βλέπει όταν έρχεται, και έχουμε

$$P(A_k) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_k | n \text{ πελάτες στο σύστημα όταν έρχεται το ταξί})\pi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{n,n-k}}{\mu}\pi_n.$$

44. **(Διάδοση κουτσομπολιών)** Σε ένα χωριό με N κατοίκους κάθε ζεύγος κατοίκων συναντάται σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ, ανεξάρτητα από όλα τα άλλα ζεύγη. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ένας κάτοικος μαθαίνει ένα κουτσομπολιό. Από κει και πέρα, όποτε ένας κάτοικος που ξέρει το κουτσομπολιό συναντά ένα κάτοικο που δεν το ξέρει, του το μεταφέρει.

(α΄) Το μοντέλο των συναντήσεων απλοποιεί την άσκηση, αλλά είναι προβληματικό. Εξηγήστε γιατί και δώστε αντιπαραδείγματα που δείχνουν ότι το μοντέλο είναι κακό.

(β΄) Να μοντελοποιήσετε το πλήθος $X(t)$ των κατοίκων που ξέρουν το κουτσομπολιό ως μια αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου, προσδιορίζοντας τους ρυθμούς μετάβασης.

(γ΄) Υπάρχει στατική κατανομή; Γιατί;

(δ΄) Να δώσετε μια έκφραση για τον μέσο χρόνο που θα χρειαστεί για να μάθουν όλοι οι κάτοικοι του χωριού το κουτσομπολιό.

Λύση:

(α΄) Το μοντέλο δεν είναι καλό διότι οι άνθρωποι συναντούνται συχνά ομαδικά. Για παράδειγμα, την ώρα που κάποιος μπαίνει στο καφενείο του χωριού, συναντάται ταυτόχρονα με πολλούς. Επίσης, οι χρόνοι μεταξύ των συναντήσεων είναι συχνά (περίπου) πολλαπλάσια της ημέρας ή της εβδομάδας και όχι εκθετικοί, και εξαρτώνται από ζεύγος σε ζεύγος.

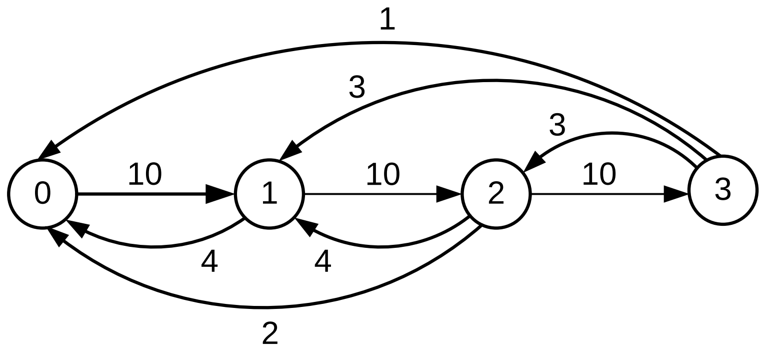
(β΄) Έστω πως ακριβώς i άτομα ξέρουν το κουτσομπολιό. Υπάρχουν $i(N - i)$ ζεύγη ατόμων που αποτελούνται από ένα άτομο που ξέρει το κουτσομπολιό και ένα άτομο που δεν το ξέρει. Κάθε ένα από αυτά τα ζεύγη θα συναντηθούν μετά από εκθετικό χρόνο με ρυθμό λ, επομένως η επόμενη συνάντηση θα γίνει μετά από χρόνο εκθετικά κατανεμημένο με ρυθμό $i(N - i)\lambda$, ανεξάρτητα από πότε έγινε η τελευταία συνάντηση. Επομένως, το πλήθος $X(t)$ είναι αλυσίδα Markov, με ρυθμούς μετάβασης όλους μηδενικούς εκτός των ακόλουθων:

$$q_{i,i+1} = \lambda i(N - i), \quad 1 \le i \le N - 1.$$

(γ΄) Η αλυσίδα δεν έχει στατική κατανομή, διότι η κατάσταση N είναι απορροφητική.

(δ΄) Παρατηρήστε ότι η αλυσίδα θα διατρέξει όλες τις καταστάσεις $1, 2, \ldots, N-1$ ακριβώς μια φορά, και θα καθίσει στην κατάσταση i εκθετικό χρόνο X_i με $E(X_i) = \frac{1}{\lambda i(N-i)}$, επομένως ο ζητούμενος χρόνος ισούται με

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\lambda i(N - i)}.$$



Σχήμα 9: Άσκηση 44. Οι ρυθμοί μετάβασης έχουν μονάδες αντίστροφου έτους.

45. **(Πληθυσμός Σκύλων)** Ο πληθυσμός των σκύλων που ζουν με μια οικογένεια ανθρώπων ακολουθεί το ακόλουθο μοντέλο: ο **πατέρας** απαγορεύει να υπάρχουν πάνω από 3 σκύλοι ανά πάσα στιγμή. Τα **παιδιά** φέρνουν σκύλους έτσι ώστε ο χρόνος μεταξύ των αφίξεων να είναι εκθετικός, με μέση τιμή $1/10$ του έτους. Η **μαμά** κάνει μαγειρικά ατυχήματα που προκαλούν δηλητηριάσεις στους σκύλους. (Τα μέλη της οικογένειας έχουν ανοσία). Τα μαγειρικά ατυχήματα είναι σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό 8 ανά έτος. Κάθε δηλητηρίαση συνεπάγεται χρηματικό κόστος 50 ευρώ ανά σκύλο, για επίσκεψη στον κτηνίατρο, και είναι θανατηφόρα (παρά την βέβαιη επίσκεψη στον κτηνίατρο) για κάθε σκύλο με πιθανότητα 0.5, ανεξάρτητα από τους άλλους σκύλους. Δίνεται ότι η συντήρηση κάθε σκύλου είναι 10 ευρώ μηνιαίως.

(α΄) Καταστρώστε μια αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου που να μοντελοποιεί την εξέλιξη του πληθυσμού στην οικογένεια. Πρέπει να φαίνονται όλες οι πιθανές μεταβάσεις, και οι ρυθμοί μετάβασης. Γράψτε τις εξισώσεις ισορροπίας. (Δεν χρειάζεται να υπολογίσετε με νούμερα τη στατική κατανομή, αρκεί να γράψετε εξισώσεις που να την περιγράφουν πλήρως.)

(β΄) Πόσα δίνει ετησίως κατά μέσο όρο η οικογένεια για τη συντήρηση των σκύλων της και πόσα για τον κτηνίατρο? Κατά μέσο όρο πόσο παραμένει ένας σκύλος στην οικογένεια? Δώστε τις απαντήσεις σας συναρτήσει των πιθανοτήτων της στατικής κατανομής. (Που ΔΕΝ χρειάζεται να έχετε υπολογίσει.) Δώστε μια σύντομη αιτιολόγηση για κάθε απάντηση.

Λύση:

(α΄) Η αλυσίδα Markov φαίνεται στο Σχήμα 9. Στην κατάσταση i βρισκόμαστε όταν έχουμε i σκύλους στην οικογένεια. Όταν $i < 3$, πηγαίνουμε στην κατάσταση $i + 1$ με ρυθμό 10, λόγω νέων αφίξεων. Όταν είμαστε στην κατάσταση 3, έχουμε δηλητηριάσεις με ρυθμό 8. Κάθε δηλητηρίαση μας οδηγεί στην κατάσταση 0 με πιθανότητα $1/8$ (αν πεθάνουν και οι τρεις σκύλοι), στην κατάσταση 1 με πιθανότητα $3/8$ (αν επιβιώσει ένας σκύλος), και στην κατάσταση 2 με πιθανότητα $3/8$ (αν επιβιώσουν δύο σκύλοι). Άρα, οι αντίστοιχοι ρυθμοί μετάβασης είναι $8 \times \frac{1}{8} = 1$, $8 \times \frac{3}{8}$, και $8 \times \frac{3}{8} = 3$. Υπάρχει και η περίπτωση να μην έχουμε κανένα θάνατο. Το ενδεχόμενο αυτό έχει πιθανότητα $1/8$, και δεν οδηγεί σε μετάβαση. Παρόμοια μπορούμε να υπολογίσουμε τους ρυθμούς μετάβασης από την 2 στις 0 και 1 και από την 1 στην 0.

Κατά τα γνωστά, οι εξισώσεις ισορροπίας είναι

$$\begin{aligned} 10P_0 &= 4P_1 + 2P_2 + P_3, \\ 14P_1 &= 10P_0 + 4P_2 + 3P_3, \\ 16P_2 &= 10P_1 + 3P_3, \\ 7P_3 &= 10P_2, \end{aligned}$$

οι οποίες, μαζί με την $P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 1$, μας δίνουν

$$P_0 = \frac{71}{386},\ P_1 = \frac{205}{772},\ P_2 = \frac{175}{772},\ P_3 = \frac{125}{386}.$$

(β΄) i. Τα χρήματα που χρειάζονται ετησίως είναι $12 \times 10(P_1 + 2P_2 + 3P_3)$, δηλαδή ο μέσος όρος των σκύλων της οικογένειας, επί το κόστος ανά σκύλο.

ii. Οι δηλητηριάσεις γίνονται με ρυθμό 8 ανά έτος. Από αυτές, ένα ποσοστό P_3 στοιχίζει 3×50 ευρώ, ένα ποσοστό P_2 στοιχίζει 2×50 ευρώ, ένα ποσοστό P_1 στοιχίζει 50 ευρώ, ενώ ένα ποσοστό P_0 δεν στοιχίζει τίποτα. Άρα, το μέσο ετήσιο κόστος είναι $8 \times 50 \times (P_1 + 2P_2 + 3P_3)$.

iii. Ο ρυθμός με τον οποίο εισέρχονται σκύλοι στην οικογένεια είναι $10(1 - P_3)$. Ο μέσος αριθμός σκύλων είναι $P_1 + 2P_2 + 3P_3$, άρα η μέση διάρκεια παραμονής στην οικογένεια είναι

$$\frac{P_1 + 2P_2 + 3P_3}{10(1 - P_3)},$$

βάσει του νόμου του Little.

6η Ομάδα Ασκήσεων

46. **(Εξυπηρετητής με διακοπές)** Μια ουρά αναμονής αποτελείται από έναν εξυπηρετητή και K θέσεις αναμονής (συμπεριλαμβανομένης της θέσης του εξυπηρετούμενου). Οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικοί με παράμετρο μ, και οι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων είναι επίσης εκθετικοί με παράμετρο λ. Όποτε ο εξυπηρετητής διαπιστώσει ότι δεν υπάρχει πελάτης για να εξυπηρετήσει, περιμένει εκθετικό χρόνο με παράμετρο ν και, εφόσον στο μεταξύ δεν έχει έρθει πελάτης, αναχωρεί για διακοπές συγκεκριμένης (μη τυχαίας) διάρκειας V. Κατά την απουσία του, οι πελάτες που έρχονται συσσωρεύονται στην ουρά αναμονής. Σε κάθε περίπτωση, πελάτες που έρχονται και βρίσκουν K πελάτες στο σύστημα αναχωρούν.

(α΄) Μπορεί το σύστημα να μοντελοποιηθεί ως αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου; Γιατί;

(β΄) Μοντελοποιήστε το σύστημα χρησιμοποιώντας μια αλυσίδα Markov διακριτού χρόνου, και προσδιορίστε όλες τις πιθανότητες μετάβασης.

(γ΄) Υπάρχει στατική κατανομή; Γιατί; Γράψτε τις εξισώσεις ισορροπίας της άνω αλυσίδας. Μην λύσετε το σύστημα εξισώσεων, και στη συνέχεια θεωρήστε την στατική κατανομή γνωστή.

(δ΄) Τι ποσοστό του *χρόνου* (και όχι των καταστάσεων της διακριτής αλυσίδας) ο εξυπηρετητής βρίσκεται σε διακοπές; Τι ποσοστό των πελατών βρίσκουν το σύστημα σε διακοπές;

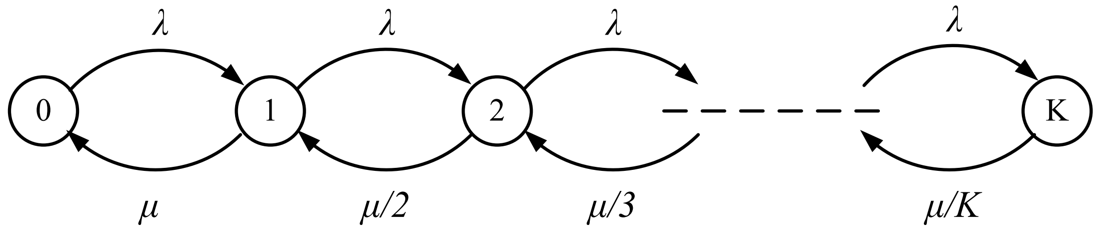
Λύση:

(α΄) Το σύστημα δεν μπορεί να μοντελοποιηθεί ως μια αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου διότι το πως θα εξελιχθεί το σύστημα εξαρτάται όχι μόνο από το παρόν, αλλά και από το παρελθόν. Για παράδειγμα, αν το σύστημα είναι σε διακοπές, τότε αν μάθουμε πότε ακριβώς μπήκε σε διακοπές, μαθαίνουμε και το πότε ακριβώς θα βγει από τις διακοπές.

(β΄) Όμως, μπορούμε να μοντελοποιήσουμε το σύστημα ως μια αλυσίδα Markov *διακριτού* χρόνου, αποτελούμενη από τις καταστάσεις V (που αντιστοιχεί στην περίπτωση που το σύστημα είναι σε διακοπές) και $0,\ 1,\ \ldots, K$. Σχετικά με τις πιθανότητες μετάβασης της αλυσίδας, έχουμε

$$\begin{aligned}
P_{n,n+1} &= \frac{\lambda}{\lambda+\mu}, \quad 1 \le n \le K-1, \\
P_{n,n-1} &= \frac{\mu}{\lambda+\mu}, \quad 1 \le n \le K-1, \\
P_{0,1} &= \frac{\lambda}{\lambda+\nu}, \\
P_{0,V} &= \frac{\nu}{\lambda+\nu}, \\
P_{K,K-1} &= 1, \\
P_{V,i} &= e^{-V\lambda}\frac{(V\lambda)^i}{i!}, \quad 0 \le i \le K-1, \\
P_{V,K} &= 1 - \sum_{i=0}^{K-1} P_{V,i}.
\end{aligned}$$

Όλες οι υπόλοιπες πιθανότητες μετάβασης είναι μηδενικές.



Σχήμα 10: Η Αλυσίδα Markov της Άσκησης 46.

(γ΄) Επειδή τη αλυσίδα έχει πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων, και όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν μεταξύ τους, υπάρχει στατική κατανομή. Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$\begin{aligned} P_V &= P_0 \frac{\nu}{\nu+\lambda}, \\ P_1 \frac{\mu}{\mu+\lambda} &= P_0 \frac{\lambda}{\nu+\lambda}, \\ P_i \frac{\mu}{\mu+\lambda} &= P_{i-1} \frac{\lambda}{\mu+\lambda} \Leftrightarrow P_i = P_{i-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right), \quad i = 2, \ldots, K. \end{aligned}$$

(δ΄) Για να υπολογίσουμε το ποσοστό του χρόνου που το σύστημα βρίσκεται σε κάποια κατάσταση, σκεφτόμαστε ως εξής: Έστω πως έχει περάσει ένα μεγάλο πλήθος μεταβάσεων, N, της αλυσίδας. Από αυτές,

i. $\pi_V N$ από αυτές ήταν στην κατάσταση V, και η παραμονή σε αυτή την κατάσταση ήταν για συνολικό διάστημα $\pi_V NV$.
ii. $\pi_i N$ ήταν στην κατάσταση i, όπου $1 \le i \le K-1$, και η παραμονή στην κατάσταση i ήταν για συνολικό διάστημα $\frac{\pi_i N}{\lambda+\mu}$.
iii. $\pi_0 N$ ήταν στην κατάσταση 0, και η παραμονή στην κατάσταση 0 ήταν για συνολικό διάστημα $\frac{\pi_0 N}{\lambda+\nu}$.
iv. $\pi_K N$ ήταν στην κατάσταση K, και η παραμονή στην κατάσταση K ήταν για συνολικό διάστημα $\frac{\pi_K N}{\mu}$.

Επομένως, το ποσοστό του χρόνου που το σύστημα βρίσκεται σε διακοπές είναι ίσο με

$$q_V = \frac{\pi_V V}{\pi_V V + \frac{\pi_0}{\lambda+\nu} + \frac{\sum_{i=1}^{K-1} \pi_i}{\lambda+\mu} + \frac{\pi_K}{\mu}}.$$

Επειδή οι αφίξεις είναι Poisson, από την ιδιότητα PASTA προκύπτει πως το ποσοστό των αφίξεων που βλέπουν το σύστημα σε διακοπές είναι λq_V.

47. **(Αγχωμένος Υπάλληλος)** Σε μια τράπεζα υπάρχει ένας μόνο ταμίας, και συνολικά $< \infty$ θέσης αναμονής (συμπεριλαμβανομένης και της θέσης μπροστά στον ταμία.) Οι αφίξεις πελατών έρχονται σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda > 0$. Ο ταμίας αγχώνεται εύκολα όταν βλέπει κόσμο, και αυτό έχει ως αποτέλεσμα η απόδοσή του να πέφτει καθώς αυξάνει η ουρά. Συγκεκριμένα, ο ρυθμός εξυπηρέτησης όταν υπάρχουν στο σύστημα n πελάτες είναι μ/n, όπου εννοείται $\mu > 0$.

(α΄) Να περιγράψετε το σύστημα σαν μια αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου. Να σημειώσετε όλες τις δυνατές μεταβάσεις, και τους αντίστοιχους ρυθμούς. Υπολογίστε, σε κλειστή μορφή, την πιθανότητα το σύστημα να έχει i πελάτες, όπου $i = 0, \ldots, K$.

(β΄) Ποιο είναι το ποσοστό των πελατών που καταφτάνουν στην τράπεζα αλλά δεν μπαίνουν επειδή οι θέσεις είναι όλες κατειλημμένες?

(γ΄) Αν $K = \infty$, δηλαδή υπάρχουν άπειρες θέσεις αναμονής, πότε η αλυσίδα έχει μόνιμη κατάσταση? Εξηγήστε με λόγια.

Λύση:

(α΄) Η αλυσίδα Markov φαίνεται στο Σχήμα 10. Για να βρούμε την στατική κατανομή, κατά τα γνωστά από τη θεωρία, χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις ισορροπίας:

$$P_0 \lambda = P_1 \mu \Rightarrow P_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0.$$

Επίσης,

$$P_1\lambda = P_2\frac{\mu}{2} \Rightarrow P_2 = 2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0,$$

και συνεχίζοντας με παρόμοιο τρόπο προκύπτει τελικά πως

$$P_n = n!\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0,\ \ n = 1,\ldots,K.$$

Επειδή όμως $P_0 + P_1 + \ldots + P_K = 1$, τελικά

$$P_0 = \left[\sum_{n=1}^{K} n!\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]^{-1},$$

άρα και τελικά

$$P_i = \frac{i!\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}{\sum_{n=1}^{K} n!\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n},\ \ i = 1,\ldots,K.$$

(β΄) Το ποσοστό είναι ίσο με την πιθανότητα να είμαστε στην κατάσταση .

(γ΄) Ανεξάρτητα από τη σχέση που έχουν τα λ και μ μεταξύ τους, είναι προφανές ότι αργά η γρήγορα θα τύχει να βρεθούν τόσοι πελάτες n ώστε ο υπάλληλος να πανικοβληθεί τόσο ώστε $\lambda > \frac{\mu}{n}$, και τότε η αλυσίδα θα μεγαλώνει χωρίς περιορισμό. Συνεπώς, για οποιονδήποτε συνδυασμό των λ, μ, δεν υπάρχει μόνιμη κατάσταση.

48. **(Μοντέλο Γραφειοκρατίας)** Έστω τρεις υπηρεσίες του Ελληνικού Δημοσίου, A, B, C, σε ένα υπουργείο. Υποθέτουμε ότι οι αφίξεις πολιτών προς εξυπηρέτηση σε κάθε μια από αυτές γίνεται σύμφωνα με ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς (σε πολίτες ανά μέρα) $r_A = 100$, $r_B = 200$, $r_C = 400$. Οι χρόνοι μεταξύ των αναχωρήσεων από κάθε υπηρεσία, εφόσον υπάρχουν πολίτες, είναι εκθετικοί, με ρυθμούς μ ανά ημέρα και για τις τρεις υπηρεσίες. Οι πολίτες κατά την αποχώρησή τους από μια υπηρεσία είτε μετακινούνται σε άλλη υπηρεσία είτε ολοκληρώνουν την υπόθεσή τους και αποχωρούν. Οι πολίτες που βγαίνουν από την A μετακινούνται στην B με πιθανότητα $\frac{1}{3}$, στην C με πιθανότητα $\frac{1}{3}$, και αποχωρούν με πιθανότητα $\frac{1}{3}$. Οι πολίτες που βγαίνουν από την B με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ μετακινούνται στην A, και με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ αποχωρούν. Τέλος, οι πολίτες της C, μετά την αναχώρησή τους, πάντοτε κατευθύνονται στην B.

(α΄) Υπολογίστε τον ρυθμό με τον οποίο έχουμε αφίξεις πολιτών (όλων των ειδών) στις τρεις υπηρεσίες, υποθέτοντας ότι υπάρχει μόνιμη κατάσταση. Να συνυπολογίσετε και τους καινούργιους πολίτες, και αυτούς που έρχονται από άλλες υπηρεσίες.

(β΄) Πόσο πρέπει να είναι το μ για να υπάρχει μόνιμη κατάσταση?

(γ΄) Υποθέτοντας ότι υπάρχει μόνιμη κατάσταση, ποιοι είναι οι μέσοι όροι των πολιτών στις τρεις υπηρεσίες? Ποια υπηρεσία έχει τον περισσότερο κόσμο?

(δ΄) Κατά μέσο όρο, πόσο διαρκεί η παραμονή ενός πολίτη στο υπουργείο?

Για να απαντήσετε τα άνω, μπορείτε να υποθέσετε ότι το σύστημα βρίσκεται στην μόνιμη κατάσταση

Λύση:

(α΄) Παρατηρήστε ότι το σύστημα μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένα ανοικτό δίκτυο Jackson, όπου τον ρόλο των πακέτων παίζουν οι πολίτες. Κατά τα γνωστά από τη θεωρία, οι ρυθμοί με τους οποίους έχουμε αφίξεις, είτε εξωτερικές, είτε εσωτερικές, στο σύστημα, ικανοποιούν τις εξισώσεις:

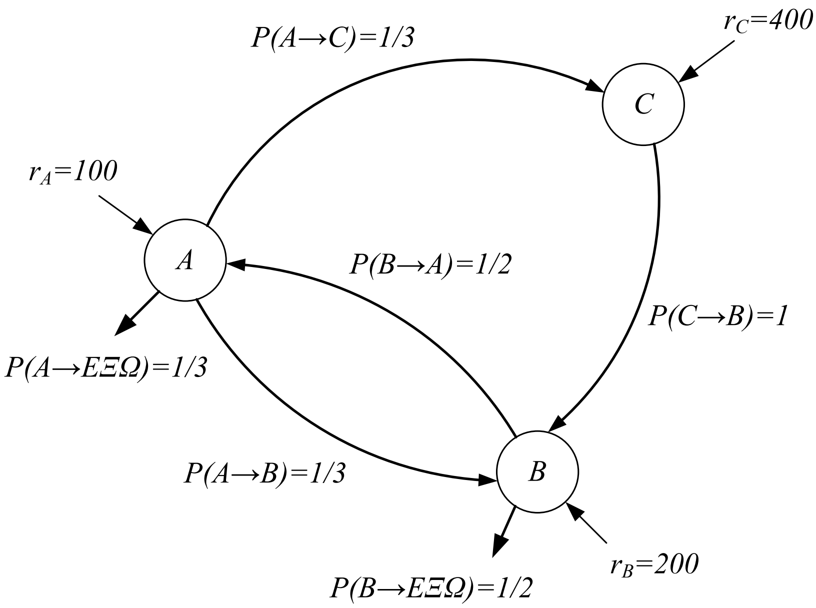
$$\lambda_A = 1 + \frac{1}{2}\lambda_B,\ \ \lambda_B = 2 + \lambda_C + \frac{1}{2}\lambda_A,\ \ \lambda_C = 1 + \frac{1}{3}\lambda_A,$$

οι οποίες, όταν επιλυθούν, προκύπτει πως

$$\lambda_A = 600,\ \ \lambda_B = 1000,\ \ \lambda_C = 600.$$

(β΄) Θα πρέπει, κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$\mu > 1000.$$



Σχήμα 11: Άσκηση 47.

(γ΄) Κατά τα γνωστά από τη θεωρία, κάθε υπηρεσία θα έχει κατανομή πολιτών ίδια με αυτή της ουράς M/M/1 όπου ο ρυθμός εισόδου περιλαμβάνει τις αφίξεις και από έξω, και από τις άλλες υπηρεσίες. Άρα τελικά, τα μέσα πλήθη των πολιτών στις υπηρεσίες θα είναι:

$$L_A = \frac{600}{\mu - 600}, \;\; L_B = \frac{1000}{\mu - 1000}, \;\; L_C = \frac{600}{\mu - 600},$$

και προφανώς η πολυπληθέστερη είναι η B.

(δ΄) Από το νόμο του Little, κατά μέσο όρο η παραμονή θα διαρκεί

$$W = \frac{L_A + L_B + L_C}{\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C}.$$

49. **(Μια ουρά αναμονής με αποθάρρυνση)** Σε μια ουρά με άπειρες θέσεις αναμονής φτάνουν πελάτες σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson ρυθμού λ. Αν υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα, ένας πελάτης μένει με πιθανότητα $\frac{1}{n+1}$, ανεξάρτητα από όλους τους άλλους που ήρθαν ή θα έρθουν. Ο εξυπηρετητής χρειάζεται για κάθε πελάτη εκθετικό χρόνο με ρυθμό $\mu > 0$, ανεξάρτητα από τους άλλους. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης και η διαδικασία των αφίξεων είναι επίσης ανεξάρτητα.

(α΄) Αν υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα, ποια είναι η κατανομή του χρόνου που απομένει μέχρι την επόμενη άφιξη και γιατί?

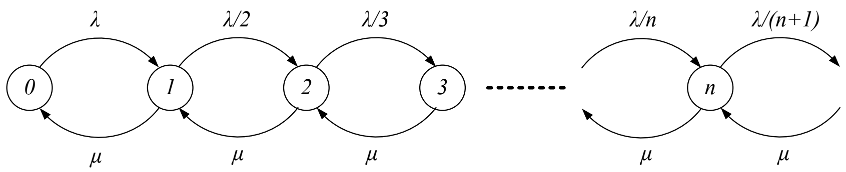
(β΄) Εξηγήστε γιατί η διαδικασία $X(t)$ των πελατών μπορεί να μοντελοποιηθεί ως αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου.

(γ΄) Είναι η αλυσίδα αντιστρέψιμη στο χρόνο? Για ποιες τιμές των λ, μ δεν υπάρχει μόνιμη κατάσταση? Ποια είναι η κατανομή των πελατών στη μόνιμη κατάσταση?

Λύση:

(α΄) Όταν υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα, η διαδικασία όλων των αφίξεων είναι Poisson με ρυθμό λ, και κάθε άφιξη μένει με πιθανότητα $\frac{1}{n+1}$. Κατά τα γνωστά από τη θεωρία, η διαδικασία των αφίξεων που μένουν είναι Poisson με ρυθμό $\frac{\lambda}{n+1}$, άρα ο χρόνος μέχρι την επόμενη άφιξη είναι εκθετικά κατανεμημένος με ρυθμό $\frac{\lambda}{n+1}$.

(β΄) Βάσει του προηγούμενου σκέλους, αν είμαστε στην κατάσταση $X(t) = n$, έχουμε πιθανές μεταβάσεις στις καταστάσεις $X(t) = n + 1$ και $X(t) = n - 1$ (αν $n > 0$) σε εκθετικούς χρόνους, ανεξάρτητους μεταξύ τους. Άρα, η διαδικασία είναι Markov συνεχούς χρόνου, και μάλιστα διαδικασία θανάτων-γεννήσεων. Το διάγραμμα καταστάσεων, με τις καταστάσεις και τους ρυθμούς μετάβασης φαίνεται στο Σχήμα 12.



Σχήμα 12: Άσκηση 48

(γ΄) Αφού η διαδικασία είναι γεννήσεων-θανάτων, είναι αντιστρέψιμη στο χρόνο. Διαισθητικά, είναι προφανές ότι για οποιεσδήποτε τιμές των λ, μ θα υπάρχει στατική κατανομή, γιατί όσο μεγάλο και να είναι το λ, από κάποια κατάσταση n και μετά θα έχουμε $\lambda/n < \mu$. Αυτό μπορεί να επιβεβαιωθεί αν προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε την στατική κατανομή. Έχουμε:

$$\lambda P_0 = \mu P_1 \Rightarrow P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0,$$
$$\lambda P_1 = 2\mu P_2 \Rightarrow P_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2,$$

και συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο προκύπτει τελικά

$$P_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0.$$

Για το P_0 έχουμε:

$$P_0 + P_1 + \ldots + P_n = 1 \Rightarrow P_0 \left[1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \ldots\right] \Rightarrow P_0 = \exp\left[-\frac{\lambda}{\mu}\right],$$

οπότε

$$P_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \exp\left[-\frac{\lambda}{\mu}\right],$$

δηλαδή το πλήθος των πελατών στο σύστημα ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\frac{\lambda}{\mu}$. Παρατηρήστε πως τα άνω ισχύουν για οποιονδήποτε συνδυασμό των λ, μ, εφόσον βέβαια $\mu > 0$.

50. **(Μοντελοποίηση Ζωοκλοπής στην Ορεινή Κρήτη)** Έστω τρεις στάνες, A, B, C, στις παρυφές του Ψηλορείτη. Υποθέτουμε ότι οι αφίξεις νέων προβάτων σε κάθε μια από αυτές γίνεται σύμφωνα με ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς $\lambda_A = 1$, $\lambda_B = 2$, $\lambda_C = 1$ και οφείλονται σε αγορές και γεννήσεις. Οι χρόνοι μεταξύ των αναχωρήσεων, εφόσον υπάρχουν πρόβατα, είναι εκθετικοί με ρυθμούς μ_A, μ_B, μ_C. Τα πρόβατα κατά την αποχώρησή τους είτε μετακινούνται σε άλλες στάνες (περίπτωση ζωοκλοπής) είτε σφάζονται. Τα πρόβατα που βγαίνουν από την A μετακινούνται στην B, με πιθανότητα $\frac{1}{2}$, στην στάνη C με πιθανότητα $\frac{1}{3}$, και σφάζονται με πιθανότητα $\frac{1}{6}$. Τα πρόβατα που βγαίνουν από την στάνη B με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ μετακινούνται στη στάνη A, και με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ σφαγιάζονται. Τέλος, τα πρόβατα της στάνης C, μετά την αναχώρησή τους από τη στάνη, πάντοτε κατευθύνονται στην στάνη B.

(α΄) Υπολογίστε τον ρυθμό με τον οποίο έχουμε αφίξεις προβάτων (όλων των ειδών) στις τρεις στάνες, υποθέτοντας ότι υπάρχει μόνιμη κατάσταση.

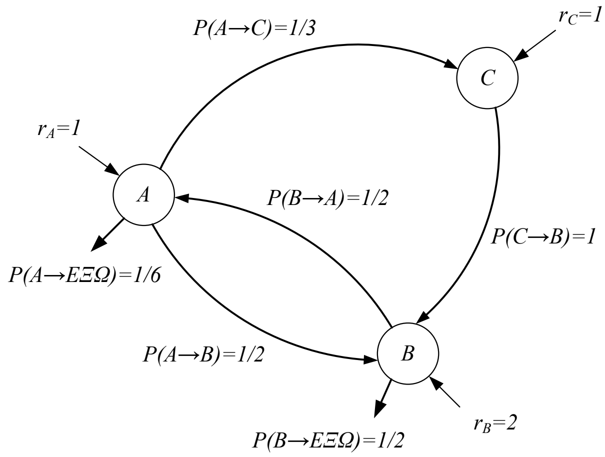
(β΄) Τι σχέσεις πρέπει να ικανοποιούν οι ρυθμοί αναχώρησης μ_A, μ_B, μ_C ώστε ο πληθυσμός σε όλες τις στάνες να μην τείνει στο άπειρο?

(γ΄) Γράψτε ένα τύπο που να δίνει την πιθανότητα να έχουμε 1 πρόβατο στη στάνη A, 3 πρόβατα στην στάνη B, και 7 πρόβατα στην στάνη C.

Λύση:

Παρατηρήστε ότι το σύστημα μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένα ανοικτό δίκτυο Jackson, όπου τον ρόλο των πακέτων παίζουν τα πρόβατα. Κατά τα γνωστά από τη θεωρία, οι ρυθμοί με τους οποίους έχουμε αφίξεις, είτε εξωτερικές, είτε εσωτερικές, στο σύστημα, ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$\lambda_A = 1 + \frac{1}{2}\lambda_B, \quad \lambda_B = 2 + \lambda_C + \frac{1}{2}\lambda_A, \quad \lambda_C = 1 + \frac{1}{3}\lambda_A,$$



(α΄)

Σχήμα 13: Άσκηση 49

οι οποίες, όταν επιλυθούν, προκύπτει πως

$$\lambda_A = \frac{30}{7}, \ \lambda_B = \frac{46}{7}, \ \ \lambda_C = \frac{17}{7}.$$

(β΄) Θα πρέπει, κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$\mu_A \geq \frac{30}{7}, \ \mu_B \geq \frac{46}{7}, \ \mu_C \geq \frac{17}{7}$$

(γ΄) Κατά τα γνωστά από τη θεωρία, κάθε στάνη θα έχει κατανομή προβάτων ίδια με αυτή της ουράς M/M/1, και μάλιστα οι αριθμοί των προβάτων είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους. Άρα,

$$P(N_A = 1, N_B = 3, N_C = 7) = (1 - \frac{\lambda_A}{\mu_A})(1 - \frac{\lambda_B}{\mu_B})(1 - \frac{\lambda_C}{\mu_C}) \left(\frac{\lambda_A}{\mu_A}\right) \left(\frac{\lambda_B}{\mu_B}\right)^3 \left(\frac{\lambda_C}{\mu_C}\right)^7.$$

51. **(Ουρά M/G/1)** Ένας εξυπηρετητής χρειάζεται για να εξυπηρετήσει ένα πελάτη τυχαίο χρόνο με συνεχή κατανομή $f(x)$. Στον εξυπηρετητή έρχονται πελάτες σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Όταν ένας πελάτη έρθει και βρει τον εξυπηρετητή απασχολημένο, περιμένει σε μια ουρά, η οποία δεν έχει περιορισμό στη χωρητικότητά της.

(α΄) Μπορεί να μοντελοποιηθεί το πλήθος των πελατών συναρτήσει του χρόνου $\{X(t) : t \geq 0\}$ ως μια αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου; Εξηγήστε γιατί, π.χ. με ένα αντιπαράδειγμα.

(β΄) Δείξτε ότι το σύστημα μπορεί να μοντελοποιηθεί ως μια αλυσίδα Markov διακριτού χρόνου αν επικεντρωθούμε στο πλήθος των πελατών σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές. Ποιες είναι αυτές;

(γ΄) Προσδιορίστε τις πιθανότητες μετάβασης αυτής της αλυσίδας.

Λύση:

(α΄) Το πλήθος των πελατών $\{X(t) : t \geq 0\}$ δεν είναι αλυσίδα Markov, διότι οι χρόνοι εξυπηρέτησης δεν είναι εκθετικοί. Για παράδειγμα, αν οι χρόνοι είναι τυχαία μεν, αλλά κατά μέσο όρο K και με πολύ μικρή απόκλιση, τότε η πιθανότητα $P(X(t_0 + \epsilon) = k - 1|X(t_0) = k)$ είναι μικρότερη από την $P(X(t + \epsilon) = k - 1|X(t) = k, t_0 - K \leq t \leq t_0)$, γιατί στη δεύτερη περίπτωση αναμένουμε μια αναχώρηση από το σύστημα άμεσα.

(β΄) Όμως, έστω η ακολουθία Τ.Μ $X(k)$ που εκφράζει το πλήθος των πελατών που παραμένουν στο σύστημα τη χρονική στιγμή που αναχωρεί ο πελάτης k. Αυτή η ακολουθία είναι αλυσίδα Markov διακριτού χρόνου, γιατί τη χρονική στιγμή της αναχώρησης του πελάτη k το σύστημα περιγράφεται πλήρως από την $X(k)$ και το πότε είχαμε την τελευταία άφιξη μας είναι αδιάφορο, αφού οι αφίξεις είναι εκθετικές.

(γ΄) Σχετικά με τις πιθανότητες μετάβασης αυτής της αλυσίδας, παρατηρήστε καταρχάς πως, για $k > 0$,

$$P_{k,k+i-1} = \int_0^\infty f(x) e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^i}{i!} \, dx, \quad i = 0, 1, \ldots$$

Η εξίσωση προκύπτει κάνοντας δέσμευση στο χρόνο εξυπηρέτησης του επόμενου πελάτη. Αν αυτός ο χρόνος ήταν ίσος με x, τότε το πλήθος των πελατών που ήρθαν στο ενδιάμεσο είναι κατανεμημένο Poisson με μέση τιμή λx. Παρομοίως,

$$P_{0,i} = \int_0^\infty f(x) e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^i}{i!} \, dx, \quad i = 0, 1, \ldots$$