ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
Σχεδίαση και Ανάλυση Αλγορίθμων
Διδάσκων: Ε. Μαρκάκης, Φθινοπωρινό εξάμηνο 2014-2015

2η Σειρά Ασκήσεων **Προθεσμία παράδοσης: 3 Δεκεμβρίου 2014**

Πρόβλημα 1. Θεωρήστε ένα πρόβλημα δρομολόγησης n εργασιών σε m όμοιους επεξεργαστές. Έστω t_i η χρονική διάρκεια που απαιτείται για να διεκπεραιωθεί η εργασία i (ίδια σε όλους τους επεξεργαστές). Οι εργασίες μπορούν να εκτελεστούν με οποιαδήποτε σειρά. Στόχος μας είναι να ολοκληρωθεί η εκτέλεση των εργασιών στον ελάχιστο δυνατό χρόνο. Θέλουμε να βελτιστοποιήσουμε λοιπόν την χρονική στιγμή στην οποία έχουν εκτελεστεί όλες οι εργασίες. Μία πρώτη προσέγγιση για να σχεδιάσουμε έναν άπληστο αλγόριθμο για το πρόβλημα είναι η εξής: βάζουμε τις εργασίες σε μια αυθαίρετη σειρά και σε κάθε βήμα, παίρνουμε την επόμενη στη σειρά εργασία και την αναθέτουμε στον επεξεργαστή που εκείνη τη στιγμή έχει κάνει τη λιγότερη δουλειά συνολικά.

1. Δείξτε ότι ο αλγόριθμος αυτός δεν είναι βέλτιστος. Για την ακρίβεια, για κάθε τιμή του $m \geq 2$, δείξτε ένα παράδειγμα στο οποίο ο αλγόριθμος δεν βρίσκει τη βέλτιστη λύση.

2. Μια άλλη προσέγγιση για το πρόβλημα είναι ότι ίσως πρέπει να είμαστε πιο προσεκτικοί στη σειρά με την οποία επεξεργαζόμαστε τις εργασίες. Έστω τώρα ότι πρώτα διατάσσουμε τις εργασίες σε φθίνουσα σειρά και μετά εκτελούμε πάλι τον παραπάνω αλγόριθμο (το σκεπτικό είναι ότι έτσι θα τελειώσουμε πρώτα με τις μεγάλες και πιο απαιτητικές εργασίες). Δείξτε πάλι μια οικογένεια παραδειγμάτων όπου ούτε και τώρα καταφέρνει ο αλγόριθμος να βρίσκει τη βέλτιστη λύση.

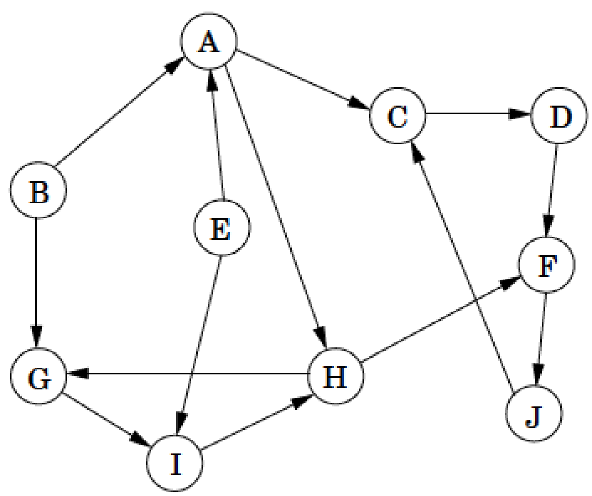
   Προαιρετικά: αν θέλετε σκεφτείτε πώς θα μπορούσε να λυθεί το πρόβλημα βέλτιστα.

Πρόβλημα 2. Σε ένα γράφο $G = (V, E)$, μια κάλυψη κορυφών (Vertex Cover) είναι ένα σύνολο $S \subseteq V$, έτσι ώστε για κάθε ακμή $(u, v) \in E$, τουλάχιστον μία εκ των κορυφών u, v ανήκουν στο S (κάθε πλευρά καλύπτεται από το S). Έστω ότι μας δίνεται ως είσοδος ένα μη προσανατολισμένο δέντρο $T = (V, E)$. Σχεδιάστε έναν αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού που να βρίσκει σε γραμμικό χρόνο το μέγεθος της μικρότερης κάλυψης κορυφών.

Πρόβλημα 3. Δίνεται μία ακολουθία n διαφορετικών μεταξύ τους ακεραίων αριθμών $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Σκοπός σας είναι η σχεδίαση ενός αλγορίθμου δυναμικού προγραμματισμού που θα βρίσκει μία υποακολουθία της X της οποίας τα στοιχεία: (α) είναι σε φθίνουσα σειρά και (β) έχουν το μεγαλύτερο δυνατό άθροισμα. Υποακολουθία μιας ακολουθίας στοιχείων X είναι οποιοδήποτε υποσύνολο των στοιχείων της X με την ίδια σειρά, όπως στην X. Π.χ. έστω $X = (10, 5, 3, 7, 2, 11)$. Η $(10, 3, 2, 11)$ είναι μία υποακολουθία της X, της οποίας όμως τα στοιχεία δεν είναι σε φθίνουσα σειρά. Η $(5, 3, 2)$ είναι μία υποακολουθία της X της οποίας τα στοιχεία είναι σε φθίνουσα σειρά και έχουν άθροισμα 10.

1. Ορίστε το υποπρόβλημα που θα χρησιμοποιήσετε για τη σχεδίαση του αλγορίθμου και δείξτε ότι ισχύει η optimal substructure ιδιότητα. Με βάση αυτό, γράψτε και δικαιολογήστε την αναδρομική σχέση για τη λύση του προβλήματός σας.
2. Γράψτε τον ψευδοκώδικα του αλγορίθμου σας, ο οποίος θέλουμε να επιστρέ□ει το άθροισμα των στοιχείων της βέλτιστης υποακολουθίας ΚΑΙ την ίδια την υποακολουθία.
3. Υπολογίστε την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

Πρόβλημα 4. Εκτελέστε τον αλγόριθμο που βρίσκει τις ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες (SCC) του γραφήματος G στην Εικόνα 1. Δείξτε συνοπτικά τα βήματα που γίνονται μέχρι να βρεθούν όλες οι συνιστώσες. Θεωρήστε ότι στην εκτέλεση του DFS για τον γράφο G^R, επιλέγετε πάντα την κορυφή που προηγείται αλφαβητικά.



Σχήμα 1: Ο γράφος της άσκησης 4.

Απαντήστε στα εξής ερωτήματα:

1. Ποια είναι η σειρά με την οποία ο αλγόριθμος βρίσκει τις ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες;
2. Ποιες είναι οι αφετηριακές ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες (source SCC's) και ποιες οι τερματικές συνιστώσες (sink SCC's);
3. Σχεδιάστε το μετα-γράφο των SCC's.

4. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός ακμών που πρέπει να προσθέσετε στο γράφημα ώστε να το κάνετε ισχυρά συνεκτικό;

Πρόβλημα 5. Δίνεται ένας ισχυρά συνδεδεμένος (strongly connected) κατευθυνόμενος γράφος $G = (V, E)$ με θετικά βάρη στις ακμές του, και ένας συγκεκριμένος κόμβος $s \in V$. Δώστε έναν πολυωνυμικό αλγόριθμο για την εύρεση των συντομότερων μονοπατιών ανάμεσα σε όλα τα ζεύγη κόμβων του γράφου, με τον περιορισμό ότι τα μονοπάτια αυτά πρέπει να περνάνε υποχρεωτικά από τον κόμβο s.

Πρόβλημα 6. Έστω $c_1, c_2, ..., c_n$, n διαφορετικά νομίσματα. Για οποιαδήποτε 2 διαφορετικά νομίσματα c_i, c_j, υπάρχει μια συναλλαγματική ισοτιμία $r_{i,j}$. Αυτό σημαίνει ότι με μια μονάδα του νομίσματος c_i, μπορείτε να αγοράσετε $r_{i,j}$ μονάδες του νομίσματος c_j.

(a) Δώστε εναν πολυωνυμικό αλγόριθμο ο οποίος για 2 νομίσματα c, c' βρίσκει την πιο συμφέρουσα ακολουθία συναλλαγών για τη μετατροπή του νομίσματος c στο νόμισμα c'.

(b) Οι ισοτιμίες ανανεώνονται όπως είναι γνωστό πολύ συχνά, με βάση την τρέχουσα ζήτηση και προσφορά. Είναι πιθανό σε κάποιες περιπτώσεις να παρουσιαστεί το εξής φαινόμενο: μπορεί να υπάρξει μετά από κάποια ανανέωση μια ακολουθία νομισμάτων $c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_k}$, έτσι ώστε $r_{i_1,i_2} \cdot r_{i_2,i_3} \cdots r_{i_k,i_1} > 1$. Αυτό σημαίνει ότι μπορείτε να βγάλετε κέρδος από μια τέτοια ακολουθία συναλλαγών. Π.χ. αν η ισοτιμία δολλαρίου-ευρώ είναι 0.8, η ισοτιμία ευρώ-λίρας είναι 0.6 και η ισοτιμία λίρας-δολλαρίου είναι 2.2, τότε ξεκινώντας από 1 δολλάριο μπορείτε να κερδίσετε 1.056 δολλάρια. Τέτοιες ανωμαλίες συνήθως διαρκούν λίγα δευτερόλεπτα, παρ' όλα αυτά, μπορούν να αποτελέσουν μία τακτική για εύκολο κέρδος. Δώστε έναν αλγόριθμο για την ανίχνευση τέτοιων φαινομένων.