Ανάλυση Αλγορίθμων και Δομές Δεδομένων

Φροντιστήριο 1

Γιώργος Ζώης

Υποψήφιος Διδάκτορας,
Τμήμα Πληροφορικής, Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών &
University Pierre and Marie Curie - Paris 6

georzois@aueb.gr

Οκτώβριος 2014

Σκιαγράφηση

1. Συμβολισμοί Τάξης Μεγέθους
   - Ορισμοί

Σκιαγράφηση

1. Συμβολισμοί Τάξης Μεγέθους
   - Ορισμοί
2. Αθροίσματα και Συναρτήσεις
   - Αθροίσματα
   - Συναρτήσεις
   - Ιεράρχηση

Σκιαγράφηση

1. Συμβολισμοί Τάξης Μεγέθους
   - Ορισμοί
2. Αθροίσματα και Συναρτήσεις
   - Αθροίσματα
   - Συναρτήσεις
   - Ιεράρχηση
3. Αναδρομικές συναρτήσεις

Σκιαγράφηση

1. Συμβολισμοί Τάξης Μεγέθους
   - Ορισμοί
2. Αθροίσματα και Συναρτήσεις
   - Αθροίσματα
   - Συναρτήσεις
   - Ιεράρχηση
3. Αναδρομικές συναρτήσεις

Συμβολισμός O

Ορισμός 1

$$O(g(n)) = \{f \mid \exists c \in \Re^+, \exists n_0 \in N : \forall n \geq n_0, f(n) \leq cg(n)\}$$

little-o

$$o(g(n)) = \{f \mid \forall c \in \Re^+, \exists n_0 \in N : \forall n \geq n_0, f(n) < cg(n)\}$$

Συμβολισμός O

Ορισμός 1

$$O(g(n)) = \{f \mid \exists c \in \Re^+, \exists n_0 \in N : \forall n \geq n_0, f(n) \leq cg(n)\}$$

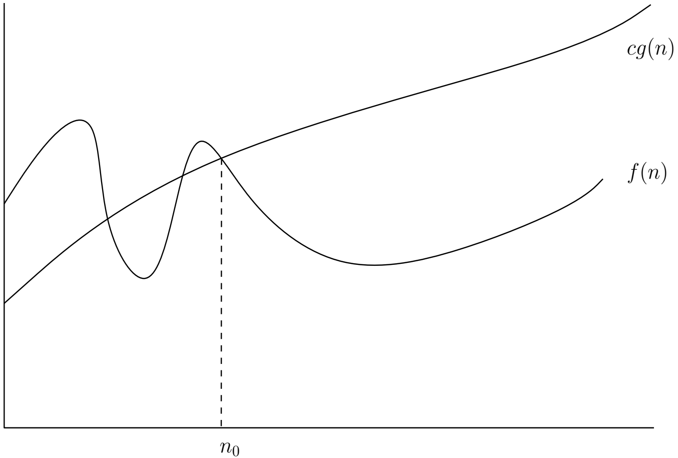
little-o

$$o(g(n)) = \{f \mid \forall c \in \Re^+, \exists n_0 \in N : \forall n \geq n_0, f(n) < cg(n)\}$$

Ορισμός 2

$$O(g(n)) = \left\{f \mid \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0\right\}$$

Γραφική Παράσταση



$f = O(g)$

Παραδείγματα

Π1

Δίνονται $f(n) = \frac{n^3}{2}$ και $g(n) = 37n^2 + 120n + 17$. Να δειχθεί ότι $g \in O(f(n))$ και $f \notin O(g(n))$.

Παραδείγματα

Π1

Δίνονται $f(n) = \frac{n^3}{2}$ και $g(n) = 37n^2 + 120n + 17$. Να δειχθεί ότι $g \in O(f(n))$ και $f \notin O(g(n))$.

α) $g \in O(f(n))$

- Βάσει του 1^{ου} Ορισμού επιλέγουμε $c = 1$ και $n_0 = 78$ και έχουμε $g(n) \leq 1 \cdot f(n) \Rightarrow g \in O(f(n))$

Παραδείγματα

Π1

Δίνονται $f(n) = \frac{n^3}{2}$ και $g(n) = 37n^2 + 120n + 17$. Να δειχθεί ότι $g \in O(f(n))$ και $f \notin O(g(n))$.

$\alpha)$ $g \in O(f(n))$

- Βάσει του $1^{ου}$ Ορισμού επιλέγουμε $c = 1$ και $n_0 = 78$ και έχουμε $g(n) \leq 1 \cdot f(n) \Rightarrow g \in O(f(n))$
- Βάσει του $2^{ου}$ Ορισμού ισχύει ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{37n^2+120n+17}{\frac{n^3}{2}} = \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{74}{n} + \frac{240}{n^2} + \frac{34}{n^3}) = 0$

Παραδείγματα

β) $f \notin O(g(n))$

- Βάσει του $1^{ου}$ Ορισμού, υποθέτουμε ότι $f \in O(g(n))$.
  Τότε $\exists c > 0, n_0 \geq 0 : \forall n \geq n_0$

$$\frac{n^3}{2} \leq 37cn^2 + 120cn + 17c$$
$$\frac{n}{2} \leq 37c + \frac{120c}{n} + \frac{17c}{n^2} \leq 174 \cdot c$$

Επειδή c σταθερά έχουμε $\frac{n}{2} \leq 174 \cdot c$, ΄Ατοπο.

Παραδείγματα

$\beta)\ f \notin O(g(n))$

- Βάσει του 1ου Ορισμού, υποθέτουμε ότι $f \in O(g(n))$.
  Τότε $\exists c > 0, n_0 \geq 0 : \forall n \geq n_0$

$$\frac{n^3}{2} \leq 37cn^2 + 120cn + 17c$$
$$\frac{n}{2} \leq 37c + \frac{120c}{n} + \frac{17c}{n^2} \leq 174 \cdot c$$

  Επειδή c σταθερά έχουμε $\frac{n}{2} \leq 174 \cdot c$, Άτοπο.

- Βάσει του 2ου Ορισμού, παρατηρούμε ότι $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$

Συμβολισμός Ω

Ορισμός 1

$$\Omega(g(n)) = \{f \mid \exists c \in \Re^+, \exists n_0 \in N : \forall n \geq n_0, f(n) \geq cg(n)\}$$

little-ω

$$\omega(g(n)) = \{f \mid \forall c \in \Re^+, \exists n_0 \in N : \forall n \geq n_0, f(n) > cg(n)\}$$

Συμβολισμός Ω

Ορισμός 1

$$\Omega(g(n)) = \{f \mid \exists c \in \Re^+, \exists n_0 \in N : \forall n \geq n_0, f(n) \geq cg(n)\}$$

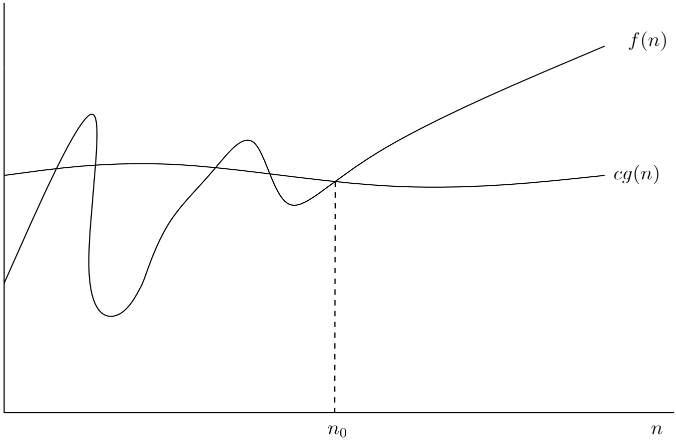
little-ω

$$\omega(g(n)) = \{f \mid \forall c \in \Re^+, \exists n_0 \in N : \forall n \geq n_0, f(n) > cg(n)\}$$

Ορισμός 2

$$\Omega(g(n)) = \left\{f \mid \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty\right\}$$

Γραφική Παράσταση



$$f = \Omega(g)$$

Παραδείγματα

Π2

Δίνονται $f(n) = n^2$ και $g(n) = n \log n$. Να δειχθεί ότι $f \in \Omega(g(n))$ και $g \notin \Omega(f(n))$.

Παραδείγματα

Π2

Δίνονται $f(n) = n^2$ και $g(n) = n \log n$. Να δειχθεί ότι $f \in \Omega(g(n))$ και $g \notin \Omega(f(n))$.

$\alpha)$ $f \in \Omega(g(n))$

- Βάσει του 1ου Ορισμού επιλέγουμε $c = 1$ και $n_0 = 2$ και έχουμε $f(n) \geq 1 \cdot g(n) \Rightarrow f \in \Omega(g(n))$

Παραδείγματα

Π2

Δίνονται $f(n) = n^2$ και $g(n) = n\log n$. Να δειχθεί ότι $f \in \Omega(g(n))$ και $g \notin \Omega(f(n))$.

$\alpha)$ $f \in \Omega(g(n))$

- Βάσει του $1^{ου}$ Ορισμού επιλέγουμε $c = 1$ και $n_0 = 2$ και έχουμε $f(n) \geq 1 \cdot g(n) \Rightarrow f \in \Omega(g(n))$
- Από τον $2^{ου}$ Ορισμό έχουμε ότι
$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n\log n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\log n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n \ln 2}{\ln n} \overset{L'Hopit\hat{a}l}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\ln 2}{1/n} = \infty$$

Παραδείγματα

β) $g \notin \Omega(f(n))$

- Ο $2^{ος}$ Ορισμός μας δίνει ότι $\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} \to 0$, οπότε ισχύει

Παραδείγματα

$\beta)\ g \notin \Omega(f(n))$

- Ο 2ος Ορισμός μας δίνει ότι $\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} \to 0$, οπότε ισχύει
- Βάσει του 1ου Ορισμού, υποθέτουμε ότι $g \in \Omega(f(n))$.
  Τότε $\exists c > 0, n_0 \geq 0 : \forall n \geq n_0$

$$n \log n \geq c \cdot n^2$$
$$\log n \geq c \cdot n \quad \text{Άτοπο}$$

Συμβολισμός Θ

Ορισμός 1

$$\Theta(g(n)) = \{f \mid \exists c_1 \in \Re^+, c_2 \in \Re^+, \exists n_0 \in N : \forall n \geq n_0, c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)\}$$

Συμβολισμός Θ

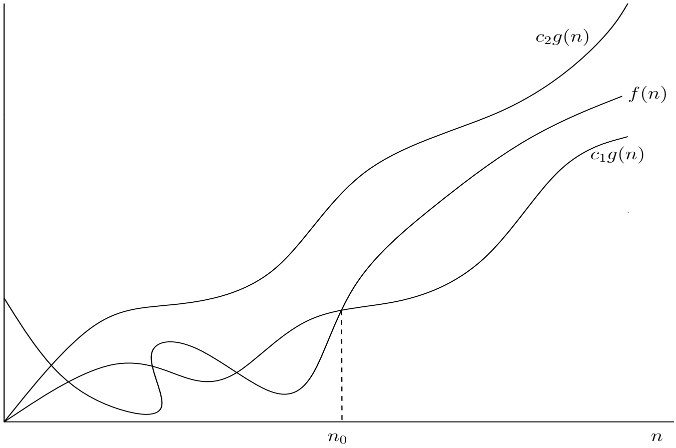
Ορισμός 1

$\Theta(g(n)) = \{f \mid \exists c_1 \in \Re^+, c_2 \in \Re^+, \exists n_0 \in N : \forall n \geq n_0, c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)\}$

Ορισμός 2

$\Theta(g(n)) = \left\{f \mid \lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c \in \Re^+\right\}$

Γραφική Παράσταση



$$f = \Theta(g)$$

Ενδεικτικές Ιδιότητες

Θεώρημα

Για οποιεσδήποτε δύο συναρτήσεις $f(n)$, $g(n)$ ισχύει ότι $f(n) = \Theta(g(n))$ αν και μόνο αν $f(n) = O(g(n))$ και $f(n) = \Omega(g(n))$.

Μεταβατική

- $f(n) = \Theta(g(n))$ & $g(n) = \Theta(h(n)) \Rightarrow f(n) = \Theta(h(n))$
- $f(n) = \Omega(g(n))$ & $g(n) = \Omega(h(n)) \Rightarrow f(n) = \Omega(h(n))$
- $f(n) = O(g(n))$ & $g(n) = O(h(n)) \Rightarrow f(n) = O(h(n))$

Συμμετρική και Αντίστροφη Συμμετρική

- $f(n) = \Theta(g(n))$ αν και μόνο αν $g(n) = \Theta(f(n))$
- $f(n) = O(g(n))$ αν και μόνο αν $g(n) = \Omega(f(n))$

Παραδείγματα

Παράδειγμα 3

Να δείξετε ότι **δεν** ισχύουν οι ακόλουθες προτάσεις:

1. $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow g(n) = O(f(n))$
2. $f(n) + g(n) = \Theta(\min(f(n), g(n)))$
3. $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow 2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$
4. $f(n) = O((f(n))^2)$
5. $f(n) = O(f(n/2))$

Παραδείγματα

Παράδειγμα 3

Να δείξετε ότι **δεν** ισχύουν οι ακόλουθες προτάσεις:

1. $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow g(n) = O(f(n))$
2. $f(n) + g(n) = \Theta(\min(f(n), g(n)))$
3. $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow 2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$
4. $f(n) = O((f(n))^2)$
5. $f(n) = O(f(n/2))$

1. Για $f(n) = n$ και $g(n) = n^2$ η πρόταση δεν ισχύει
2.
3.
4.
5.

Παραδείγματα

Παράδειγμα 3

Να δείξετε ότι **δεν** ισχύουν οι ακόλουθες προτάσεις:

1. $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow g(n) = O(f(n))$
2. $f(n) + g(n) = \Theta(\min(f(n), g(n)))$
3. $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow 2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$
4. $f(n) = O((f(n))^2)$
5. $f(n) = O(f(n/2))$

1.
2. Για $f(n) = n$ και $g(n) = 1$ η πρόταση δεν ισχύει
3.
4.
5.

Παραδείγματα

Παράδειγμα 3

Να δείξετε ότι **δεν** ισχύουν οι ακόλουθες προτάσεις:

1. $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow g(n) = O(f(n))$
2. $f(n) + g(n) = \Theta(\min(f(n), g(n)))$
3. $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow 2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$
4. $f(n) = O((f(n))^2)$
5. $f(n) = O(f(n/2))$

1.
2.
3. Για $f(n) = 2n$ και $g(n) = n$ ισχύει ότι $f(n) = O(g(n))$, αλλά $2^{2n} \neq O(2^n)$
4.
5.

Παραδείγματα

Παράδειγμα 3

Να δείξετε ότι **δεν** ισχύουν οι ακόλουθες προτάσεις:

1. $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow g(n) = O(f(n))$
2. $f(n) + g(n) = \Theta(\min(f(n), g(n)))$
3. $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow 2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$
4. $f(n) = O((f(n))^2)$
5. $f(n) = O(f(n/2))$

1.
2.
3.
4. Για $f(n) = 1/n$ δεν ισχύει η πρόταση
5.

Παραδείγματα

Παράδειγμα 3

Να δείξετε ότι **δεν** ισχύουν οι ακόλουθες προτάσεις:

1. $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow g(n) = O(f(n))$
2. $f(n) + g(n) = \Theta(\min(f(n), g(n)))$
3. $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow 2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$
4. $f(n) = O((f(n))^2)$
5. $f(n) = O(f(n/2))$

1.
2.
3.
4.
5. Για $f(n) = 2^{2n}$ δεν ισχύει η πρόταση. Η $g(n) = f(n/2) = 2^n$ και $2^{2n} \neq O(2^n)$

Σκιαγράφηση

1 Συμβολισμοί Τάξης Μεγέθους
- Ορισμοί

2 Αθροίσματα και Συναρτήσεις
- Αθροίσματα
- Συναρτήσεις
- Ιεράρχηση

3 Αναδρομικές συναρτήσεις

Σειρές και Γινόμενα

Αριθμητικές Σειρές

- $\sum_{k=1}^{n-1} k = 1 + \ldots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2} = \Theta(n^2)$ (Απόδειξη;)
- $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Σειρές και Γινόμενα

Αριθμητικές Σειρές

- $\sum_{k=1}^{n-1} k = 1 + \ldots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2} = \Theta(n^2)$ (Απόδειξη;)
- $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Γεωμετρικές Σειρές

- $\sum_{k=1}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^n-1}{x-1}$
- Για $|x| < 1$, $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$

Σειρές και Γινόμενα

Αρμονική Σειρά

- $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + O(1)$. (Απόδειξη;)

Σειρές και Γινόμενα

Αρμονική Σειρά

- $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + O(1)$. (Απόδειξη;)

Τηλεσκοπικές Σειρές και Γινόμενα

- $\sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_n$
- $\prod_{k=1}^{n} a_k$, $\log \left(\prod_{k=1}^{n} a_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \log a_k$

Πολυωνυμικές και Λογαριθμικές Συναρτήσεις

Πολυωνυμικές Συναρτήσεις

- $p(n) = \sum_{i=0}^{k} a_i n^i$, όπου a_i, $i = 0, 1, \ldots, k$ οι συντελεστές του πολυωνύμου και $a_k \neq 0$

$f(n) = O(n^k)$, όπου k θετική σταθερά.

Πολυωνυμικές και Λογαριθμικές Συναρτήσεις

Πολυωνυμικές Συναρτήσεις

- $p(n) = \sum_{i=0}^{k} a_i n^i$, όπου a_i, $i = 0, 1, \ldots, k$ οι συντελεστές του πολυωνύμου και $a_k \neq 0$

$f(n) = O(n^k)$, όπου k θετική σταθερά.

Λογαριθμικές Συναρτήσεις

- $\log n = \log_2 n$
- $\ln n = \log_e n$
- $\log^k n = (\log n)^k$
- $\log\log n = \log(\log n)$

$f(n) = O(\log^k n)$, όπου k θετική σταθερά.

Εκθετικές και Παραγοντικές Συναρτήσεις

Εκθετικές Συναρτήσεις

- 2^n και c^n, $c > 1$

$f(n) = O(c^n)$.

Παραγοντικές Συναρτήσεις

- $n! = \begin{cases} 1, & \text{αν } n = 0 \\ n \cdot (n-1)!, & \text{αν } n > 0 \end{cases}$

$f(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$

Εκθετικές και Παραγοντικές Συναρτήσεις

Παραγοντικές Συναρτήσεις

- $n! = \begin{cases} 1, & \text{αν } n = 0 \\ n \cdot (n-1)!, & \text{αν } n > 0 \end{cases}$

$f(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$

Άνω φράγμα για το παραγοντικό

Παρατηρούμε ότι $n! < n^n$

- $n! = O(n^n)$
- $n! = \Omega(2^n)$
- $\log(n!) = \Theta(n \log n)$

Χρήσιμος τύπος (Stirling's approximation): $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

Παραδείγματα

Π5

Να δείξετε ότι $\log(n!) = \Theta(n \log n)$

Παραδείγματα

Π5

Να δείξετε ότι $\log(n!) = \Theta(n \log n)$

1. Δείχνουμε ότι $\log(n!) = O(n \log n)$.
   Επιλέγουμε $n_0 = 2$ και $c = 1$ και για κάθε $n \geq 2$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\log(n!) &= \log(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n) = \log 1 + \log 2 + \ldots + \log n \\
&= \log 2 + \ldots + \log n \leq (n-1)\log n \\
&< n \log n
\end{aligned}$$

2. Δείχνουμε ότι $\log(n!) = \Omega(n \log n)$.

Παραδείγματα

Π5

Να δείξετε ότι $\log(n!) = \Theta(n \log n)$

1. Δείχνουμε ότι $\log(n!) = O(n \log n)$.
2. Δείχνουμε ότι $\log(n!) = \Omega(n \log n)$.
   Επιλέγουμε $n_0 = 4$ και $c = 1/4$ και για κάθε $n \geq 4$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
\log(n!) &= \log\left(1 \cdot \ldots \cdot \frac{n}{2} \cdot (\frac{n}{2} + 1) \cdot \ldots \cdot (\frac{n}{2} + \frac{n}{2})\right) \\
&\geq \log\left((\frac{n}{2} + 1) \cdot \ldots \cdot (\frac{n}{2} + \frac{n}{2})\right) \\
&\geq \frac{n}{2} \log \frac{n}{2} \geq \frac{n}{4} \log n
\end{aligned}
$$

Παραδείγματα

Π6

Για ποια από τα παρακάτω ζεύγη συναρτήσεων ισχύει ότι $f(n) \in O(g(n))$;

1. $f(n) = \sqrt{n}$ και $g(n) = 1000n$

Παραδείγματα

Π6

Για ποια από τα παρακάτω ζεύγη συναρτήσεων ισχύει ότι $f(n) \in O(g(n))$;

1. $f(n) = \sqrt{n}$ και $g(n) = 1000n$
2. $f(n) = \log_{10} n$ και $g(n) = \log_2 n$

Παραδείγματα

Π6

Για ποια από τα παρακάτω ζεύγη συναρτήσεων ισχύει ότι $f(n) \in O(g(n))$;

1. $f(n) = \sqrt{n}$ και $g(n) = 1000n$
2. $f(n) = \log_{10} n$ και $g(n) = \log_2 n$
3. $f(n) = \sqrt[3]{n}$ και $g(n) = \sqrt{n}$

Παραδείγματα

Π6

Για ποια από τα παρακάτω ζεύγη συναρτήσεων ισχύει ότι $f(n) \in O(g(n))$;

1. $f(n) = \sqrt{n}$ και $g(n) = 1000n$
2. $f(n) = \log_{10} n$ και $g(n) = \log_2 n$
3. $f(n) = \sqrt[3]{n}$ και $g(n) = \sqrt{n}$
4. $f(n) = n^2$ και $g(n) = n \log n$

Παραδείγματα

Π6

Για ποια από τα παρακάτω ζεύγη συναρτήσεων ισχύει ότι $f(n) \in O(g(n))$;

1. $f(n) = \sqrt{n}$ και $g(n) = 1000n$
2. $f(n) = \log_{10} n$ και $g(n) = \log_2 n$
3. $f(n) = \sqrt[3]{n}$ και $g(n) = \sqrt{n}$
4. $f(n) = n^2$ και $g(n) = n \log n$
5. $f(n) = 111n^2 - 55n + 2$ και $g(n) = n^2$

Παραδείγματα

Π6

Για ποια από τα παρακάτω ζεύγη συναρτήσεων ισχύει ότι $f(n) \in O(g(n))$;

1. $f(n) = \sqrt{n}$ και $g(n) = 1000n$
2. $f(n) = \log_{10} n$ και $g(n) = \log_2 n$
3. $f(n) = \sqrt[3]{n}$ και $g(n) = \sqrt{n}$
4. $f(n) = n^2$ και $g(n) = n \log n$
5. $f(n) = 111n^2 - 55n + 2$ και $g(n) = n^2$
6. $f(n) = n \log n + \sqrt{n}$ και $g(n) = n \log^2 n$

Παραδείγματα

Π6

Για ποια από τα παρακάτω ζεύγη συναρτήσεων ισχύει ότι $f(n) \in O(g(n))$;

1. $f(n) = \sqrt{n}$ και $g(n) = 1000n$
2. $f(n) = \log_{10} n$ και $g(n) = \log_2 n$
3. $f(n) = \sqrt[3]{n}$ και $g(n) = \sqrt{n}$
4. $f(n) = n^2$ και $g(n) = n \log n$
5. $f(n) = 111n^2 - 55n + 2$ και $g(n) = n^2$
6. $f(n) = n \log n + \sqrt{n}$ και $g(n) = n \log^2 n$
7. $\frac{1+\sqrt{5}}{3}$ και $g(n) = n^{1/\log n}$

Παραδείγματα

Π6

Για ποια από τα παρακάτω ζεύγη συναρτήσεων ισχύει ότι $f(n) \in O(g(n))$;

1. $f(n) = \sqrt{n}$ και $g(n) = 1000n$
2. $f(n) = \log_{10} n$ και $g(n) = \log_2 n$
3. $f(n) = \sqrt[3]{n}$ και $g(n) = \sqrt{n}$
4. $f(n) = n^2$ και $g(n) = n \log n$
5. $f(n) = 111n^2 - 55n + 2$ και $g(n) = n^2$
6. $f(n) = n \log n + \sqrt{n}$ και $g(n) = n \log^2 n$
7. $\frac{1+\sqrt{5}}{3}$ και $g(n) = n^{1/\log n}$
8. $f(n) = n!$ και $g(n) = 2^{2^n}$

Παραδείγματα

Π6

Για ποια από τα παρακάτω ζεύγη συναρτήσεων ισχύει ότι $f(n) \in O(g(n))$;

1. $f(n) = \sqrt{n}$ και $g(n) = 1000n$
2. $f(n) = \log_{10} n$ και $g(n) = \log_2 n$
3. $f(n) = \sqrt[3]{n}$ και $g(n) = \sqrt{n}$
4. $f(n) = n^2$ και $g(n) = n \log n$
5. $f(n) = 111n^2 - 55n + 2$ και $g(n) = n^2$
6. $f(n) = n \log n + \sqrt{n}$ και $g(n) = n \log^2 n$
7. $\frac{1+\sqrt{5}}{3}$ και $g(n) = n^{1/\log n}$
8. $f(n) = n!$ και $g(n) = 2^{2^n}$
9. $f(n) = \log^\star \log n$ και $g(n) = \log^2 n$

Παραδείγματα

Π6

Για ποια από τα παρακάτω ζεύγη συναρτήσεων ισχύει ότι $f(n) \in O(g(n))$;

1. $f(n) = \sqrt{n}$ και $g(n) = 1000n$
2. $f(n) = \log_{10} n$ και $g(n) = \log_2 n$
3. $f(n) = \sqrt[3]{n}$ και $g(n) = \sqrt{n}$
4. $f(n) = n^2$ και $g(n) = n \log n$
5. $f(n) = 111n^2 - 55n + 2$ και $g(n) = n^2$
6. $f(n) = n \log n + \sqrt{n}$ και $g(n) = n \log^2 n$
7. $\frac{1+\sqrt{5}}{3}$ και $g(n) = n^{1/\log n}$
8. $f(n) = n!$ και $g(n) = 2^{2^n}$
9. $f(n) = \log^\star \log n$ και $g(n) = \log^2 n$

Παραδείγματα

Π6

Για ποια από τα παρακάτω ζεύγη συναρτήσεων ισχύει ότι $f(n) \in O(g(n))$;

1. $f(n) = \sqrt{n}$ και $g(n) = 1000n$
2. $f(n) = \log_{10} n$ και $g(n) = \log_2 n$
3. $f(n) = \sqrt[3]{n}$ και $g(n) = \sqrt{n}$
4. $f(n) = n^2$ και $g(n) = n \log n$
5. $f(n) = 111n^2 - 55n + 2$ και $g(n) = n^2$
6. $f(n) = n \log n + \sqrt{n}$ και $g(n) = n \log^2 n$
7. $\frac{1+\sqrt{5}}{3}$ και $g(n) = n^{1/\log n}$
8. $f(n) = n!$ και $g(n) = 2^{2^n}$
9. $f(n) = \log^\star \log n$ και $g(n) = \log^2 n$

Απάντηση. Όλα εκτός από το 4.

Ιεράρχηση Συναρτήσεων

$$
\begin{aligned}
O(1) \quad < \quad & O(\log^\star n) < O(\log^k n) < O(\sqrt{n}) \\
< \quad & O(n) < O(n \log n) < O(n^2) < \ldots < O(p(n)) \\
< \quad & O(c^n) < O(n!) < O(n^n)
\end{aligned}
$$

Ιεράρχηση Συναρτήσεων

$$
\begin{aligned}
O(1) \quad &< \quad O(\log^\star n) \;<\; O(\log^k n) \;<\; O(\sqrt{n}) \\
&< \quad O(n) \;<\; O(n \log n) \;<\; O(n^2) \;<\; \ldots \;<\; O(p(n)) \\
&< \quad O(c^n) \;<\; O(n!) \;<\; O(n^n)
\end{aligned}
$$

Όπου

$$
\log^\star n = \begin{cases} 0, & \text{αν } n \leq 1 \\ 1 + \log^\star(\log n), & \text{αν } n > 1 \end{cases}
$$

η συνάρτηση του επαναληπτικού λογαρίθμου.

Επισκόπηση συνήθων χρόνων εκτέλεσης αλγορίθμων

- Υπογραμμικός χρόνος: Δυαδική Αναζήτηση ($O(?)$).
- Γραμμικός χρόνος, $O(n)$: εύρεση μεγίστου, εύρεση ελαχίστου, συγχώνευση ταξινομημένων λιστών.
- $O(n \log n)$: ταξινόμηση n ακεραίων.
- $O(n^2)$: Δίνονται n σημεία στο επίπεδο και ζητείται το ζεύγος με τη μικρότερη ευκλείδια απόσταση (Γίνεται και γρηγορότερα;)

Επισκόπηση συνήθων χρόνων εκτέλεσης αλγορίθμων

- $O(n^3)$: Δίνονται n σύνολα, $S_1, S_2, \ldots, S_n$, $S_i \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, και ζητάμε να βρούμε αν υπάρχουν 2 υποσύνολα ξένα μεταξύ τους.
- $O(n^k)$: Για προκαθορισμένη σταθερά k, θέλουμε να βρούμε αν ένα δοθέν γράφημα G με n κορυφές έχει ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους k.
- Εκθετικός, Παραγοντικός, $O(2^n)$, $O(n!)$: Δίνεται γράφημα G και θέλουμε να βρούμε το μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο (maximum independent set), διατάξεις n αντικειμένων- το πρόβλημα του Περιοδεύοντος Πωλητή (TSP).

Σκιαγράφηση

1 Συμβολισμοί Τάξης Μεγέθους
- Ορισμοί

2 Αθροίσματα και Συναρτήσεις
- Αθροίσματα
- Συναρτήσεις
- Ιεράρχηση

3 Αναδρομικές συναρτήσεις

Αναδρομές

- Αντικάτασταση - Επαγωγή
- Master Theorem

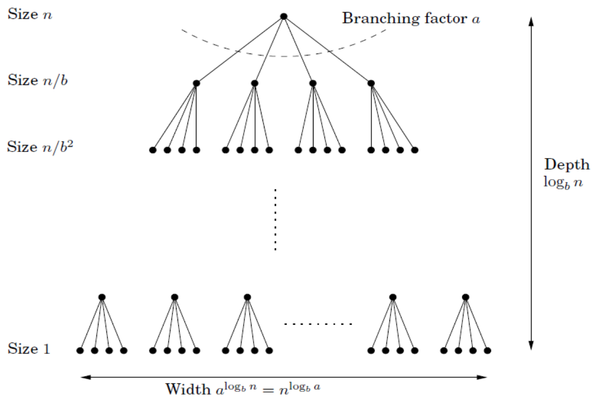
Master Theorem

Η $f(n)$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση

Αν $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + O(n^d)$, για σταθερές $a > 0, b > 1$ και $d \geq 1$ τότε

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}), & \text{αν } a > b^d \\ \Theta(n^d \log n), & \text{αν } a = b^d, \\ \Theta(n^d), & \text{αν } a < b^d \end{cases}$$

Απόδειξη


Size n
Branching factor a
Size n/b
Size n/b^2
Depth
$\log_b n$
Size 1
Width $a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$

Παραδείγματα

Π7

Δώστε τα ασυμπτωτικά άνω και κάτω φράγματα για κάθε μία από τις ακόλουθες αναδρομικές εξισώσεις:

1. $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$
2. $T(n) = 16T(n/4) + n^2$
3. $T(n) = T(n-1) + 3$
4. $T(n) = 7T(n/2) + n^2$