Ⓐ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

① ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ: ΕΝΑΣ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ (SAMPLE SPACE) S ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΔΥΝΑΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ (OUTCOME) ΕΝΟΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ.
ΚΑΘΕ ΥΠΟΣΥΝΟΛΟ ΚΑΛΕΙΤΑΙ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΟ (EVENT)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 1) ΡΙΨΗ ΕΝΟΣ ΚΕΡΜΑΤΟΣ: $S=\{H,T\}$

2) ΡΙΨΗ ΔΥΟ ΚΕΡΜΑΤΩΝ: $S=\{HH, HT, TH, TT\}$

3) ΚΑΝΩ ΠΑΙΔΙΑ ΜΕΧΡΙ ΝΑ ΚΑΝΩ ΚΟΡΙΤΣΙ:

$$S=\{K, AK, AAK, \ldots\}$$

ΟΡΙΣΜΟΙ: 1) ΕΝΩΣΗ (UNION) ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΩΝ $E\cup F=\{$ΟΛΑ ΤΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΟΥ ΑΝΗΚΟΥΝ ΣΕ ΕΝΑ ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ ΑΠΟ ΤΑ $E,F\}$

2) $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, 3) ΤΟΜΗ (INTERSECTION) $E\cap F=EF$ 4) $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$

5) $A-B=\{$ΟΛΑ ΤΑ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ ΠΟΥ ΑΝΗΚΟΥΝ ΣΤΟ A ΑΛΛΑ ΟΧΙ ΣΤΟ $B\}=A\cap E^c$

6) ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ (COMPLEMENT) $E^c=\bar{E}=S-E$

7) ΚΕΝΟ ΣΥΝΟΛΟ (EMPTY SET) $\emptyset$

8) $E\cap F=\emptyset \Rightarrow E,F$ ΞΕΝΑ Η΄ ΑΜΟΙΒΑΙΩΣ ΑΠΟΚΛΕΙΟΜΕΝΑ (MUTUALLY EXCLUSIVE)

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ VENN:

A-B

$A\cup B$

ΚΟΚ.

9) ΤΟ E ΕΙΝΑΙ ΥΠΟΣΥΝΟΛΟ (SUBSET) ΤΟΥ F ΑΝ $\sigma\in E \Rightarrow \sigma\in F$. ΓΡΑΦΟΥΜΕ $E\subset F$

2 ΜΕΤΡΟ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: ΕΣΤΩ $\mathcal{E}$ ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΩΝ ΣΤΟ S. ΕΝΑ ΜΕΤΡΟ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΕΙΝΑΙ ΜΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

$P : \mathcal{E} \to [0,1]$ ΤΕΤΟΙΑ ΩΣΤΕ:

(i) $0 \leq P(E) \leq 1$

(ii) $P(S) = 1$

(iii) ΓΙΑ ΚΑΘΕ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ ΞΕΝΩΝ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΩΝ

$E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots,$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 1) ΔΙΚΑΙΟ ΝΟΜΙΣΜΑ: $P(\{H\}) = P(\{T\}) = \frac{1}{2}$

2) ΔΙΚΑΙΟ ΚΕΡΜΑ: $P(\{1\}) = P(\{2\}) = \ldots = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$

$$\overset{(iii)}{\Rightarrow} \quad P(\{1,2,3\}) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) = \frac{1}{2}$$

3) ΚΑΝΩ ΠΑΙΔΙΑ ΜΕΧΡΙ ΠΡΩΤΟ ΚΟΡΙΤΣΙ:

$$P(\{K\}) = \frac{1}{2}, \quad P(\{AK\}) = \frac{1}{4}, \quad P(\{AAK\}) = \frac{1}{8}, \ldots$$

ΑΛΛΗ ΕΠΙΛΟΓΗ: (ΤΕΧΝΗΤΗ ΓΟΝΙΜΟΠΟΙΗΣΗ)

$$P(\{K\}) = \frac{1}{2}, \quad P(\{AK\}) = \frac{1}{4}, \quad P(\{AAK\}) = \frac{1}{4},$$

$$P(\{\underbrace{A \ldots A}_{\geq 3} K\}) = 0$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: 1) ΜΠΟΡΩ ΝΑ ΕΠΙΛΕΞΩ Ο,ΤΙ ΜΕΤΡΟ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΘΕΛΩ, ΑΡΚΕΙ ΝΑ ΙΚΑΝΟΠΟΙΟΥΝΤΑΙ ΟΙ (i), (ii), (iii). ΚΑΠΟΙΕΣ ΕΠΙΛΟΓΕΣ ΑΝΤΑΠΟΚΡΙΝΟΝΤΑΙ ΠΙΟ ΚΑΛΑ ΣΤΗΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ

2) ΟΙ (i), (ii), (iii) ΕΙΝΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΟΥ ΕΧΕΙ ΚΑΙ ΤΟ ΒΑΡΟΣ

3) ΟΙ (i), (ii), (iii) ΑΡΚΟΥΝ ΓΙΑ ΝΑ ΘΕΜΕΛΙΩΣΟΥΜΕ ΟΛΕΣ ΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤ.

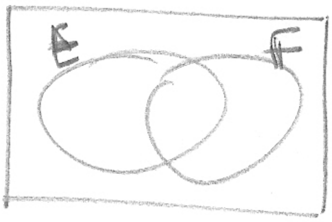
3 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΕΤΡΟΥ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

1. $$P(E^c) = 1 - P(E)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $1 \overset{(ii)}{=} P(S) = P(E \cup E^c) \overset{(iii)}{=} P(E) + P(E^c)$

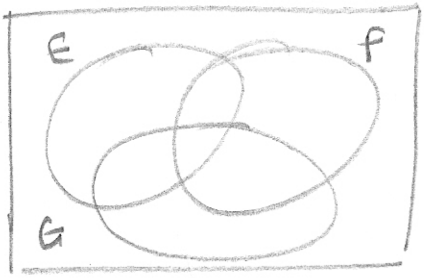
2. $$E \subset F \Rightarrow P(E) \leq P(F)$$

3. $$P(E) + P(F) = P(E \cup F) + P(E \cap F)$$



4. $$EF = 0 \Rightarrow P(E \cup F) = P(E) + P(F)$$

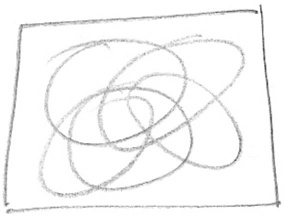
5. $$P(E \cup F \cup G) = P(E) + P(F) + P(G) - P(F \cup E) - P(F \cup G) - P(E \cup G) + P(EFG)$$



6. $$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_i P(E_i) - \sum_{i<j} P(E_i E_j) + \sum_{i<j<k} P[E_i E_j E_k] + \dots + (-1)^{n+1} P(E_1 E_2 \dots E_n)$$

(ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΜΕ ΕΠΑΓΩΓΗ)

7. $$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$$



(ΠΟΤΕ ΕΧΩ ΙΣΟΤΗΤΑ?)

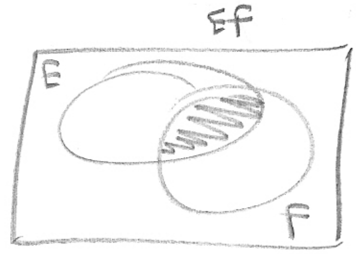
4 ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΗ (ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΕΣ) ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΜΙΑ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ ΕΧΕΙ ΔΥΟ ΠΑΙΔΙΑ.

(i) ΠΟΙΑ Η ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΚΑΙ ΤΑ ΔΥΟ ΑΓΟΡΙΑ? ΕΣΤΩ $\frac{1}{4}$

(ii) ΑΝ ΕΝΑ ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ ΕΙΝΑΙ ΑΓΟΡΙ, ΠΟΙΑ Η ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΚΑΙ ΤΑ ΔΥΟ?

ΟΡΙΣΜΟΣ:
$$P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)}$$
(ΠΡΕΠΕΙ $P(F)>0$)



ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ: 1) Η $P(E|F)$ ΕΙΝΑΙ ΜΕΤΡΟ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ, ΟΠΟΥ $S=F$

2) $$P(E_1 E_2 \dots E_n) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_2E_1)\dots P[E_n|E_1E_2\dots E_{n-1})$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

$$S=\{AA, AK, KA, KK\}.\quad E=\{AA\},\quad F=\{AA, AK, KA\}$$

ΥΠΟΘΕΤΩ 4 ΙΣΟΠΙΘΑΝΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ $\Rightarrow$ $$P(E|F) = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΡΙΧΝΟΥΜΕ ΔΥΟ ΖΑΡΙΑ.

$E_1 = \{$ΑΘΡΟΙΣΜΑ $= 6\}$

$E_2 = \{$ΑΘΡΟΙΣΜΑ $= 7\}$

$E_3 = \{$ΠΡΩΤΟ ΖΑΡΙ $= 2\}$

ΕΡΩΤΗΣΗ:
- ΕΙΝΑΙ ΤΑ E_1, E_3 ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ?
- ΕΙΝΑΙ ΤΑ E_2, E_3 ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ?

ΟΡΙΣΜΟΣ: ΔΥΟ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ E, F ΚΑΛΟΥΝΤΑΙ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ

ΑΝ $$P(EF) = P(E) \cdot P(F) \Leftrightarrow$$

$$P(E|F) = P(E) \Leftrightarrow P(F|E) = P(F)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ) ΥΠΟΘΕΤΩ ΟΤΙ Η ΠΡΩΤΗ ΖΑΡΙΑ X_1 ΕΙΝΑΙ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΗ ΤΗΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ X_2 $\Rightarrow$ (ΥΠΟΘΕΤΩ ΔΙΚΑΙΑ ΖΑΡΙΑ)

$$P(X_1 = i, X_2 = j) = P(X_1 = i) P(X_2 = j) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

ΕΠΙΣΗΣ: $P(E_1) = P((1,5) \cup (2,4) \cup (3,3) \cup (4,2) \cup (5,1))$ ← ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΑ

$$\frac{5}{36}.$$

ΟΜΟΙΩΣ, $P(E_2) = \frac{6}{36}$, $P(E_3) = \frac{1}{6}$.

$$P(E_1 \cap E_3) = P((2,4)) = \frac{1}{36}, \quad P(E_2 \cap E_3) = P((2,5)) = \frac{1}{36}$$

ΑΡΑ: $$P(E_1 \cap E_3) = \frac{1}{36} \neq P(E_1) \cdot P(E_3) = \frac{5}{36} \cdot \frac{1}{6}$$

$$P(E_2 \cap E_3) = \frac{1}{36} = P(E_2) \cdot P(E_3) = \frac{6}{36} \cdot \frac{1}{6}$$

ΑΡΑ: E_1, E_3 ΟΧΙ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ \
E_2, E_3 ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ } ΔΙΑΙΣΘΗΤΙΚΑ ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΟ

ΟΡΙΣΜΟΣ: n ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ ΚΑΛΟΥΝΤΑΙ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΑΝ

$$P(E_{1'} E_{2'} \ldots E_{r'}) = P(E_{1'}) P(E_{2'}) \ldots P(E_{r'})$$

$$\forall \{1', 2', \ldots\} \subset \{1, 2, 3, \ldots, n\}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΛΑΜΒΑΝΟΥΜΕ ΜΙΑ ΜΠΑΛΑ ΑΝΑΜΕΣΑ ΣΕ ΤΕΣΣΕΡΕΙΣ ΠΟΥ ΒΡΙΣΚΟΝΤΑΙ ΕΝΤΟΣ ΔΟΧΕΙΟΥ, $\{1, 2, 3, 4\}$.

ΕΣΤΩ $E = \{1, 2\}$, $F = \{1, 3\}$, $G = \{1, 4\}$

ΕΙΝΑΙ ΤΑ E, F, G ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ?

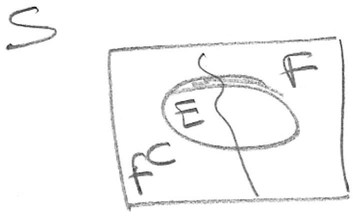
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: ΟΧΙ, ΓΙΑΤΙ $P(EFG) = P\{1\} = \frac{1}{4} \neq$

$$P(E)P(F)P(G) = \frac{1}{8}$$

ΟΜΩΣ: $P(EF) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(E)P(F)$

ΚΑΙ ΟΜΟΙΩΣ ΤΑ ΑΛΛΑ ΖΕΥΓΗ. ΑΡΑ ΕΧΩ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ ΑΝΑ 2.

5 ΚΑΝΟΝΑΣ ΤΟΥ BAYES



$$E = (EF) \cup (EF^C) \Rightarrow$$

$$P(E) = P(EF) + P(EF^C) =$$

$$P(E|F)P(F) + P(E|F^C)(1 - P(F))$$

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ: ΕΣΤΩ F_i, $i = 1, \ldots, n$ ΞΕΝΑ ΜΕ $\bigcup_{i=1}^{n} F_i = S$

$$\Rightarrow P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(EF_i) \Rightarrow \boxed{P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)P(F_i)}$$

(ΝΟΜΟΣ ΟΛΙΚΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ)
(LAW OF TOTAL PROBABILITY)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: $F_i \cap F_j = \emptyset$, $\bigcup F_i = S \Rightarrow \{F_i\}$ ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ (PARTITION)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΣΤΗΝ ΑΣΟΕΕ 60% ΑΝΤΡΕΣ, 40% ΓΥΝΑΙΚΕΣ
50% ΤΩΝ ΓΥΝΑΙΚΩΝ ΞΑΝΘΕΣ, 10% ΤΩΝ ΑΝΔΡΩΝ

ΠΟΣΑ ΕΙΝΑΙ ΤΑ ΞΑΝΘΑ ΑΤΟΜΑ?

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $P(\Xi) = P(\Xi|A)P(A) + P(\Xi|\Gamma)P(\Gamma) =$

$.1 \cdot 0{,}6 + .5 \cdot 0.4 = 0{,}26 = 26\%$

ΕΠΙΣΗΣ:

$$\boxed{P(F_j|E) = \frac{P(EF_j)}{P(E)} = \frac{P(E|F_j)P(F_j)}{\sum_{i=1}^{m} P(E|F_i)P(F_i)}}$$

ΚΑΝΟΝΑΣ ΤΟΥ BAYES

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΤΕΣΤ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ ΜΕ m ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
ΕΝΑΣ ΦΟΙΤΗΤΗΣ ΞΕΡΕΙ ΤΗΝ ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΜΕ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ p
ΑΝ ΑΠΑΝΤΗΣΕ ΣΩΣΤΑ, ΠΟΙΑ Η ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΝΑ ΞΕΡΕΙ ΤΗΝ ΑΠΑΝΤΗΣΗ?

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Σ = "ΑΠΑΝΤΗΣΕ ΣΩΣΤΑ"
H = "ΗΞΕΡΕ ΤΗΝ ΑΠΑΝΤΗΣΗ"

$$P(H|\Sigma) = \frac{P(H\Sigma)}{P(\Sigma)} = \frac{P(\Sigma|H)P(H)}{P(\Sigma|H)P(H) + P(\Sigma|H^c)P(H^c)}$$

$$= \frac{1 \cdot p}{1 \cdot p + \frac{1}{m} \cdot (1-p)} = \frac{p}{p + \frac{(1-p)}{m}}$$

6 ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ