ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, ΚΑΘ: ΙΩΑΝΝΗΣ ΚΟΝΤΟΓΙΑΝΝΗΣ, ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ
ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2016

1. **(Survivor)** *(1 μονάδα)* Δύο ομάδες, η A και η B, δίνουν διαδοχικούς αγώνες που λήγουν με τη νίκη της ομάδας A με πιθανότητα p ή τη νίκη της ομάδας B με πιθανότητα $1-p$, ανεξάρτητα από τους άλλους αγώνες. Νικά η ομάδα που θα κάνει πρώτη 10 νίκες. Να γράψετε ένα σύστημα εξισώσεων που μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την πιθανότητα να κερδίσει η ομάδα A, χρησιμοποιώντας δεσμευμένες πιθανότητες. ΜΗΝ λύσετε το σύστημα.

2. **(Εξυπηρετητής με διακοπές)** *(2.5 μονάδες)* Μια ουρά αναμονής αποτελείται από έναν εξυπηρετητή και K θέσεις αναμονής (συμπεριλαμβανομένης της θέσης του εξυπηρετούμενου). Οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικοί με παράμετρο μ, και οι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων είναι επίσης εκθετικοί με παράμετρο λ. Όποτε ο εξυπηρετητής διαπιστώσει ότι δεν υπάρχει πελάτης για να εξυπηρετήσει, περιμένει εκθετικό χρόνο με παράμετρο ν και, εφόσον στο μεταξύ δεν έχει έρθει πελάτης, αναχωρεί για διακοπές συγκεκριμένης (μη τυχαίας) διάρκειας V. Κατά την απουσία του, οι πελάτες που έρχονται συσσωρεύονται στην ουρά αναμονής. Σε κάθε περίπτωση, πελάτες που έρχονται και βρίσκουν K πελάτες στο σύστημα αναχωρούν.

   (α΄) Μπορεί το σύστημα να μοντελοποιηθεί ως αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου; Γιατί;

   (β΄) Μοντελοποιήστε το σύστημα χρησιμοποιώντας μια αλυσίδα Markov διακριτού χρόνου, και προσδιορίστε όλες τις πιθανότητες μετάβασης.

   (γ΄) Υπάρχει στατική κατανομή; Γιατί; Γράψτε τις εξισώσεις ισορροπίας της άνω αλυσίδας. Μην λύσετε το σύστημα εξισώσεων, και στη συνέχεια θεωρήστε την στατική κατανομή γνωστή.

   (δ΄) Τι ποσοστό του *χρόνου* (και όχι των καταστάσεων της διακριτής αλυσίδας) ο εξυπηρετητής βρίσκεται σε διακοπές; Τι ποσοστό των πελατών βρίσκουν το σύστημα σε διακοπές;

3. **(Διάδοση κουτσομπολιών)** *(2 μονάδες)* Σε ένα χωριό με N κατοίκους κάθε ζεύγος κατοίκων συναντάται σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ, ανεξάρτητα από όλα τα άλλα ζεύγη. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ένας κάτοικος μαθαίνει ένα κουτσομπολιό. Από κει και πέρα, όποτε ένας κάτοικος που ξέρει το κουτσομπολιό συναντά ένα κάτοικο που δεν το ξέρει, του το μεταφέρει.

   (α΄) Το μοντέλο των συναντήσεων απλοποιεί την άσκηση, αλλά είναι προβληματικό. Εξηγήστε γιατί και δώστε αντιπαραδείγματα που δείχνουν ότι το μοντέλο είναι κακό.

   (β΄) Να μοντελοποιήσετε το πλήθος $X(t)$ των κατοίκων που ξέρουν το κουτσομπολιό ως μια αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου, προσδιορίζοντας τους ρυθμούς μετάβασης.

   (γ΄) Υπάρχει στατική κατανομή; Γιατί;

   (δ΄) Να δώσετε μια έκφραση για τον μέσο χρόνο που θα χρειαστεί για να μάθουν όλοι οι κάτοικοι του χωριού το κουτσομπολιό.

4. **(Ελληνική πιάτσα ταξί)** *(2.5 μονάδες)* Σε μια πιάτσα ταξί έρχονται ταξί με ρυθμό μ και πελάτες με ρυθμό λ. Όταν ένα ταξί έρθει και δεν βρει πελάτη να περιμένει, αναχωρεί. Όταν ένα ταξί έρθει και βρει πελάτες, παίρνει τον πρώτο στην ουρά και μέχρι άλλους 3 πελάτες που έχουν τον ίδιο προορισμό με τον πρώτο πελάτη. Κάθε ένας από τους υπόλοιπους πελάτες έχει τον ίδιο προορισμό με τον πρώτο στην ουρά πελάτη με πιθανότητα p, ανεξάρτητα από τους άλλους πελάτες. Δεν υπάρχει περιορισμός στο πόσοι πελάτες μπορεί να περιμένουν στην πιάτσα.

   (α΄) Να μοντελοποιήσετε το σύστημα ως μια αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου, δείχνοντας τις πιθανότητες μετάβασης.

   (β΄) Μπορείτε να μαντέψετε ποια είναι η συνθήκη ώστε να υπάρχει στατική κατανομή; Στα επόμενα σκέλη, να θεωρήσετε την στατική κατανομή γνωστή.

   (γ΄) Στην στατική κατανομή, πόσοι πελάτες περιμένουν κατά μέσο όρο στην ουρά όταν έρχεται ένα ταξί;

   (δ΄) Πόσο χρόνο κάνει κατά μέσο όρο ένας πελάτης για να μπει σε ταξί;

   (ε΄) Τι ποσοστό των ταξί φεύγουν με k πελάτες, όπου $k = 0, 1, 2, 3$;

5. **(Ουρά M/G/1)** *(2 μονάδες)* Ένας εξυπηρετητής χρειάζεται για να εξυπηρετήσει ένα πελάτη τυχαίο χρόνο με συνεχή κατανομή $f(x)$. Στον εξυπηρετητή έρχονται πελάτες σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Όταν ένας πελάτη έρθει και βρει τον εξυπηρετητή απασχολημένο, περιμένει σε μια ουρά, η οποία δεν έχει περιορισμό στη χωρητικότητά της.

   (α΄) Μπορεί να μοντελοποιηθεί το πλήθος των πελατών συναρτήσει του χρόνου $\{X(t) : t \geq 0\}$ ως μια αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου; Εξηγήστε γιατί, π.χ. με ένα αντιπαράδειγμα.

   (β΄) Δείξτε ότι το σύστημα μπορεί να μοντελοποιηθεί ως μια αλυσίδα Markov διακριτού χρόνου αν επικεντρωθούμε στο πλήθος των πελατών σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές. Ποιες είναι αυτές;

   (γ΄) Προσδιορίστε τις πιθανότητες μετάβασης αυτής της αλυσίδας.

Λύσεις Τελικής Εξέτασης Ιουνίου Ακ. Έτους 2016-2017

1. **(Survivor)** Δύο ομάδες, η A και η B, δίνουν διαδοχικούς αγώνες που λήγουν με τη νίκη της ομάδας A με πιθανότητα p ή τη νίκη της ομάδας B με πιθανότητα $1-p$, ανεξάρτητα από τους άλλους αγώνες. Νικά η ομάδα που θα κάνει πρώτη 10 νίκες. Να γράψετε ένα σύστημα εξισώσεων που μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την πιθανότητα να κερδίσει η ομάδα A, χρησιμοποιώντας δεσμευμένες πιθανότητες. ΜΗΝ λύσετε το σύστημα.

   Λύση: Έστω $P_{i,j}$ η πιθανότητα να κερδίσει η ομάδα A, με δεδομένο ότι το σκορ είναι $i-j$. Παρατηρήστε πως

$$\begin{aligned} P_{i,j} &= pP_{i+1,j} + (1-p)P_{i,j+1}, \quad 0 \le i,j \le 9, \\ P_{i,10} &= 0, \quad 0 \le i \le 9, \\ P_{10,j} &= 1, \quad 0 \le j \le 9. \end{aligned}$$

   Η πρώτη ομάδα από τις άνω εξισώσεις προέκυψε κάνοντας δέσμευση στο αποτέλεσμα του αγώνα που γίνεται όταν το σκορ είναι $i-j$. Οι άλλες δύο ομάδες αποτελούν αρχικοποίηση.

   Παρατηρήστε πως έχουμε ένα γραμμικό σύστημα με 120 εξισώσεις και 120 αγνώστους (δεν εμφανίζεται πουθενά η $P_{10,10}$). Το σύστημα είναι αραιό και μπορεί να λυθεί γρήγορα, λόγω της δομής του.

2. **(Εξυπηρετητής με διακοπές)** Μια ουρά αναμονής αποτελείται από έναν εξυπηρετητή και K θέσεις αναμονής (συμπεριλαμβανομένης της θέσης του εξυπηρετούμενου). Οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικοί με παράμετρο μ, και οι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων είναι επίσης εκθετικοί με παράμετρο λ. Όποτε ο εξυπηρετητής διαπιστώσει ότι δεν υπάρχει πελάτης για να εξυπηρετήσει, περιμένει εκθετικό χρόνο με παράμετρο ν και, εφόσον στο μεταξύ δεν έχει έρθει πελάτης, αναχωρεί για διακοπές συγκεκριμένης (μη τυχαίας) διάρκειας V. Κατά την απουσία του, οι πελάτες που έρχονται συσσωρεύονται στην ουρά αναμονής. Σε κάθε περίπτωση, πελάτες που έρχονται και βρίσκουν K πελάτες στο σύστημα αναχωρούν.

   (α΄) Μπορεί το σύστημα να μοντελοποιηθεί ως αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου; Γιατί;

   (β΄) Μοντελοποιήστε το σύστημα χρησιμοποιώντας μια αλυσίδα Markov διακριτού χρόνου, και προσδιορίστε όλες τις πιθανότητες μετάβασης.

   (γ΄) Υπάρχει στατική κατανομή; Γιατί; Γράψτε τις εξισώσεις ισορροπίας της άνω αλυσίδας. Μην λύσετε το σύστημα εξισώσεων, και στη συνέχεια θεωρήστε την στατική κατανομή γνωστή.

   (δ΄) Τι ποσοστό του *χρόνου* (και όχι των καταστάσεων της διακριτής αλυσίδας) ο εξυπηρετητής βρίσκεται σε διακοπές; Τι ποσοστό των πελατών βρίσκουν το σύστημα σε διακοπές;

   Λύση:

   (α΄) Το σύστημα δεν μπορεί να μοντελοποιηθεί ως μια αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου διότι το πως θα εξελιχθεί το σύστημα εξαρτάται όχι μόνο από το παρόν, αλλά και από το παρελθόν. Για παράδειγμα, αν το σύστημα είναι σε διακοπές, τότε αν μάθουμε πότε ακριβώς μπήκε σε διακοπές, μαθαίνουμε και το πότε ακριβώς θα βγει από τις διακοπές.

   (β΄) Όμως, μπορούμε να μοντελοποιήσουμε το σύστημα ως μια αλυσίδα Markov *διακριτού* χρόνου, αποτελούμενη από τις καταστάσεις V (που αντιστοιχεί στην περίπτωση που το σύστημα είναι σε διακοπές) και $0,\ 1,\ \ldots, K$. Σχετικά με τις πιθανότητες μετάβασης της αλυσίδας, έχουμε

$$\begin{aligned} P_{n,n+1} &= \frac{\lambda}{\lambda+\mu}, \quad 1 \le n \le K-1, \\ P_{n,n-1} &= \frac{\mu}{\lambda+\mu}, \quad 1 \le n \le K-1, \\ P_{0,1} &= \frac{\lambda}{\lambda+\nu}, \\ P_{0,V} &= \frac{\nu}{\lambda+\nu}, \\ P_{K,K-1} &= 1, \\ P_{V,i} &= e^{-V\lambda}\frac{(V\lambda)^i}{i!}, \quad 0 \le i \le K-1, \\ P_{V,K} &= 1 - \sum_{i=0}^{K-1} P_{V,i}. \end{aligned}$$

Όλες οι υπόλοιπες πιθανότητες μετάβασης είναι μηδενικές.

(γ΄) Επειδή τη αλυσίδα έχει πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων, και όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν μεταξύ τους, υπάρχει στατική κατανομή. Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$\begin{aligned} P_V &= P_0 \frac{\nu}{\nu+\lambda}, \\ P_1 \frac{\mu}{\mu+\lambda} &= P_0 \frac{\lambda}{\nu+\lambda}, \\ P_i \frac{\mu}{\mu+\lambda} &= P_{i-1} \frac{\lambda}{\mu+\lambda} \Leftrightarrow P_i = P_{i-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right), \quad i = 2, \ldots, K. \end{aligned}$$

(δ΄) Για να υπολογίσουμε το ποσοστό του χρόνου που το σύστημα βρίσκεται σε κάποια κατάσταση, σκεφτόμαστε ως εξής: Έστω πως έχει περάσει ένα μεγάλο πλήθος μεταβάσεων, N, της αλυσίδας. Από αυτές,

i. $\pi_V N$ από αυτές ήταν στην κατάσταση V, και η παραμονή σε αυτή την κατάσταση ήταν για συνολικό διάστημα $\pi_V N V$.

ii. $\pi_i N$ ήταν στην κατάσταση i, όπου $1 \le i \le K-1$, και η παραμονή στην κατάσταση i ήταν για συνολικό διάστημα $\frac{\pi_i N}{\lambda+\mu}$.

iii. $\pi_0 N$ ήταν στην κατάσταση 0, και η παραμονή στην κατάσταση 0 ήταν για συνολικό διάστημα $\frac{\pi_0 N}{\lambda+\nu}$.

iv. $\pi_K N$ ήταν στην κατάσταση K, και η παραμονή στην κατάσταση K ήταν για συνολικό διάστημα $\frac{\pi_K N}{\mu}$.

Επομένως, το ποσοστό του χρόνου που το σύστημα βρίσκεται σε διακοπές είναι ίσο με

$$q_V = \frac{\pi_V V}{\pi_V V + \frac{\pi_0}{\lambda+\nu} + \frac{\sum_{i=1}^{K-1} \pi_i}{\lambda+\mu} + \frac{\pi_K}{\mu}}.$$

Επειδή οι αφίξεις είναι Poisson, από την ιδιότητα PASTA προκύπτει πως το ποσοστό των αφίξεων που βλέπουν το σύστημα σε διακοπές είναι λq_V.

3. **(Διάδοση κουτσομπολιών)** Σε ένα χωριό με N κατοίκους κάθε ζεύγος κατοίκων συναντάται σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ, ανεξάρτητα από όλα τα άλλα ζεύγη. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ένας κάτοικος μαθαίνει ένα κουτσομπολιό. Από κει και πέρα, όποτε ένας κάτοικος που ξέρει το κουτσομπολιό συναντά ένα κάτοικο που δεν το ξέρει, του το μεταφέρει.

(α΄) Το μοντέλο των συναντήσεων απλοποιεί την άσκηση, αλλά είναι προβληματικό. Εξηγήστε γιατί και δώστε αντιπαραδείγματα που δείχνουν ότι το μοντέλο είναι κακό.

(β΄) Να μοντελοποιήσετε το πλήθος $X(t)$ των κατοίκων που ξέρουν το κουτσομπολιό ως μια αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου, προσδιορίζοντας τους ρυθμούς μετάβασης.

(γ΄) Υπάρχει στατική κατανομή; Γιατί;

(δ΄) Να δώσετε μια έκφραση για τον μέσο χρόνο που θα χρειαστεί για να μάθουν όλοι οι κάτοικοι του χωριού το κουτσομπολιό.

Λύση:

(α΄) Το μοντέλο δεν είναι καλό διότι οι άνθρωποι συναντούνται συχνά ομαδικά. Για παράδειγμα, την ώρα που κάποιος μπαίνει στο καφενείο του χωριού, συναντάται ταυτόχρονα με πολλούς. Επίσης, οι χρόνοι μεταξύ των συναντήσεων είναι συχνά (περίπου) πολλαπλάσια της ημέρας ή της εβδομάδας και όχι εκθετικοί, και εξαρτώνται από ζεύγος σε ζεύγος.

(β΄) Έστω πως ακριβώς i άτομα ξέρουν το κουτσομπολιό. Υπάρχουν $i(N-i)$ ζεύγη ατόμων που αποτελούνται από ένα άτομο που ξέρει το κουτσομπολιό και ένα άτομο που δεν το ξέρει. Κάθε ένα από αυτά τα ζεύγη θα συναντηθούν μετά από εκθετικό χρόνο με ρυθμό λ, επομένως η επόμενη συνάντηση θα γίνει μετά από χρόνο εκθετικά κατανεμημένο με ρυθμό $i(N-i)\lambda$, ανεξάρτητα από πότε έγινε η τελευταία συνάντηση. Επομένως, το πλήθος $X(t)$ είναι αλυσίδα Markov, με ρυθμούς μετάβασης όλους μηδενικούς εκτός των ακόλουθων:

$$q_{i,i+1} = \lambda i(N-i), \quad 1 \le i \le N-1.$$

(γ΄) Η αλυσίδα δεν έχει στατική κατανομή, διότι η κατάσταση N είναι απορροφητική.

(δ΄) Παρατηρήστε ότι η αλυσίδα θα διατρέξει όλες τις καταστάσεις $1, 2, \ldots, N-1$ ακριβώς μια φορά, και θα καθίσει στην κατάσταση i εκθετικό χρόνο X_i με $E(X_i) = \frac{1}{\lambda i(N-i)}$, επομένως ο ζητούμενος χρόνος ισούται με

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\lambda i(N-i)}.$$

4. **(Ελληνική πιάτσα ταξί)** Σε μια πιάτσα ταξί έρχονται ταξί με ρυθμό μ και πελάτες με ρυθμό λ. Όταν ένα ταξί έρθει και δεν βρει πελάτη να περιμένει, αναχωρεί. Όταν ένα ταξί έρθει και βρει πελάτες, παίρνει τον πρώτο στην ουρά και μέχρι άλλους 3 πελάτες που έχουν τον ίδιο προορισμό με τον πρώτο πελάτη. Κάθε ένας από τους υπόλοιπους πελάτες έχει τον ίδιο προορισμό με τον πρώτο στην ουρά πελάτη με πιθανότητα p, ανεξάρτητα από τους άλλους πελάτες. Δεν υπάρχει περιορισμός στο πόσοι πελάτες μπορεί να περιμένουν στην πιάτσα.

(α΄) Να μοντελοποιήσετε το σύστημα ως μια αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου, δείχνοντας τις πιθανότητες μετάβασης.

(β΄) Μπορείτε να μαντέψετε ποια είναι η συνθήκη ώστε να υπάρχει στατική κατανομή; Στα επόμενα σκέλη, να θεωρήσετε την στατική κατανομή γνωστή.

(γ΄) Στην στατική κατανομή, πόσοι πελάτες περιμένουν κατά μέσο όρο στην ουρά όταν έρχεται ένα ταξί;

(δ΄) Πόσο χρόνο κάνει κατά μέσο όρο ένας πελάτης για να μπει σε ταξί;

(ε΄) Τι ποσοστό των ταξί φεύγουν με k πελάτες, όπου $k = 0, 1, 2, 3$;

Λύση:

(α΄) Μπορούμε να μοντελοποιήσουμε το σύστημα ως μια αλυσίδα Markov με καταστάσεις $0, 1, 2, \ldots$ που εκφράζουν το πλήθος των πελατών που περιμένουν στην πιάτσα. Σχετικά με τους ρυθμούς μεταβάσεων προς μεγαλύτερες καταστάσεις, έχουμε, απλά,

$$q_{n,n+1} = \lambda, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Σχετικά με τους ρυθμούς μεταβάσεως προς μικρότερες καταστάσεις, υπάρχει η επιπλοκή ότι η άφιξη ενός ταξί μπορεί να αφαιρέσει από την ουρά πάνω από 1 πελάτη. Θα εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση που είμαστε στην κατάσταση $n \geq 4$. Με δεδομένο ότι έχουμε άφιξη ταξί,

i. θα πάμε από την κατάσταση n στην κατάσταση $n-1$ αν οι $n-1$ πελάτες έχουν όλοι διαφορετικό προορισμό από τον πελάτη που είναι στην κορυφή της ουράς, άρα

$$q_{n,n-1} = \mu(1-p)^{n-1},$$

ii. θα πάμε από την κατάσταση n στην κατάσταση $n-2$ αν ακριβώς ένας από τους $n-1$ πελάτες έχει τον ίδιο προορισμό με τον πελάτη που είναι στην κορυφή της ουράς, άρα

$$q_{n,n-2} = \mu(n-1)p(1-p)^{n-2},$$

iii. θα πάμε από την κατάσταση n στην κατάσταση $n-3$ αν ακριβώς δύο από τους $n-1$ πελάτες έχουν τον ίδιο προορισμό με τον πελάτη που είναι στην κορυφή της ουράς, άρα

$$q_{n,n-3} = \mu(n-1)(n-2)p^2(1-p)^{n-3}/2,$$

iv. θα πάμε από την κατάσταση n στην κατάσταση $n-4$ αν τουλάχιστον τρεις από τους $n-1$ έχουν τον ίδιο προορισμό με τον πελάτη που είναι στην κορυφή της ουράς, άρα

$$q_{n,n-3} = \mu\left[1-(1-p)^{n-1} - (n-1)p(1-p)^{n-2} - (n-1)(n-2)p^2(1-p)^{n-3}/2\right].$$

Τέλος, εύκολα προκύπτουν και οι ειδικές περιπτώσεις

$$\begin{aligned} q_{1,0} &= \mu, \\ q_{2,0} &= \mu p, \\ q_{2,1} &= \mu(1-p), \\ p_{3,0} &= \mu p^2, \\ p_{3,1} &= 2\mu p(1-p), \\ p_{3,2} &= \mu(1-p)^2, \end{aligned}$$

(β΄) Σχετικά με τη συνθήκη ύπαρξης στατικής κατανομής, παρατηρούμε πως όταν το σύστημα έχει πολλούς πελάτες, πάντοτε κάθε ταξί θα φεύγει με 4 πελάτες, άρα αυτοί θα φεύγουν με ρυθμό 4μ, άρα πρέπει $4\mu > \lambda$.

(γ΄) Επειδή τα ταξί έρχονται σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson, ισχύει η ιδιότητα PASTA, επομένως ένα ταξί θα βλέπει κατά μέσο όρο

$$N = \sum_{i=0}^{\infty} i\pi_i$$

πελάτες.

(δ΄) Σύμφωνα με το νόμο του Little, αφού έρχονται πελάτες με ρυθμό λ, κάθε πελάτης θα περιμένει, σύμφωνα με το νόμο του Little, για χρόνο N/λ.

(ε΄) Έστω $P(A_k)$ η πιθανότητα ένα ταξί που έρχεται να φύγει με k πελάτες, όπου $k = 0, 1, 2, 3$. Θα κάνουμε δέσμευση στο πόσους πελάτες βλέπει όταν έρχεται, και έχουμε

$$P(A_k) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_k | n \text{ πελάτες στο σύστημα όταν έρχεται το ταξί}) \pi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{n,n-k}}{\mu} \pi_n.$$

5. **(Ουρά M/G/1)** Ένας εξυπηρετητής χρειάζεται για να εξυπηρετήσει ένα πελάτη τυχαίο χρόνο με συνεχή κατανομή $f(x)$. Στον εξυπηρετητή έρχονται πελάτες σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Όταν ένας πελάτη έρθει και βρει τον εξυπηρετητή απασχολημένο, περιμένει σε μια ουρά, η οποία δεν έχει περιορισμό στη χωρητικότητά της.

(α΄) Μπορεί να μοντελοποιηθεί το πλήθος των πελατών συναρτήσει του χρόνου $\{X(t) : t \geq 0\}$ ως μια αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου; Εξηγήστε γιατί, π.χ. με ένα αντιπαράδειγμα.

(β΄) Δείξτε ότι το σύστημα μπορεί να μοντελοποιηθεί ως μια αλυσίδα Markov διακριτού χρόνου αν επικεντρωθούμε στο πλήθος των πελατών σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές. Ποιες είναι αυτές;

(γ΄) Προσδιορίστε τις πιθανότητες μετάβασης αυτής της αλυσίδας.

Λύση:

(α΄) Το πλήθος των πελατών $\{X(t) : t \geq 0\}$ δεν είναι αλυσίδα Markov, διότι οι χρόνοι εξυπηρέτησης δεν είναι εκθετικοί. Για παράδειγμα, αν οι χρόνοι είναι τυχαία μεν, αλλά κατά μέσο όρο K και με πολύ μικρή απόκλιση, τότε η πιθανότητα $P(X(t_0 + \epsilon) = k - 1 | X(t_0) = k)$ είναι μικρότερη από την $P(X(t + \epsilon) = k - 1 | X(t) = k, t_0 - K \leq t \leq t_0)$, γιατί στη δεύτερη περίπτωση αναμένουμε μια αναχώρηση από το σύστημα άμεσα.

(β΄) Όμως, έστω η ακολουθία Τ.Μ $X(k)$ που εκφράζει το πλήθος των πελατών που παραμένουν στο σύστημα τη χρονική στιγμή που αναχωρεί ο πελάτης k. Αυτή η ακολουθία είναι αλυσίδα Markov διακριτού χρόνου, γιατί τη χρονική στιγμή της αναχώρησης του πελάτη k το σύστημα περιγράφεται πλήρως από την $X(k)$ και το πότε είχαμε την τελευταία άφιξη μας είναι αδιάφορο, αφού οι αφίξεις είναι εκθετικές.

(γ΄) Σχετικά με τις πιθανότητες μετάβασης αυτής της αλυσίδας, παρατηρήστε καταρχάς πως, για $k > 0$,

$$P_{k,k+i-1} = \int_0^{\infty} f(x) e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^i}{i!}\, dx, \quad i = 0, 1, \ldots$$

Η εξίσωση προκύπτει κάνοντας δέσμευση στο χρόνο εξυπηρέτησης του επόμενου πελάτη. Αν αυτός ο χρόνος ήταν ίσος με x, τότε το πλήθος των πελατών που ήρθαν στο ενδιάμεσο είναι κατανεμημένο Poisson με μέση τιμή λx. Παρομοίως,

$$P_{0,i} = \int_0^{\infty} f(x) e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^i}{i!}\, dx, \quad i = 0, 1, \ldots$$