(15) ΑΛΥΣΙΔΕΣ ΜΑΡΚΟΒ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

$\{X_n,\ n=0,1,2,\ldots\}$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: ΕΣΤΩ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΑΝΕΛΙΞΗ ΠΟΥ ΠΑΙΡΝΕΙ ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΤΙΜΕΣ $\{0,1,2,\ldots\}$ ΣΕ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥΣ $0,1,2,\ldots$

Η ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΑΝΕΛΙΞΗ ΚΑΛΕΙΤΑΙ ΜΑΡΚΟΒ ΑΝ ΙΣΧΥΕΙ Η ΙΔΙΟΤΗΤΑ

$$P\{X_{n+1}=j \mid X_n=i,\ X_{n-1}=i_{n-1},\ldots,\ X_1=i_1,\ X_0=i_0\} = P\{X_{n+1}=j \mid X_n=i\} = P_{ij}$$

(MARKOV PROPERTY)

(*) ΔΕΣ ΤΕΛΟΣ (44)

ΣΥΝΗΘΩΣ!

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Η ΑΝΕΛΙΞΗ ΕΙΝΑΙ ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΗ ΣΤΟ ΧΡΟΝΟ (TIME INVARIANT)

ΛΕΣ ΚΑΤΑΛΑΒΑΤΕ ΤΙ ΣΗΜΑΙΝΕΙ. ([illegible] ΣΕ ΛΙΓΟ...)

ΟΡΙΖΩ ΤΟΝ ΠΙΝΑΚΑ ΜΕΤΑΒΑΣΕΩΝ

$$P = \begin{Vmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \cdots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ P_{i0} & P_{i1} & P_{i2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \end{Vmatrix}$$

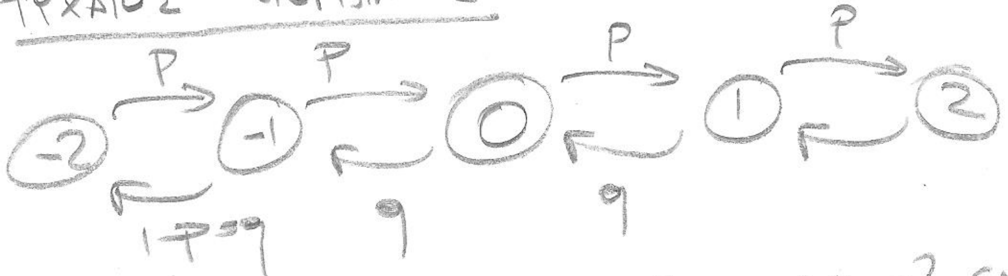
ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΙΣΧΥΕΙ $P_{ij} \geq 0,\ i,j \geq 0,\ \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} = 1,\ i=0,1,\ldots$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ</u>:

① <u>ΠΡΟΒΛΕΨΗ ΚΑΙΡΟΥ</u>: ΔΥΟ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ: 0="ΒΡΕΧΕΙ", 1="ΗΛΙΟΣ",

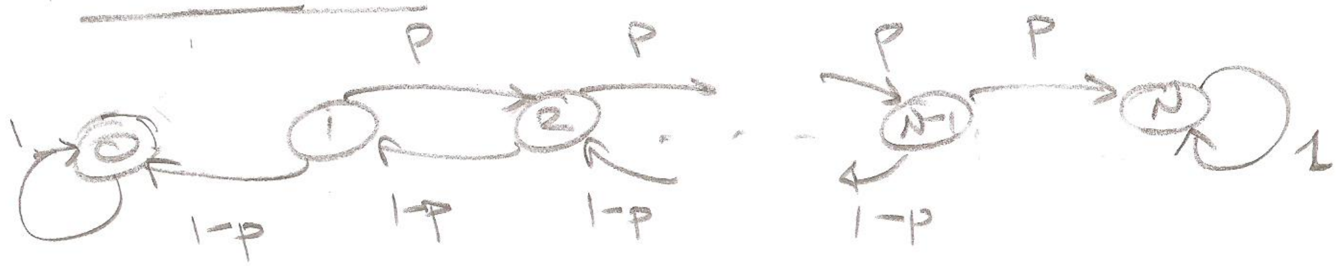
$$P = \begin{Vmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{Vmatrix}$$

② <u>ΤΥΧΑΙΟΣ ΠΕΡΙΠΑΤΟΣ</u>:



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ: ΤΙ ΣΥΜΒΑΙΝΕΙ ΚΑΘΩΣ $t \to \infty$? ΕΧΩ ΚΑΠΟΙΟΥ ΕΙΔΟΥΣ ΣΥΓΚΛΙΣΗ?

③ ΤΥΧΕΡΟ ΠΑΙΧΝΙΔΙ:



ΠΙΘΑΝΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ: ΑΝ ΞΕΚΙΝΗΣΩ ΑΠΟ ΤΗΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ i, ΠΟΙΑ Η ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΝΑ ΚΑΤΑΛΗΞΩ ΣΤΗΝ 0? (ΣΤΗΝ N?)
ΤΑ 0, N ΚΑΛΟΥΝΤΑΙ ΑΠΟΡΡΟΦΗΤΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ
(ABSORBING STATES)

⑯ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ CHAPMAN-KOLMOGOROV

ΟΡΙΣΜΟΣ: $P_{ij}^{n} = P\{X_{n+k}=j \mid X_k = i\}, \quad n \geq 0, \ i,j \geq 0.$

ΚΑΜΙΑ ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΑΠΟ ΤΟ k, ΛΟΓΩ TIME INVARIANCE

ΘΕΩΡΗΜΑ (CHAPMAN-KOLMOGOROV)

$$P_{ij}^{n+m} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{n} P_{kj}^{m} \qquad n,m \geq 0, \ \forall i,j$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$(k=0)$

$$P_{ij}^{n+m} = P\{X_{n+m}=j \mid X_0 = i\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\{X_{n+m}=j, X_n = k \mid X_0 = i\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\{X_{n+m}=j \mid X_n = k, X_0 = i\} P\{X_n = k \mid X_0 = i\}$$

(MARKOV PROPERTY)

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\{X_{n+m}=j \mid X_n = k\} P\{X_n = k \mid X_0 = i\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{n} P_{kj}^{m}$$

(ΤΙ ΣΗΜΑΙΝΕΙ;)

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u>: ΣΕ ΜΟΡΦΗ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ ΠΙΝΑΚΩΝ:

$$P^{(n+m)} = P^{(n)} \cdot P^{(m)}$$

$$\Rightarrow P^{(2)} = P^{(1)} \cdot P^{(1)} = P \cdot P = P^2 \Rightarrow \dots$$

$$\boxed{P^{(n)} = P^n}$$ ΠΟΛΥ ΧΡΗΣΙΜΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ!

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (ΚΑΙΡΟΣ)</u>: $P = \begin{vmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{vmatrix}$

$$\Rightarrow P^2 = \begin{vmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha^2 + (1-\alpha)\beta & \alpha(1-\alpha) + (1-\alpha)(1-\beta) \\ \alpha\beta + \beta(1-\beta) & (1-\alpha)\beta + (1-\beta)^2 \end{vmatrix}$$

(ΤΙ ΣΗΜΑΙΝΟΥΝ;)

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u>: ΑΝ ΓΝΩΡΙΖΟΥΜΕ ΟΤΙ $\alpha_i = P\{X_0 = i\}$, ΤΟΤΕ:

$$P\{X_n = j\} = \sum_{i=0}^{\infty} P\{X_n = j \mid X_0 = i\} P\{X_0 = i\}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} P_{ij}^{n} \alpha_i$$

(17) ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ: 1) Η ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ j ΕΙΝΑΙ ΠΡΟΣΒΑΣΙΜΗ (ACCESSIBLE) ΑΠΟ ΤΗΝ i ΑΝ $P_{ij}^{n} > 0$ $\forall n \geq 0$, ΔΗΛΑΔΗ ΑΝ ΕΙΝΑΙ ΔΥΝΑΤΟΝ (ΟΧΙ ΒΕΒΑΙΟ) ΝΑ ΠΑΜΕ ΑΠΟ ΤΗΝ i ΣΤΗΝ j.

2) ΔΥΟ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ i, j ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΟΥΝ (COMMUNICATE) ΑΝ Η ΜΙΑ ΕΙΝΑΙ ΠΡΟΣΒΑΣΙΜΗ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΛΛΗ ΚΑΙ ΓΡΑΦΟΥΜΕ $i \leftrightarrow j$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΣ

(i) Η ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ i ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΕΙ ΜΕ ΤΗΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ i.

ΠΡΑΓΜΑΤΙ: $P_{ii}^{0} = P\{X_K = i \mid X_K = i\} = 1 > 0$ (REFLECTIVE PROPERTY)

(ii) ΑΝ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΕΙ Η i ΜΕ ΤΗΝ j, ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΕΙ ΚΑΙ Η j ΜΕ ΤΗΝ i (ΠΡΟΦΑΝΕΣ ΑΠΟ ΟΡΙΣΜΟ) (SYMMETRIC PROPERTY)

(iii) ΑΝ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΕΙ Η i ΜΕ ΤΗΝ j, ΚΑΙ Η j ΜΕ ΤΗΝ k, ΤΟΤΕ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΕΙ Η i ΜΕ ΤΗΝ k (TRANSITIVE PROPERTY)

(ΠΡΑΓΜΑΤΙ: $P_{ij}^{n} > 0$, $P_{jk}^{m} > 0 \Rightarrow P_{ik}^{n+m} = \sum_{r=0}^{\infty} P_{ir}^{n} P_{rk}^{m} \underset{(j=r)}{\geq} P_{ij}^{n} P_{jk}^{m} > 0$.)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: ΟΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΠΟΥ ΕΧΟΥΝ ΤΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ (i), (ii), (iii) ΚΑΛΟΥΝΤΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ (EQUIVALENCE) ΚΑΙ ΟΡΙΖΟΥΝ ΜΙΑ ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ.

(ΑΛΛΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΕΠΩΝΥΜΑ)

ΟΡΙΣΜΟΣ: ① ΔΥΟ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ ΠΟΥ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΟΥΝ ΑΝΗΚΟΥΝ ΣΤΗΝ ΙΔΙΑ ΚΛΑΣΗ

② ΑΝ Η ΑΛΥΣΙΔΑ ΕΧΕΙ ΜΟΝΟ ΜΙΑ ΚΛΑΣΗ, ΚΑΛΕΙΤΑΙ ΑΜΕΙΩΤΗ (IRREDUCIBLE)

ΕΡΩΤΗΣΗ: ΠΟΙΕΣ ΕΙΝΑΙ ΟΙ ΚΛΑΣΕΙΣ ΠΟΥ ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΣΤΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΠΟΥ ΕΙΔΑΜΕ?

ΟΡΙΣΜΟΣ: ΕΣΤΩ f_i Η ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ, ΜΕ ΔΕΔΟΜΕΝΟ ΟΤΙ ΞΕΚΙΝΑΣΤΕ ΣΤΗΝ i, ΝΑ ΕΠΙΣΤΡΕΨΟΥΜΕ ΞΑΝΑ ΣΤΗΝ i.
Η i ΚΑΛΕΙΤΑΙ ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΗ (RECURRENT) ΑΝ $f_i=1$.
ΑΛΛΙΩΣ ($f_i<1$) ΚΑΛΕΙΤΑΙ ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΗ (TRANSIENT)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:
- ΑΝ Η i ΕΙΝΑΙ ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΗ, ΑΝ ΒΡΕΘΟΥΜΕ ΚΑΠΟΤΕ ΣΤΗΝ i ΘΑ ΕΠΙΣΤΡΕΨΟΥΜΕ ΑΠΕΙΡΕΣ ΦΟΡΕΣ
- ΑΝ Η i ΕΙΝΑΙ ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΗ, ΑΝ ΒΡΕΘΟΥΜΕ ΚΑΠΟΤΕ ΣΤΗΝ i ΘΑ ΕΠΙΣΤΡΕΨΟΥΜΕ X ΦΟΡΕΣ, ΟΠΟΥ X ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΜΕ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ $1-f_i$

ΘΕΩΡΗΜΑ (ΚΡΙΤΗΡΙΟ): Η ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ i ΕΙΝΑΙ:

$$\begin{cases} \text{ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΗ, ΑΝ } \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{n} = +\infty \\ \text{ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΗ, ΑΝ } \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{n} < \infty \end{cases}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: ΕΣΤΩ $I_n = \begin{cases} 1, & \text{ΑΝ } X_n = i \\ 0, & \text{ΑΛΛΙΩΣ} \end{cases}$

ΕΣΤΩ ΕΠΙΣΗΣ X = ΦΟΡΕΣ ΠΟΥ ΕΠΙΣΚΕΠΤΟΜΑΣΤΕ ΤΗΝ i.

$$E[X|X_0=i] = E\left[\sum_{n=0}^{\infty} I_n \,\Big|\, X_0=i\right] = \sum_{n=0}^{\infty} E[I_n | X_0=i]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(1\cdot P_{ii}^{n} + 0\cdot(1-P_{ii}^{n})\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{n}.$$

- ΑΝ $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{n} = +\infty$, ΕΠΙΣΚΕΠΤΟΜΑΙ ΑΠΕΙΡΕΣ ΦΟΡΕΣ ΤΟ i $\Rightarrow$ ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΗ
- ΑΝ $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{n} < \infty$, ΕΠΙΣΚΕΠΤΟΜΑΙ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΦΟΡΕΣ ΤΟ i $\Rightarrow$ ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΗ

ΘΕΩΡΗΜΑ: ΟΙ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ ΜΙΑΣ ΚΛΑΣΗΣ ΕΙΝΑΙ ΑΠΟ ΚΟΙΝΟΥ ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΕΣ Η' ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΕΣ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: ΕΣΤΩ ΟΤΙ Η i ΕΙΝΑΙ ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΗ
ΕΣΤΩ ΟΤΙ Η i ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΕΙ ΜΕ ΤΗΝ j. ΑΡΑ ΥΠΑΡΧΟΥΝ k, m: $P_{ij}^{k} > 0$, $P_{ji}^{m} > 0$.

ΑΚΟΜΑ: $P_{jj}^{m+n+k} \geq P_{ji}^{k} P_{ii}^{n} P_{ij}^{m} \Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{m+k+n} \geq P_{ji}^{k} P_{ij}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{n} = +\infty$$

$$\wedge \sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P_{ji}^{n} = +\infty \Rightarrow$$ Η j ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΗ

ΑΡΑ: 1) ΟΛΕΣ ΟΙ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ ΕΙΝΑΙ ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΕΣ ΑΝ ΕΙΝΑΙ ΜΙΑ ΣΕ ΜΙΑ ΚΛΑΣΗ

$\Rightarrow$ 2) ΟΛΕΣ ΟΙ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ ΕΙΝΑΙ ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΕΣ ΑΝ ΕΙΝΑΙ ΜΙΑ

ΕΡΩΤΗΣΗ: ΤΙ ΕΙΝΑΙ ΟΙ ΚΛΑΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΛΥΣΙΔΩΝ ΠΟΥ ΕΙΔΑΜΕ?

18 ΟΡΙΑΚΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Η ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ i ΕΧΕΙ ΠΕΡΙΟΔΟ d ΑΝ $P_{ii}^{n} = 0$ ΟΠΟΤΕ ΤΟ d ΔΕΝ ΔΙΑΙΡΕΙ ΤΟ n, ΚΑΙ d ΕΙΝΑΙ Ο ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΑΚΕΡΑΙΟΣ ΜΕ ΑΥΤΗ ΤΗΝ ΙΔΙΟΤΗΤΑ. ΜΙΑ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΜΕ ΠΕΡΙΟΔΟ 1 ΚΑΛΕΙΤΑΙ ΑΠΕΡΙΟΔΙΚΗ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

ΚΟΚ.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Η ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΕΙΝΑΙ ΚΟΙΝΗ ΓΙΑ ΟΛΕΣ ΤΙΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ ΜΙΑΣ ΚΛΑΣΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: ΜΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΚΑΛΕΙΤΑΙ

- ΘΕΤΙΚΑ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΑΝ Ο ΜΕΣΟΣ ΧΡΟΝΟΣ ΜΕΤΑΞΥ ΕΠΙΣΚΕΨΕΩΝ ΣΕ ΑΥΤΗ ΕΙΝΑΙ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΣ (POSITIVE RECURRENT)
- ΜΗΔΕΝΙΚΑ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ (NULL RECURRENT) ΑΝ Ο ΧΡΟΝΟΣ ΕΙΝΑΙ ΑΠΕΙΡΟΣ.

ΟΡΙΣΜΟΣ: ΜΙΑ ΑΜΕΙΩΤΗ, ΑΠΕΡΙΟΔΙΚΗ, ΘΕΤΙΚΑ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΑΛΥΣΙΔΑ ΜΑΡΚΟΦ ΚΑΛΕΙΤΑΙ ΕΡΓΟΔΙΚΗ (ERGODIC)

ΘΕΩΡΗΜΑ: ΑΝ ΜΙΑ ΑΛΥΣΙΔΑ ΜΑΡΚΟΦ ΕΙΝΑΙ ΕΡΓΟΔΙΚΗ, ΤΟΤΕ ΥΠΑΡΧΕΙ ΤΟ ΟΡΙΟ $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{n}$ ΚΑΙ ΕΙΝΑΙ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ ΤΟΥ i:

ΕΣΤΩ $\pi_j \triangleq \lim_{n\to\infty} P_{ij}^{n}$. ΤΑ $\{\pi_j\}$ ΕΙΝΑΙ Η ΜΟΝΑΔΙΚΗ ΜΗ ΑΡΝΗΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{ij}, \quad j \geq 0, \quad \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: (ΚΑΙΡΟΣ) $P = \begin{vmatrix} a & 1-a \\ \beta & 1-\beta \end{vmatrix}$

(1) $\pi_0 = a\pi_0 + \beta\pi_1 \Leftrightarrow (\pi_0 \ \ \pi_1)\cdot P = (\pi_0 \ \ \pi_1)$

(2) $\pi_1 = (1-a)\pi_0 + (1-\beta)\pi_1$

(ΑΡΙΣΤΕΡΟ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑ ΜΕ ΙΔΙΟΤΙΜΗ 1)

ΕΠΙΣΗΣ: $\pi_0 + \pi_1 = 1$ (3)

(1),(2),(3) $\Rightarrow \pi_0 = \dfrac{\beta}{1+\beta-a}, \quad \pi_1 = \dfrac{1-a}{1+\beta-a}$

(ΜΙΑ ΠΕΡΙΤΤΗ!) ΠΟΙΑ?

ΑΡΑ $P^{(\infty)} = \begin{vmatrix} \pi_0 & \pi_1 \\ \pi_0 & \pi_1 \end{vmatrix}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

(1) ΕΣΤΩ ΠΩΣ ΥΠΑΡΧΕΙ ΤΟ ΟΡΙΟ. ΤΟΤΕ:

$$P\{X_{n+1}=j\} = \sum_{i=0}^{\infty} P\{X_{n+1}=j \mid X_n=i\}\, P\{X_n=i\}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} P_{ij}\, P\{X_n=i\}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P\{X_{n+1}=j\} = \sum_{i=0}^{\infty} P_{ij} \lim_{n\to\infty} P\{X_n=i\}$$

$$\Rightarrow \pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} P_{ij}\, \pi_i$$ ΑΡΑ ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΕΙΝΑΙ ΛΟΓΙΚΕΣ

(2) ΕΠΙΣΗΣ, ΤΑ π_j ΕΙΝΑΙ ΤΑ ΠΟΣΟΣΤΑ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΠΟΥ ΕΙΜΑΣΤΕ ΣΤΗΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ j.

(3) ΤΙ ΕΚΦΡΑΖΟΥΝ ΤΑ $\pi_i P_{ij}$? ΡΥΘΜΟ ΜΕΤΑΒΑΣΕΩΝ ΑΠΟ ΤΗΝ i ΣΤΗ j

(4)
$$\underbrace{\pi_j}_{\text{ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΑΣΕΩΝ ΠΡΟΣ ΤΗΝ } j} = \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{P_{ij}\pi_i}_{\text{ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΑΣΕΩΝ ΑΠΟ ΤΗΝ } i \text{ ΣΤΗ } j}}_{\text{ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΑΣΕΩΝ ΠΡΟΣ ΤΗ } j}$$

(5) Η $\{\pi_j\}$ ΚΑΛΕΙΤΑΙ ΣΤΑΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ: ΑΝ $P\{X_n=j\}=\pi_j$, ΤΟΤΕ

$$P\{X_{n+1}=j\} = \sum_{i=0}^{\infty} P_{ij}\,\pi_i = \pi_j,$$ ΔΗΛΑΔΗ ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΗ ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΟΡΙΟ, Η ΑΛΥΣΙΔΑ ΕΧΕΙ ΓΙΝΕΙ ΣΤΑΤΙΚΗ (STATIONARY)

(*) ΑΡΑ $P_{X_1,X_2,\ldots X_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n) =$

$$P_{X_1}(x_1)\cdot P_{X_2|X_1}(x_2|x_1)\cdot P_{X_3|X_2}(x_3|x_2)\ldots P_{X_n|X_{n-1}}(x_n|x_{n-1})$$