8 ΕΝΤΡΟΠΙΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ: ΕΣΤΩ ΔΙΑΚΡΙΤΗ Τ.Μ. X ΜΕ ΑΛΦΑΒΗΤΟ $\mathcal{X}$.
Η ΕΝΤΡΟΠΙΑ ΤΗΣ ΟΡΙΖΕΤΑΙ ΩΣ:

$$H(X) \triangleq -\sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \log_2 p(x)$$

ΟΠΟΥ $0 \log 0 = 0$. (ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΟ)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: 1) $x \log x \to 0$, ΚΑΘΩΣ $x \to 0^+$

2) ΜΕΤΡΑΤΑΙ ΣΕ bits.

3) ΣΥΜΒΑΣΗ: $\log x = \log_2 x$.

4) $H_\alpha(X) = -\sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \log_\alpha p(x)$

(ΑΝ $\alpha = e$, Η ΕΝΤΡΟΠΙΑ ΜΕΤΡΑΤΑΙ ΣΕ nats

5) $H(X) = E_p \log\left(\frac{1}{p(X)}\right)$

E_p → ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΜΕ ΚΑΤΑΝΟΜΗ p

6) $H_b(X) = (\log_b \alpha) H_\alpha(X)$

7) $H(X) \geq 0$, ΓΙΑΤΙ $0 \leq p(x) \leq 1 \Rightarrow \log(x) > 0$

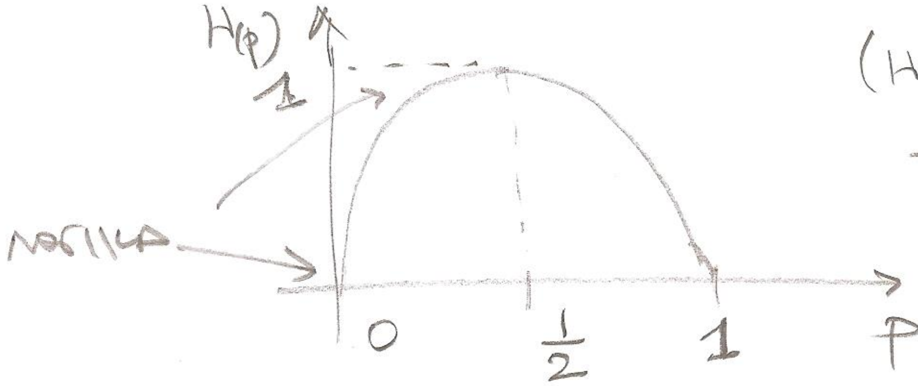
ΒΑΣΙΚΗ ΕΡΩΤΗΣΗ: ΓΙΑΤΙ ΑΥΤΟΣ Ο ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΟΧΙ ΚΑΠΟΙΟΣ ΑΛΛΟΣ;

(ΠΑΡΟΜΟΙΑ)
ΒΑΣΙΚΗ ΕΡΩΤΗΣΗ: ΤΙ ΣΗΜΑΙΝΕΙ ΜΙΑ ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΝΑ ΕΧΕΙ ΕΝΤΡΟΠΙΑ 3;

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: (BERNOULLI)

$$X = \begin{cases} 1, & \text{ΜΕ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ } p \\ 0, & \text{-'' - } 1-p \end{cases}$$

$$H(X) = -p\log p - (1-p)\log(1-p) \triangleq H(p)$$



$$\left(H\left(\tfrac{1}{2}\right) = -\tfrac{1}{2}\log\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\log\tfrac{1}{2} = -\log\tfrac{1}{2} = \log 2 = 1 \right)$$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:</u>

$$X = \begin{cases} a & \text{μ.π. } \tfrac{1}{2} \\ b & \text{μ.π. } \tfrac{1}{4} \\ c & \text{μ.π. } \tfrac{1}{8} \\ d & \text{μ.π. } \tfrac{1}{8} \end{cases}$$

$$H(X) = -\tfrac{1}{2}\log\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\log\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8}\log\tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{8}\log 8$$

$$= \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{4} + \tfrac{3}{8} + \tfrac{3}{8} = \tfrac{7}{4}$$

ΕΣΤΩ ΟΤΙ ΘΕΛΩ ΝΑ ΜΕΤΑΔΩΣΩ ΤΗΝ X

<u>ΠΡΩΤΟΣ ΤΡΟΠΟΣ:</u> $a \to 00$, $b \to 01$, $c \to 10$, $d \to 11$. ΘΕΛΩ ΔΥΟ bits.

<u>ΔΕΥΤΕΡΟΣ ΤΡΟΠΟΣ:</u> $a \to 0$, $b \to 10$, $c \to 110$, $d \to 111$

ΘΕΛΩ = $\tfrac{1}{2}\cdot 1 + \tfrac{1}{4}\cdot 2 + \tfrac{1}{8}\cdot 3 + \tfrac{1}{8}\cdot 3 = \tfrac{7}{4}$ bits!

ΜΠΟΡΩ ΝΑ ΜΕΤΑΔΩΣΩ ΜΙΑ ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ X ΜΕ ΤΟ ΠΟΛΥ $H(X)+1$ bits

③ ΑΠΟ ΚΟΙΝΟΥ ΚΑΙ ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΗ ΕΝΤΡΟΠΙΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Η ΑΠΟ ΚΟΙΝΟΥ ΕΝΤΡΟΠΙΑ $H(X,Y)$ ΕΝΟΣ ΖΕΥΓΟΥΣ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΟΡΙΖΕΤΑΙ ΜΕ

$$H(X,Y) = -\sum_{x\in\mathcal{X}}\sum_{y\in\mathcal{Y}} p(x,y)\log p(x,y)$$

$p_{XY}(x,y)$

$$= -E_p \log p(X,Y)$$

ΤΙ ΣΗΜΑΙΝΕΙ?

ΟΡΙΣΜΟΣ: Η ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΕΝΤΡΟΠΙΑ $H(Y|X)$ ΟΡΙΖΕΤΑΙ ΩΣ:

$$H(Y|X) = \sum_{x\in\mathcal{X}} p(x) H(Y|X=x)$$

$p_{Y|X}(y|x)$

$$= -\sum_{x\in\mathcal{X}} p(x) \sum_{y\in\mathcal{Y}} p(y|x)\log p(y|x)$$

$$= -\sum_{x\in\mathcal{X}}\sum_{y\in\mathcal{Y}} p(x,y)\log p(y|x)$$

$$= -E\log p(Y|X)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ (ΚΑΝΟΝΑΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ)

ΤΙ ΣΗΜΑΙΝΕΙ?

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y|X)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $H(X,Y) = -\sum_{x\in\mathcal{X}}\sum_{y\in\mathcal{Y}} p(x,y)\log p(x,y)$

$$= \sum_{x\in\mathcal{X}}\sum_{y\in\mathcal{Y}} p(x,y)\log p(x)\,p(y|x)$$

$$= -\sum_{x\in X}\sum_{y\in Y} p(x,y)\log p(x)$$

$$-\sum_{x\in X}\sum_{y\in Y} p(x,y)\log p(y|x)$$

$$= \underbrace{-\sum_{x\in X}\log p(x)\underbrace{\sum_{y\in Y}p(x,y)}_{p(x)}}_{H(X)} + H(Y|X)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Y \ X	1	2	3	4	P(y)
1	1/8	1/16	1/32	1/32	1/4
2	1/16	1/8	1/32	1/32	1/4
3	1/16	1/16	1/16	1/16	1/4
4	1/4	0	0	0	1/4
p(x)	1/2	1/4	1/8	1/8	

$$H(X) = -\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\log\frac{1}{4} - 2\cdot\frac{1}{8}\log\frac{1}{8} = \frac{7}{4}$$

$$H(Y) = \left(-\frac{1}{4}\log 4\right)\times 4 = 2$$

$$p_{X|Y}(x|1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$$

$$p_{X|Y}(x|2) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$$

$$p_{X|Y}(x|3) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

$$p_{X|Y}(x|4) = (1, 0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \quad H(X|Y) = \frac{1}{4} H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{4} H\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{4} H\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} H(1, 0, 0, 0)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{4} + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 0 = \frac{11}{8} \text{ bits}$$

ΠΑΡΟΜΟΙΑ: $H(Y|X) = \frac{13}{8}$ bits, $H(X,Y) = \frac{27}{8}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: $H(Y|X) \neq H(X|Y)$

(10) ΣΧΕΤΙΚΗ ΕΝΤΡΟΠΙΑ ΚΑΙ ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Η σχετική εντροπία ή απόσταση Kullback-Leibler μεταξύ δύο μαζών $p(x), q(x)$ ορίζεται ως

$$D(p\|q) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)}$$

$$= E_p \log \frac{p(x)}{q(x)}$$

όπου $0 \log \frac{0}{0} = 0$, $0 \log \frac{0}{q} = 0$, $p \log \frac{p}{0} = +\infty$ $(p > 0)$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: $D(p\|q) \neq D(q\|p)$

ΠΡΟΦΑΝΩΣ $p=q \Rightarrow D(p\|q)=0$. ΤΙ ΕΚΦΡΑΖΕΙ Η ΑΠΟΣΤΑΣΗ;

ΟΡΙΣΜΟΣ: ΕΣΤΩ Τ.Μ. X,Y ΜΕ ΜΑΖΕΣ $p(x,y)$, $p(x)$, $p(y)$. Η ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ X,Y ΟΡΙΖΕΤΑΙ ΩΣ:

$$I(X;Y) = \sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{y \in \mathcal{Y}} p(x,y) \log \frac{p(x,y)}{p(x)p(y)}$$

$$= D\big(p(x,y) \,\|\, p(x)p(y)\big)$$

$$= E_{p(x,y)} \log \frac{p(X,Y)}{p(X)p(Y)}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ:

1) $I(X;Y) = H(X) - H(X|Y)$

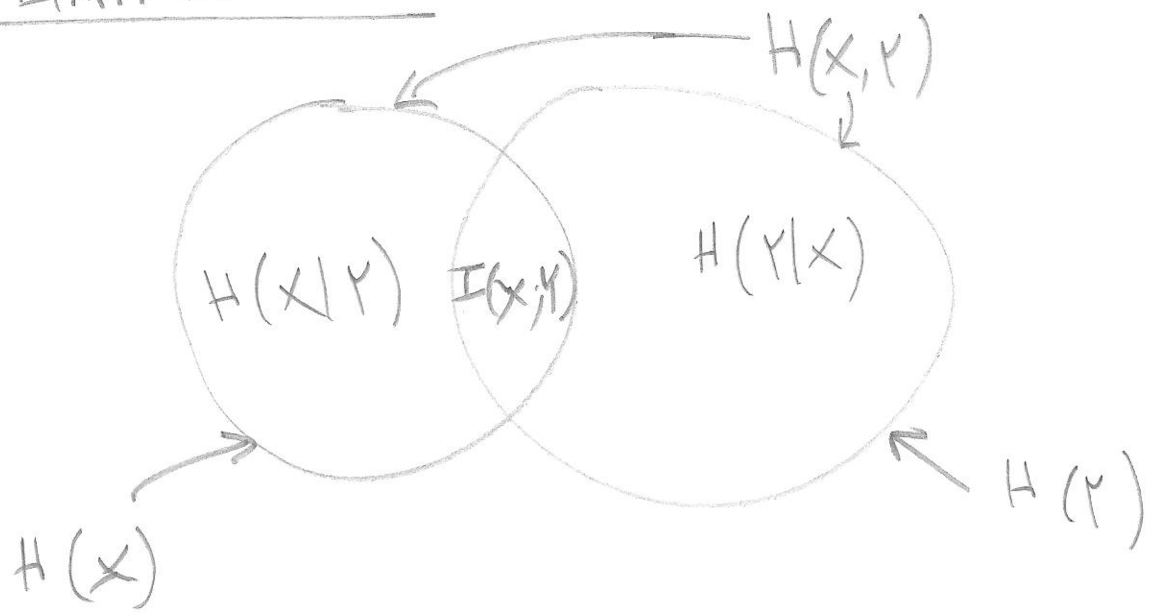
2) $I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X)$

3) $I(X;Y) = I(Y;X)$

4) $I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)$

5) $I(X;X) = H(X)$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ VENN:



ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

1) $$I(X;Y) = \sum_{x,y} p(x,y)\log\frac{p(x,y)}{p(x)\,p(y)}$$

$$= \sum_{x,y} p(x,y)\log\frac{p(x|y)}{p(x)} =$$

$$\sum_{x,y} p(x,y)\log p(x|y) - \sum_{x,y} p(x,y)\log p(x)$$

$\|$

$-H(X|Y)$

$\|$

$$-\sum_{x\in X}\sum_{y\in Y} p(x,y)\log p(x)$$

$\|$

$$-\sum_{x\in X}\log p(x)\sum_{y\in Y} p(x,y)$$

$$-\sum_{x\in X}\log p(x)\cdot p(x) = H(X)$$

2) ΠΑΡΟΜΟΙΩΣΕ

3) ΕΞ ΟΡΙΣΜΟΥ

4) $$I(X;Y) = \sum_{x,y} p(x,y) \log \frac{p(x,y)}{p(x)p(y)}$$

$$= \sum_{x,y} p(x,y) \log p(x,y) \longrightarrow = -H(X,Y)$$

$$- \sum_{x,y} p(x,y) \log p(x) - \sum_{x,y} p(x,y) \log p(y)$$

$$\sum_{x,y} p(x,y) \log p(y) \longrightarrow H(Y)$$

$$\sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x,y) \log p(x)$$

$$\parallel$$

$$\underbrace{\sum_{x \in X} \log p(x) \underbrace{\sum_{y \in Y} p(x,y)}_{p(x)}}_{H(X)}$$

ΕΝΑΣ ΤΡΟΠΟΣ ΝΑ ΤΟ ΚΑΤΑΛΑΒΕΤΑΙ: ΦΑΝΤΑΣΤΕΙΤΕ X_1, X_2, ΟΠΟΥ $P(X_1 = X_2) = 1$

5) $$I(X;X) = \sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} p(x_1,x_2) \log \frac{p(x_1,x_2)}{p(x_1)p(x_2)}$$

$$= \sum_{x_1 \in X} p(x_1) \log \frac{p(x_1)}{p(x_1)^2} =$$

$$- \sum_{x_1 \in X} p(x_1) \log p(x_1) = H(X)$$