ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
Σχεδίαση και Ανάλυση Αλγορίθμων
Διδάσκων: Ε. Μαρκάκης, Φθινοπωρινό εξάμηνο 2014-2015

4η Σειρά Ασκήσεων **Εξέταση: 9 Φεβρουαρίου 2015**

Πρόβλημα 1. Σχεδιάστε έναν αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού που λύνει το $0-1$-KNAPSACK σε χρόνο $(n^2 v_{max})$, όπου n είναι ο αριθμός των αντικειμένων, και v_{max} είναι η μέγιστη αξία ενός αγαθού. Μια ιδέα για το πώς να σχεδιάσετε τον αλγόριθμο περιγράφεται στις διαφάνειες.

Πρόβλημα 2. Το πρόβλημα MINIMUM STEINER TREE ορίζεται ως εξής: Η είσοδος αποτελείται από ένα μη κατευθυνόμενο γράφο $G = (V, E)$ και από την απόσταση d_{uv} για κάθε ζεύγος κόμβων u, v. Η είσοδος περιλαμβάνει και ένα σύνολο κόμβων $R \subseteq V$. Το ζητούμενο είναι να βρεθεί ένα δέντρο ελαχίστου κόστους που να συνδέει υποχρεωτικά τους κόμβους του R. Το δέντρο αυτό επιτρέπεται να περιλαμβάνει και κορυφές από το σύνολο $V \setminus R$, αν έτσι επιτυγχάνουμε ένα φτηνότερο δέντρο. Όταν $R = V$, τότε το πρόβλημα είναι απλά το Minimum Spanning Tree. Γενικά όμως το πρόβλημα αυτό είναι NP-πλήρες.

Υποθέστε ότι οι αποστάσεις ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα και σχεδιάστε έναν αλγόριθμο με λόγο προσέγγισης 2.

Hint: Θυμηθείτε τους αλγορίθμους που είδαμε για το TSP.

Πρόβλημα 3.

Το πρόβλημα Max k-coverage ορίζεται ως εξής: Έχουμε ένα σύνολο U από n στοιχεία και μια οικογένεια συνόλων $S_1, ..., S_m$ με $S_i \subseteq U$. Ο στόχος είναι να επιλέξουμε k από αυτά τα υποσύνολα, έστω $S_{i_1}, ..., S_{i_k}$, έτσι ώστε να καλύψουμε το μέγιστο δυνατό αριθμό από στοιχεία του U. Θέλουμε δηλαδή να μεγιστοποιήσουμε το $|S_{i_1} \cup \ldots \cup S_{i_k}|$.

1. Δείξτε ότι το πρόβλημα είναι NP-complete (το decision version του προβλήματος).

2. Αποδείξτε ότι ο greedy αλγόριθμος που σε κάθε επανάληψη επιλέγει το σύνολο που περιέχει τα περισσότερα ακάλυπτα στοιχεία έχει λόγο προσέγγισης $1 - (1 - \frac{1}{k})^k > 1 - \frac{1}{e}$.

Πρόβλημα 4. Έχουμε δει ότι το πρόβλημα Vertex Cover είναι συμπληρωματικό του προβλήματος Clique. Συγκεκριμένα, είδαμε στις διαφάνειες ότι το πρόβλημα Clique μπορεί να αναχθεί στο Vertex Cover χρησιμοποιώντας το συμπλήρωμα του αρχικού γράφου. Μπορεί αυτή η αναγωγή να χρησιμοποιηθεί για να δείξουμε ότι ο 2-προσεγγιστικός αλγόριθμος που είδαμε για το Unweighted Vertex Cover συνεπάγεται έναν προσεγγιστικό αλγόριθμο για το Clique, με λόγο προσέγγισης 2 ή κάποια άλλη σταθερά? Αν ναι, δείξτε γιατί, αν όχι, επιδείξτε ένα παράδειγμα.

Πρόβλημα 5. Έστω ένας κατευθυνόμενος γράφος $G = (V, E)$. Θέλετε να διαλέξετε ένα μέγιστο σύνολο από ακμές, έστω $E' \subseteq E$, έτσι ώστε ο γράφος που προκύπτει από αυτές τις ακμές $G' = (V, E')$, να μην έχει κύκλους. Δώστε έναν 1/2-προσεγγιστικό αλγόριθμο για το πρόβλημα αυτό.

Hint: Ονομάστε τους κόμβους με αυθαίρετο τρόπο από το 1 ως το n. Ονομάστε μια ακμή forward-going αν είναι της μορφής (i, j) με $i < j$. Σε διαφορετική περίπτωση μια ακμή θα ονομάζεται backward-going. Διαλέξτε το μεγαλύτερο από τα εξής 2 σύνολα ακμών: το σύνολο των forward-going ακμών και το σύνολο των backward-going ακμών.

Πρόβλημα 6. Θεωρήστε το πρόβλημα DEGREE WEIGHTED VERTEX COVER, στο οποίο για ένα γράφο $G = (V, E)$, το βάρος κάθε κορυφής $v \in V$, είναι $w(v) = c \cdot d(v)$, όπου $d(v)$ είναι ο βαθμός της κορυφής v και c είναι μια σταθερά. Το πρόβλημα είναι πάλι να βρούμε μια κάλυψη κορυφών ελαχίστου βάρους. Αποδείξτε ότι οποιοσδήποτε αλγόριθμος επιτυγχάνει λόγο προσέγγισης το πολύ 2 (εννοούμε οποιοσδήποτε αλγόριθμος που επιστρέφει σε κάθε instance ένα vertex cover).