ΜΙΑ ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ X ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $X: S \to \mathbb{R}$ ΑΠΟ ΤΟΝ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟ ΧΩΡΟ S ΣΤΟΥΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ. ΚΛΗΡΟΝΟΜΕΙ ΤΗΝ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΤΗΣ ΑΠΟ ΤΟ ΜΕΤΡΟ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΤΟΥ S:

$$\boxed{P(X\in A) = P(X^{-1}(A))}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΡΙΧΝΟΥΜΕ ΔΥΟ ΖΑΡΙΑ. ΕΣΤΩ $X = X_1 + X_2$ ΤΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΤΟΥΣ. ΕΣΤΩ ΟΤΙ ΤΑ ΖΑΡΙΑ ΕΙΝΑΙ ΔΙΚΑΙΑ ΚΑΙ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ

$$P(X=12) = P(X_1 = 6 \wedge X_2 = 6)$$

$$= P(X_1=6)P(X_2=6) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$P(X=11) = P(\{(5,6),(6,5)\}) = 2\cdot\frac{1}{36} = \frac{1}{18}$$

$$\vdots$$

$$P(X=7) = P(\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}) = \frac{6}{36}$$

κοκ.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ (CUMULATIVE DISTRIBUTION FUNCTION) ΤΗΣ X ΟΡΙΖΕΤΑΙ ΩΣ:

$$F_X(x) = P(\{X \le x\}) = P(\{s\in S : X(s) \le 6\})$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ $F_X(x)$

(i) ΜΗ ΦΘΙΝΟΥΣΑ

(ii) $\lim_{6\to\infty} F(6) = 1$, $\lim_{6\to-\infty} F(6) = 0$

(iii) ΔΕΞΙΑ ΣΥΝΕΧΗΣ

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΣΟΥΜΕ ΤΗΝ $F_X(x)$ ΓΙΑ ΝΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΟΥΜΕ ΟΠΟΙΑΔΗΠΟΤΕ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $P(X \in A)$:

(i) $P(X \in (-\infty, b]) = P(X \in (-\infty, a] \cup (a, b]) =$

$P(X \in (-\infty, a]) + P((a, b]) \Rightarrow$

$P(a < X \leq b) = P(X \in (-\infty, b]) - P(X \in (-\infty, a])$

$= F_X(b) - F_X(a)$

(ii) $P(X < b) \underset{A}{=} \lim_{n \to \infty} P\left(X \leq b - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} F\left(b - \frac{1}{n}\right)$

$= F(b^-)$ ΚΟΚ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: ΤΟ ΜΕΤΡΟ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΕΧΕΣ:

(i) ΑΝ $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ ΚΑΙ $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, ΤΟΤΕ

$\lim_{n \to \infty} P(A_n) = P(A)$

(ii) ΑΝ $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ ΚΑΙ $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, ΤΟΤΕ

$\lim_{n \to \infty} P(A_n) = P(A)$

Η (A) ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ (i) ΤΗΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗΣ ΓΙΑ $A_i = \left\{X \leq b - \frac{1}{n}\right\}$, $A = \{X < b\}$

ΓΙΑΤΙ $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

5) ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

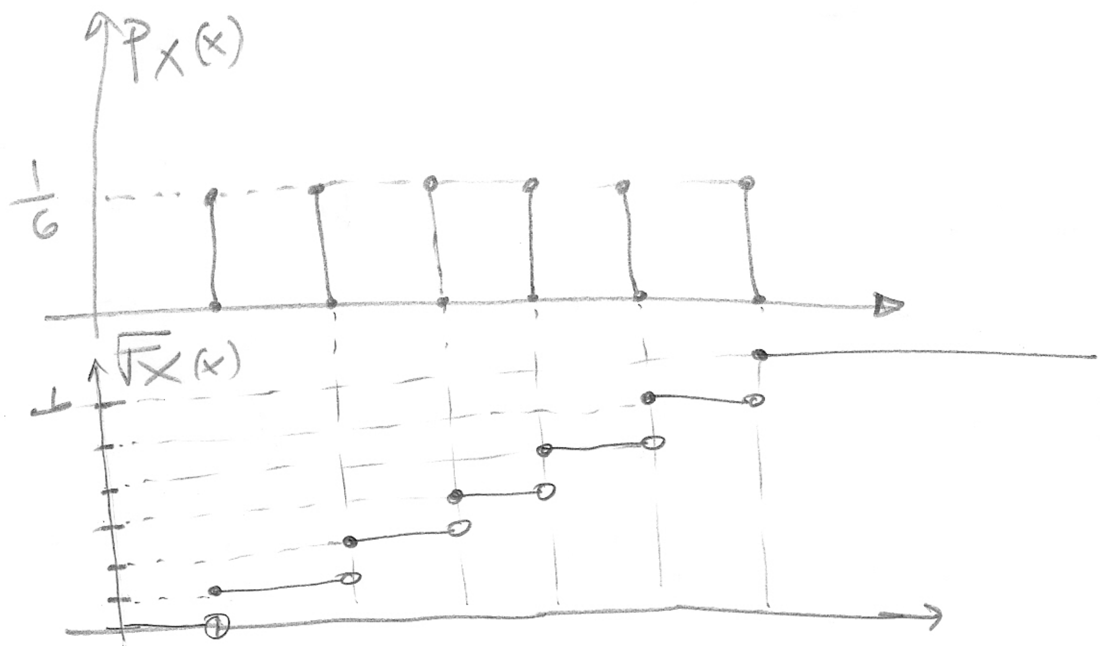
ΜΙΑ ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΚΑΛΕΙΤΑΙ **ΔΙΑΚΡΙΤΗ** (DISCRETE) ΑΝ ΛΑΜΒΑΝΕΙ ΤΙΜΕΣ ΑΠΟ ΕΝΑ ΑΡΙΘΜΗΣΙΜΟ ΣΥΝΟΛΟ $\mathcal{X}$
ΟΡΙΖΟΥΜΕ ΤΗΝ **ΜΑΖΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ** (PROBABILITY MASS FUNCTION - P.M.F.) ΩΣ

$$P_X(x) = P(X=x)$$

Η ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΗΣ X ΙΣΟΥΤΑΙ ΜΕ $F_X(x) = \sum_{x_i \leq x} P_X(x_i)$

ΕΠΙΣΗΣ:
$$P_X(x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_i^-)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΔΙΚΑΙΟ ΖΑΡΙ X. $P_X(1) = \dots P_X(6) = \frac{1}{6}$



(A) Τ.Μ. BERNOULLI:
$$X = \begin{cases} 0, & \text{w.p. } 1-p \\ 1, & \text{w.p. } p \end{cases}$$

(B) ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ: $\mathcal{X} = \{0, 1, \dots, n\}$

$$P_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 1, \dots, n$$

ΟΠΟΥ
$n \in \mathbb{N}, \quad p \in [0,1]$

Ο ΑΡΙΘΜΟΣ ΤΩΝ ΕΠΙΤΥΧΙΩΝ ΣΕ N ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ, ΚΑΘΕΝΑ ΜΕ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ p, ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΗΝ ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ (ΚΑΝΕ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΜΕ ΖΑΡΙΑ)

Γ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ Τ.Μ. $\mathcal{X} = \{1, 2, \ldots, \}$

$$P_X(x) = (1-p)^{x-1} \cdot p$$

Ο ΑΡΙΘΜΟΣ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΩΝ ΠΕΙΡΑΜΑΤΩΝ ΜΕ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ p ΠΟΥ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΓΙΝΟΥΝ ΜΕΧΡΙ ΝΑ ΕΧΩ ΜΙΑ ΕΠΙΤΥΧΙΑ ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ (ΚΑΝΕ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΜΕ ΖΑΡΙΑ)

Δ Τ.Μ. POISSON $\mathcal{X} = \{0, 1, \ldots\}$

$$P_X(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}, \quad \lambda > 0, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

(ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΣ)

(Η POISSON ΠΡΟΣΕΓΓΙΖΕΙ ΤΗΝ ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ ΟΤΑΝ $N \to \infty$, $p \to 0$, $N \cdot p \to \lambda$) (Π.Χ. ΑΡΙΘΜΟΣ ΑΕΡΟΠΟΡΙΚΩΝ ΑΤΥΧΗΜΑΤΩΝ ΕΤΗΣΙΩΣ)

6 ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ

Η ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΜΙΑΣ Τ.Μ. X ΟΡΙΖΕΤΑΙ ΩΣ:

$$E[X] = \sum_{x \in \mathcal{X}} x \, P_X(x)$$

* ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΠΟΜΕΝΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ: (i) $E[g(X)] = \sum_{x \in \mathcal{X}} g(x) P_X(x)$

(ii) $E[aX+b] = aE[X] + b$

(iii) ΕΣΤΩ $X_1, X_2, \ldots$ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ Τ.Μ. ΜΕ ΤΗΝ ΙΔΙΑ ΚΑΤΑΝΟΜΗ (INDEPENDENT, IDENTICALLY DISTRIBUTED) ΚΑΙ ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ μ

ΤΟΤΕ: ΜΕ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ 1,

$$\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n} \to \mu \quad \text{ΚΑΘΩΣ} \quad n\to\infty$$

(ΙΣΧΥΡΟΣ ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΓΑΛΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ)
STRONG LAW of LARGE NUMBERS SLLN

(iv) $$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n}-\mu\right|<\epsilon\right)\to 1 \quad \text{ΚΑΘΩΣ} \quad n\to\infty, \quad \forall \epsilon>0$$

(ΑΣΘΕΝΗΣ ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΓΑΛΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ)
WEAK LAW of LARGE NUMBERS

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΡΙΨΗ ΖΑΡΙΟΥ.

$$E[X] = 1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+\dots+6\cdot\frac{1}{6}=3,5$$

(7) ΑΠΟ ΚΟΙΝΟΥ ΚΑΤΑΝΕΜΗΜΕΝΕΣ ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΡΙΧΝΩ ΔΥΟ ΖΑΡΙΑ X_1, X_2

X_1 \ X_2	1	2	3	4	5	6
1	1/36	1/36	1/36			
2	1/36					
3						
4						
5						
6						

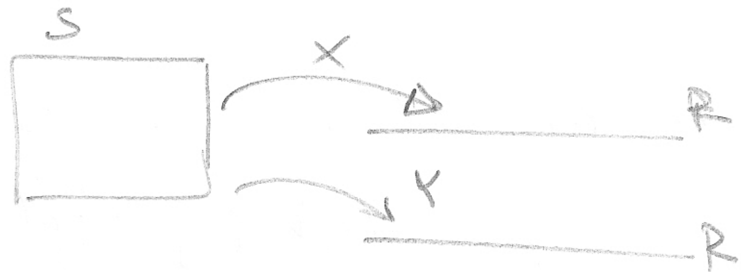
ΕΣΤΩ $Y=\min(X_1,X_2)$, $Z=\max(X_1,X_2)$

Y \ Z	1	2	3	4	5	6	
1	1/36	2/36	2/36	2/36	2/36	2/36	11/36
2	0	1/36	2/36	2/36	2/36	2/36	9/36
3	0	0	1/36	2/36	2/36	2/36	7/36
4	0	0	0	1/36	2/36	2/36	5/36
5	0	0	0	0	1/36	2/36	3/36
6	0	0	0	0	0	1/36	1/36
	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36	

ΠΕΡΙΘΩΡΙΕΣ ΜΑΖΕΣ

ΑΠΟ ΚΟΙΝΟΥ ΜΑΖΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ'': ΑΠΟ ΚΟΙΝΟΥ ΚΑΤΑΝΕΜΗΜΕΝΕΣ Τ.Μ. ΚΑΛΟΥΝΤΑΙ ΔΥΟ ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΠΟΥ ΠΡΟΕΡΧΟΝΤΑΙ ΑΠΟ ΤΟ ΙΔΙΟ ΠΕΙΡΑΜΑ:



ΟΡΙΣΜΟΣ: 1) ΑΠΟ ΚΟΙΝΟΥ ΜΑΖΑ: $P_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y)$

2) ΠΕΡΙΘΩΡΙΕΣ ΜΑΖΕΣ:

$$P_X(x) = \sum_{y \in \mathcal{Y}} P_X(x,y), \quad P_Y(y) = \sum_{x \in \mathcal{X}} P_{X,Y}(x,y)$$

3) ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΗ ΜΑΖΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ:

$$P_{X|Y}(x|y) = P\{X=x \mid Y=y\} = \frac{P\{X=x, Y=y\}}{P\{Y=y\}} = \frac{P_{XY}(x,y)}{P_Y(y)}$$

$$P_{Y|X}(y|x) = \frac{P_{XY}(x,y)}{P_X(x)}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: ΟΙ X, Y ΚΑΛΟΥΝΤΑΙ **ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ** ΑΝ

$$\forall x \in \mathcal{X} \quad P_{XY}(x,y) = P_X(x)\, P_Y(y) \Leftrightarrow$$

$$\forall y \in \mathcal{Y} \quad P_{X|Y}(x|y) = P_X(x) \Leftrightarrow$$

(ΤΙ ΓΙΝΕΤΑΙ ΣΤΟ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ?)

$$P_{Y|X}(y|x) = P_Y(y)$$

ΙΔΙΟΤΗΤΑ:
$$E[g(X,Y)] = \sum_{(x,y) \in (\mathcal{X}, \mathcal{Y})} g(x,y)\, P_{X,Y}(x,y)$$

ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

(i) $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$

(ii) ΑΝ X, Y ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ,
$$\begin{cases} E[XY] = E[X]\,E[Y] \\ E[g(X)\,h(Y)] = E[g(X)]\,E[h(Y)] \end{cases}$$

Η ΘΕΩΡΙΑ ΕΠΕΚΤΕΙΝΕΤΑΙ ΕΥΚΟΛΑ ΚΑΙ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΠΑΝΩ ΑΠΟ ΔΥΟ Τ.Μ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:
$$E\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i\, E[X_i]$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: N ΑΤΟΜΑ ΑΝΑΚΑΤΕΥΟΥΝ ΤΑ ΚΑΠΕΛΑ ΤΟΥΣ ΚΑΙ ΕΠΙΛΕΓΟΥΝ ΕΝΑ ΣΤΗΝ ΤΥΧΗ. ΚΑΤΑ ΜΕΣΟ ΟΡΟ, ΠΟΣΟΙ ΠΑΙΡΝΟΥΝ ΤΟ ΚΑΠΕΛΟ ΤΟΥΣ?

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:
$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{Ο } i \text{ ΠΑΙΡΝΕΙ ΤΟ ΚΑΠΕΛΟ ΤΟΥ} \\ 0 & \text{ΑΛΛΙΩΣ} \end{cases}$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = n\, E[X_1] = n \cdot \frac{1}{n} = 1$$