ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS AND BUSINESS
ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ
SCHOOL OF INFORMATION SCIENCES & TECHNOLOGY
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
DEPARTMENT OF INFORMATICS

Παναγιώτης Κατερίνης
Καθηγητής

ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΑΘΗΝΑ 2019

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Γραφήματα και υπογραφήματα

1.1. Ορισμοί και βασικές έννοιες

Ένα **γράφημα** G είναι μια διατεταγμένη τριάδα $(V(G), E(G), \psi_G)$, η οποία αποτελείται από (i) ένα σύνολο $V(G)$, όπου $V(G) \neq \emptyset$, τα στοιχεία του οποίου ονομάζονται **κορυφές**, (ii) ένα σύνολο $E(G)$, όπου $E(G) \cap V(G) = \emptyset$, τα στοιχεία του οποίου ονομάζονται **ακμές** και (iii) μια συνάρτηση ψ_G, βάσει της οποίας σε κάθε ακμή του G αντιστοιχεί ένα μη διατεταγμένο ζεύγος (όχι απαραίτητα διαφορετικών) κορυφών του G.

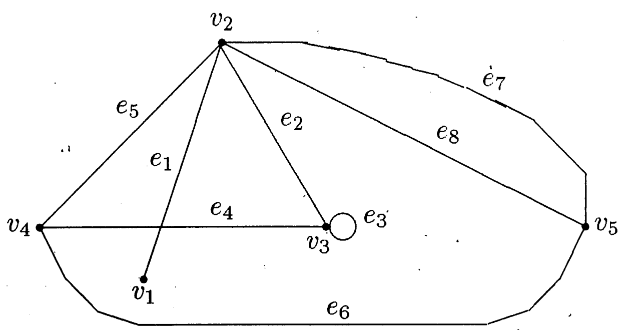
<u>Παράδειγμα 1.1:</u> $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ όπου $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$, και όπου η ψ_G ορίζεται ως εξής:

$$\begin{array}{llll} \psi_G(e_1) = \{v_1, v_2\}, & \psi_G(e_2) = \{v_2, v_3\}, & \psi_G(e_3) = \{v_3, v_3\}, & \psi_G(e_4) = \{v_3, v_4\} \\ \psi_G(e_5) = \{v_2, v_4\}, & \psi_G(e_6) = \{v_4, v_5\}, & \psi_G(e_7) = \{v_2, v_5\}, & \psi_G(e_8) = \{v_2, v_5\} \end{array}$$

Η μέχρι τώρα ορολογία που χρησιμοποιήσαμε (ακμές, κορυφές, κ.λπ.) προέρχεται από την εξής **γραφική παράσταση** των γραφημάτων:

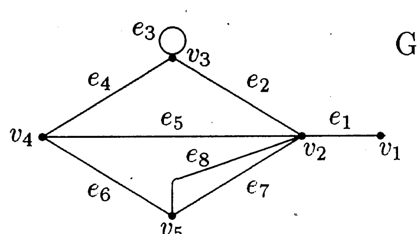
Κάθε κορυφή απεικονίζεται μ' ένα σημείο στο επίπεδο και κάθε ακμή με μια γραμμή που συνδέει το ζεύγος των κορυφών στις οποίες αντιστοιχεί, δηλαδή η ακμή e συνδέει τις κορυφές u και v αν και μόνο αν $\psi_G(e) = \{u, v\}$.

Στο Σχ. 1.1 έχουμε την γραφική παράσταση του γραφήματος G του Παραδείγματος 1.1.



Σχ. 1.1

Εδώ θα πρέπει να παρατηρήσουμε, ότι η γραφική παράσταση ενός γραφήματος G εκφράζει απλώς την σχέση που υπάρχει μεταξύ των κορυφών του και των ακμών του, έτσι όπως καθορίζεται αυτή από την συνάρτηση ψ_G. Επομένως οι θέσεις των σημείων και γραμμών στο επίπεδο δεν έχουν σημασία. Για παράδειγμα στο Σχ. 1.2 έχουμε ένα διαφορετικό τρόπο γραφικής παράστασης του γραφήματος G του Παραδείγματος 1.1.



Σχ. 1.2

Ο ορισμός του γραφήματος δεν αποκλείει δύο διαφορετικές ακμές ενός γραφήματος G να αντιστοιχούν στο ίδιο ζεύγος κορυφών, δηλαδή μπορεί να υπάρχουν $e_1, e_2 \in E(G)$ με $e_1 \neq e_2$, έτσι ώστε $\psi_G(e_1) = \psi_G(e_2) = \{u, v\}$. Σε μια τέτοια περίπτωση οι ακμές αυτές ονομάζονται **παράλληλες** ή **πολλαπλές**.

Επίσης δεν αποκλείεται μια ακμή του G να αντιστοιχεί σε ζεύγος κορυφών της μορφής $\{v, v\}$, δηλαδή μπορεί να υπάρχει $e \in E(G)$, έτσι ώστε $\psi_G(e) = \{v, v\}$. Μια τέτοια ακμή ονομάζεται **βρόχος**.

Στο γράφημα του Σχ. 1.2 οι ακμές e_7, e_8 είναι πολλαπλές ακμές, ενώ η ακμή e_3 είναι βρόχος.

Εάν ένα γράφημα δεν περιέχει πολλαπλές ακμές και βρόχους, τότε ονομάζεται απλό γράφημα. 'Ενα γράφημα G ονομάζεται πεπερασμένο, εάν τα σύνολα $V(G)$ και $E(G)$ είναι πεπερασμένα. Εμείς θα ασχοληθούμε μόνο με πεπερασμένα γραφήματα. Επομένως, όταν λέμε γράφημα ουσιαστικά εννοούμε πεπερασμένο γράφημα.

Εάν $e \in E(G), u, v \in V(G)$ και $\psi_G(e) = \{u, v\}$ τότε χρησιμοποιείται η πιο κάτω ορολογία.

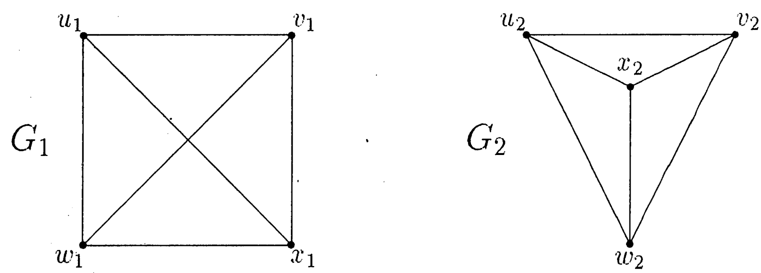
α) Η ακμή e συνδέει τις κορυφές u και v.
β) Οι κορυφές u και v αποτελούν τα άκρα της ακμής e.
γ) Οι κορυφές u και v είναι γειτονικές.
δ) Η κορυφή u είναι προσκείμενη στην v και αντίστροφα.
'Ολες οι παραπάνω προτάσεις είναι ισοδύναμες.

Επίσης εάν το G δεν περιέχει πολλαπλές ακμές και $\psi_G = \{u, v\}$, τότε η ακμή e συμβολίζεται και με uv.

Ο αριθμός των κορυφών και ακμών ενός γραφήματος G συμβολίζεται με $\nu(G)$ και $\varepsilon(G)$ αντίστοιχα ή πιο απλά με ν και ε.

1.2. Ισομορφισμός γραφημάτων

Δύο απλά γραφήματα G_1 και G_2 ονομάζονται **ισομορφικά**, εάν υπάρχει συνάρτηση $f : V(G_1) \xrightarrow[\text{επί}]{\text{1-1}} V(G_2)$, για την οποία ισχύει ότι οι κορυφές u, v είναι γειτονικές στο G_1, εάν και μόνο εάν, οι κορυφές $f(u), f(v)$ είναι γειτονικές στο G_2. Η συνάρτηση f ονομάζεται ισομορφισμός από το G_1 στο G_2. Τα γραφήματα του Σχ. 1.3 είναι δύο ισομορφικά γραφήματα.



Σχ. 1.3

Πράγματι υπάρχει η συνάρτηση $f : V(G_1) \xrightarrow[\text{επί}]{\text{1-1}} V(G_2)$ με $f(u_1) = u_2$, $f(v_1) = v_2$, $f(x_1) = x_2$, $f(w_1) = w_2$, η οποία έχει την παραπάνω ιδιότητα.

1.3. Υπογραφήματα

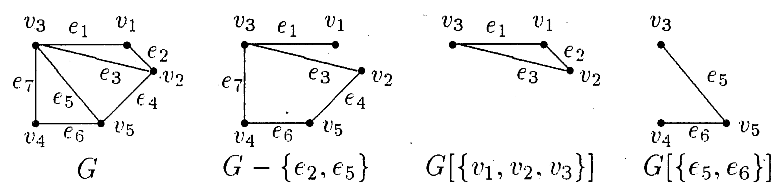
Ένα γράφημα H είναι **υπογράφημα** κάποιου γραφήματος G (αυτό συμβολίζεται με $H \subseteq G$), εάν (i) $V(H) \subseteq V(G)$, (ii) $E(H) \subseteq E(G)$ και (iii) η ψ_H είναι περιορισμός της ψ_G στο E(H).

Έστω ότι V' είναι ένα μη κενό υποσύνολο του $V(G)$. Το υπογράφημα του G, που έχει ως σύνολο κορυφών του το V' και ως σύνολο ακμών του τις ακμές εκείνες του G που έχουν και τα δύο άκρα τους στο V', λέμε ότι παράγεται από το V' και συμβολίζεται με $G[V']$.

Έστω E' μη κενό υποσύνολο του $E(G)$. Το υπογράφημα του G, που έχει ως σύνολο ακμών του το E', και ως σύνολο κορυφών του τα άκρα των ακμών που ανήκουν στο E', λέμε ότι παράγεται από το E' και συμβολίζεται με $G[E']$.

Έστω $V' \subseteq V(G)$. Με $G - V'$ συμβολίζουμε το γράφημα που προκύπτει από το G εάν διαγράψουμε τις κορυφές εκείνες που ανήκουν στο V' καθώς επίσης και τις ακμές των οποίων τουλάχιστον ένα άκρο ανήκει στο V'.

Έστω $E' \subseteq E(G)$. Με $G-E'$ συμβολίζουμε το γράφημα που προκύπτει από το G, εάν διαγράψουμε τις ακμές που αποτελούν στοιχεία του E'. (Βλέπε Σχ. 1.4 για παραδείγματα των πιο πάνω ορισμών).



Σχ. 1.4

1.4. Βαθμός κορυφών

Ο **βαθμός** μιας κορυφής u ενός γραφήματος G συμβολίζεται με $d_G(u)$ και είναι ίσος με τον αριθμό των ακμών που έχουν ως άκρο τους την κορυφή u. (Κάθε βρόχος υπολογίζεται για δύο ακμές).

Θεώρημα 1.1: Για κάθε γράφημα G

$$\sum_{x \in V(G)} d_G(x) = 2\varepsilon(G).$$

Απόδειξη: Κάθε ακμή έχει δύο άκρα. Επομένως κάθε ακμή "συνεισφέρει" τον αριθμό 2 στο άθροισμα

$$\sum_{x \in V(G)} d_G(x).$$

Άρα

$$\sum_{x \in V(G)} d_G(x) = 2\varepsilon(G).$$

Το Θεώρημα 1.1 θεωρείται ως το πρώτο θεώρημα της Θεωρίας Γραφημάτων.
Με $\delta(G)$ και $\Delta(G)$ συμβολίζουμε τον **ελάχιστο** και **μέγιστο βαθμό** κορυφών αντίστοιχα σ' ένα γράφημα G.

Ακολουθία βαθμών ενός γραφήματος G είναι μία ακολουθία μη-αρνητικών ακέραιων $d_1, d_2, \ldots, d_n$ που αντιστοιχούν στις τιμές των βαθμών των κορυφών του. Εάν μια ακολουθία βαθμών συμβολίζεται με $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, θα θεωρούμε ότι οι όροι της είναι τοποθετημένοι με μια μη-αύξουσα σειρά, δηλ. θα θεωρούμε ότι $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$.

Μια ακολουθία μη-αρνητικών ακέραιων $d_1, d_2, \ldots, d_n$ ονομάζεται **γραφική**, εάν αυτή αποτελεί την ακολουθία βαθμών ενός γραφήματος G.

Από το Θεώρημα 1.1 προκύπτει ότι για κάθε γράφημα G, το $\sum_{x \in V(G)} d_G(x)$ είναι άρτιος αριθμός. Η προφανής αυτή αναγκαία συνθήκη είναι και ικανή εάν αναφερόμαστε σε γραφήματα, τα οποία επιτρέπεται να έχουν βρόχους και πολλαπλές ακμές, δηλαδή για τέτοια γραφήματα ισχύει το παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα 1.2: Μια ακολουθία μη-αρνητικών ακέραιων $d_1, d_2, \ldots, d_n$ είναι γραφική εάν και μόνον εάν το $\sum_{i=1}^{n} d_i$ είναι άρτιος αριθμός.

Απόδειξη: Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, η παραπάνω συνθήκη είναι αναγκαία, από το Θεώρημα 1.1. Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι και ικανή. Θα το αποδείξουμε κατασκευάζοντας ένα γράφημα G με $V(G) = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, για το οποίο ισχύει $d_G(u_i) = d_i$ $\forall\, i = 1, 2, \ldots, n$.

Για να κατασκευάσουμε το G, εργαζόμαστε ως εξής: Ορίζουμε το σύνολο $X = \{u_i : d_i$ περιττός$\}$. Επειδή το $\sum_{i=1}^{n} d_i$ είναι άρτιος, ο αριθμός των στοιχείων του X θα είναι επίσης άρτιος αριθμός. Χωρίζουμε τα στοιχεία του X σε ζεύγη ανά δύο ξένα μεταξύ τους, μ' ένα τυχαίο τρόπο. Για κάθε ζεύγος προσθέτουμε μια ακμή που έχει για άκρα της τα στοιχεία αυτού του ζεύγους. Επίσης για κάθε κορυφή u_i του G, προσθέτουμε $\left\lfloor \frac{d_i}{2} \right\rfloor$ βρόχους που την έχουν για άκρο τους. Η ακολουθία $d_1, d_2, \ldots, d_n$ αποτελεί την ακολουθία βαθμών του γραφήματος G, που έχουμε κατασκευάσει.

Εάν τα γραφήματα που εξετάζουμε είναι απλά (δηλαδή δεν περιέχουν βρόχους και πολλαπλές ακμές) τότε γι' αυτά τα γραφήματα το Θεώρημα 1.2 δεν ισχύει. Για παράδειγμα, η ακολουθία $(4, 0, 0, 0, 0)$ δεν μπορεί να αποτελεί την ακολουθία βαθμών ενός απλού γραφήματος.

Το επόμενο Θεώρημα μας δίνει μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να αποτελεί μια ακολουθία μη-αρνητικών ακέραιων, την ακολουθία βαθμών ενός απλού γραφήματος G.

<u>Θεώρημα 1.3 [1.2]</u>: *Μια ακολουθία $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ μη-αρνητικών ακέραιων, όπου $n \geq 2$, $d_1 \geq 1$, αποτελεί την ακολουθία βαθμών ενός απλού γραφήματος G εάν και μόνον εάν ισχύει το ίδιο για την ακολουθία $d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n$.*

<u>Απόδειξη</u>: Έστω ότι η ακολουθία $d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n$ αποτελεί την ακολουθία βαθμών ενός απλού γραφήματος G_1. Έστω επίσης ότι $V(G_1) = \{u_2, u_3, \ldots, u_n\}$ όπου $d_{G_1}(u_i) = d_i - 1$ εάν $2 \leq i \leq d_1 + 1$ και $d_{G_1}(u_i) = d_i$ εάν $d_1 + 2 \leq i \leq n$.

Θεωρούμε το γράφημα G που προκύπτει από το G_1, εάν προσθέσουμε μια νέα κορυφή u_1 και τις ακμές $u_1 u_j$ για $2 \leq j \leq d_1 + 1$. Προφανώς η ακολουθία $d_1, d_2, \ldots, d_n$ αποτελεί την ακολουθία βαθμών του απλού γραφήματος G.

Αντίστροφα, έστω ότι η ακολουθία $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ αποτελεί την ακολουθία βαθμών ενός απλού γραφήματος G. Έστω επίσης ότι $V(G) = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ όπου $\forall i = 1, 2, \ldots, n$, $d_G(u_i) = d_i$. Μεταξύ όλων των απλών γραφημάτων G, πού έχουν την παραπάνω ιδιότητα, εμείς επιλέγουμε εκείνο για το οποίο ισχύει ότι το άθροισμα των βαθμών των κορυφών των γειτονικών προς την u_1 είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερο. Θα αποδείξουμε ότι η κορυφή u_1 είναι γειτονική με κορυφές που έχουν βαθμό $d_2, d_3, \ldots d_{d_1+1}$. Έστω ότι δεν ισχύει κάτι τέτοιο. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν κορυφές u_i, u_j με $d_G(u_j) > d_G(u_i)$, όπου η u_1 είναι γειτονική με την u_i, ενώ δεν είναι γειτονική με την u_j. Επίσης επειδή $d_G(u_j) > d_G(u_i)$ υπάρχει κορυφή u_k, η οποία είναι γειτονική με την u_j και δεν είναι γειτονική με την u_i. Αφαιρούμε από το G τις ακμές u_1u_i, u_ju_k και προσθέτουμε τις ακμές u_1u_j και u_iu_k. Το γράφημα G^* που θα προκύψει απ' αυτήν την διαδικασία θα έχει ακολουθία βαθμών $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$. Όμως το άθροισμα των βαθμών των γειτονικών κορυφών προς την u_1 στο γράφημα G^* είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο άθροισμα στο γράφημα G. Απ' αυτή την αντίφαση μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η u_1 είναι γειτονική στο G με κορυφές που έχουν βαθμό $d_2, \ldots, d_{d_1+1}$.

Το γράφημα $G - \{u_1\}$ έχει ακολουθία βαθμών $d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n$. Άρα η ακολουθία $d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n$ αποτελεί την ακολουθία βαθμών ενός απλού γραφήματος.

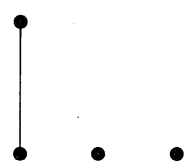
Το προηγούμενο Θεώρημα μας παρέχει έναν αλγόριθμο με τον οποίο μπορούμε να προσδιορίσουμε εάν μια δοσμένη ακολουθία μη-αρνητικών ακέραιων αποτελεί την ακολουθία βαθμών ενός απλού γραφήματος. Εάν επανειλλημένες εφαρμογές του αλγορίθμου μας οδηγήσουν σε μια ακολουθία της οποίας όλοι οι όροι είναι μηδέν, τότε η αρχική ακολουθία αποτελεί την ακολουθία βαθμών ενός απλού γραφήματος G. Εάν αντίθετα οδηγηθούμε σε μια ακολουθία που περιέχει κάποιο αρνητικό ακέραιο, τότε το παραπάνω δεν ισχύει.

<u>Παράδειγμα 1.2:</u> Θεωρούμε την ακολουθία $S : (4, 4, 3, 3, 1, 1)$. Μετά από μια πρώτη εφαρμογή του Θεωρήματος 1.3 παίρνουμε την ακολουθία $S_1' : (3, 2, 2, 0, 1)$. Τοποθετούμε τους όρους της S_1' με μια μη-αύξουσα σειρά, οπότε προκύπτει η ακολουθία $S_1 : (3, 2, 2, 1, 0)$. Εάν συνεχίσουμε την εφαρμογή του αλγορίθμου έχουμε:

$$S_2' = S_2 : (1, 1, 0, 0)$$
$$S_3' = S_3 : (0, 0, 0)$$

Εάν ακολουθήσουμε την αντίστροφη πορεία του αλγορίθμου μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα απλό γράφημα G, το οποίο έχει ως ακολουθία βαθμών του, την αρχική ακολουθία από την οποία ξεκινήσαμε. Στο προηγούμενο παράδειγμα το γράφημα G_2 έχει για ακολουθία βαθμών του την $S_2 : (1, 1, 0, 0)$.

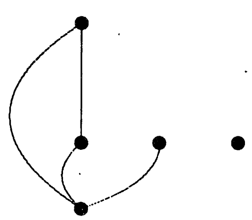
G_2



Σχ. 1.5

Για να πάρουμε ένα απλό γράφημα G_1, το οποίο θα έχει την $S_1 = (3, 2, 2, 1, 0)$ ως ακολουθία βαθμών του, προσθέτουμε μια νέα κορυφή στο G_2 και την συνδέουμε με τις δύο κορυφές που έχουν βαθμό 2 και με μία από τις κορυφές που έχει βαθμό 0.

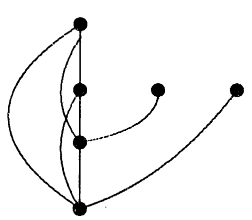
G_1



Σχ. 1.6

Τέλος, για να πάρουμε ένα απλό γράφημα G που έχει την αρχική ακολουθία $S : (4, 4, 3, 3, 1, 1)$ ως ακολουθία βαθμών του, προσθέτουμε μια νέα κορυφή στο G_1 και την συνδέουμε με τις δύο κορυφές που έχουν βαθμό 2, με την κορυφή που έχει βαθμό 3 και με την κορυφή που έχει βαθμό 0.

G



Σχ. 1.7

Οι διαδικασίες κατασκευής του G από το G_1 και του G_1 από το G_2 υπαγορεύτηκαν από τις διαδικασίες κατασκευής της S_1' από την S

και της S_2' από την S_1 αντίστοιχα.

1.5. Μονοπάτια, κύκλοι και συνεκτικότητα

Μια πεπερασμένη ακολουθία $W = v_0e_1v_1e_2v_2\ldots e_kv_k$, της οποίας οι όροι είναι αλληλοδιαδόχως κορυφές και ακμές, όπου για $1 \leq i \leq k$ τα άκρα της ακμής e_i είναι οι κορυφές v_{i-1} και v_i, ονομάζεται **περίπατος** στο G. Οι κορυφές v_0 και v_k ονομάζονται αρχή και τέλος αντίστοιχα του περιπάτου W. Οι κορυφές $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$ ονομάζονται εσωτερικές κορυφές του W. Ο αριθμός k, δηλαδή ο αριθμός των ακμών του W, ονομάζεται μήκος του. Εάν $v_0 = v_k$ ο W ονομάζεται κλειστός περίπατος. Στα απλά γραφήματα ο περίπατος $v_0e_1v_1\ldots e_kv_k$ μπορεί να προσδιορισθεί με την ακολουθία των κορυφών του, δηλαδή με την $v_0v_1v_2\ldots v_k$.

Εάν οι ακμές $e_1, e_2, \ldots, e_k$ του περιπάτου W είναι διαφορετικές μεταξύ τους, τότε ο W ονομάζεται **ίχνος**. Εάν ο W είναι κλειστός περίπατος, όπου δεν παρατηρείται επανάληψη εσωτερικών κορυφών, τότε ο W ονομάζεται **κύκλος**. Εάν τώρα οι κορυφές $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k$ του W είναι διαφορετικές μεταξύ τους, τότε ο W ονομάζεται **μονοπάτι**.

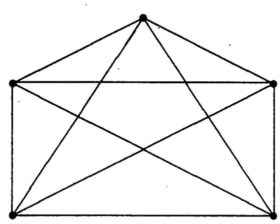
'Ενα γράφημα ονομάζεται **συνεκτικό**, αν για κάθε ζεύγος διαφορετικών κορυφών του, u και v, υπάρχει μονοπάτι με αρχή την u και τέλος την v. 'Ενα τέτοιο μονοπάτι ονομάζεται $(u, v) - \mu o \nu o \pi \acute{\alpha} \tau \iota$. Το μήκος του συντομότερου μονοπατιού που συνδέει δύο κορυφές u και v σ' ένα γράφημα G ονομάζεται **απόσταση** μεταξύ αυτών των κορυφών και συμβολίζεται με $d_G(u, v)$.

Συνιστώσα ενός γραφήματος G ονομάζουμε ένα συνεκτικό υπογράφημά του H, το οποίο δεν περιέχεται σε άλλο συνεκτικό υπογράφημα του G που έχει περισσότερες κορυφές ή ακμές από το H. Ο αριθμός των συνιστωσών του G συμβολίζεται με $\omega(G)$ και $\omega(G) = 1$, εάν και μόνον εάν το G είναι συνεκτικό.

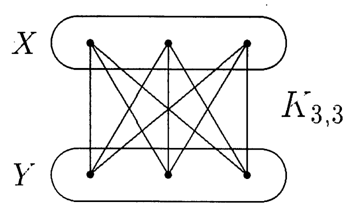
1.6. Γραφήματα ειδικής μορφής

1.6.1. Πλήρη γραφήματα

Ένα απλό γράφημα ονομάζεται **πλήρες**, εάν κάθε ζεύγος κορυφών του συνδέεται με μια ακμή. Ένα πλήρες γράφημα με n κορυφές συμβολίζεται με K_n (Βλέπε Σχ. 1.8).



Σχ. 1.8



Σχ. 1.9

1.6.2. Διμερή γραφήματα

Ένα γράφημα G ονομάζεται **διμερές**, εάν το σύνολο των κορυφών του μπορεί να χωριστεί σε δύο σύνολα X και Y, ξένα μεταξύ τους, έτσι ώστε κάθε ακμή του G να συνδέει ένα στοιχείο του X με ένα στοιχείο του Y. Το ζεύγος (X, Y) ονομάζεται **διαμερισμός** του G.

Εάν τώρα σ' ένα διμερές γράφημα G με διαμερισμό (X, Y), όπου $|X| = m$ και $|Y| = n$, κάθε κορυφή του X είναι γειτονική με όλες τις κορυφές του Y, τότε λέμε ότι το G είναι **πλήρες διμερές** γράφημα και συμβολίζεται με $K_{m,n}$. (Βλέπε Σχ. 1.9)

Θεώρημα 1.4: Ένα γράφημα G είναι διμερές εάν και μόνον εάν δεν περιέχει κύκλους περιττού μήκους.

Απόδειξη: Έστω ότι το G είναι διμερές με διαμερισμό (X, Y) και έστω $C = u_0u_1u_2\ldots u_nu_0$ κύκλος στο G. Μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς να βλάψουμε την γενικότητα των επιχειρημάτων μας ότι $u_0 \in X$. Επειδή το G είναι διμερές $u_1 \in Y$, $u_2 \in X$, $u_3 \in Y$, ... Γενικά πρέπει να ισχύει $u_{2i} \in X$ και $u_{2i+1} \in Y$. Επομένως ο n είναι περιττός αριθμός και άρα ο C έχει άρτιο μήκος.

Για να αποδείξουμε το αντίστροφο, αρκεί να το αποδείξουμε για την περίπτωση που το G είναι συνεκτικό γράφημα. Έστω ότι το G δεν περιέχει κύκλους περιττού μήκους και έστω u τυχαία κορυφή του G. Ορίζουμε

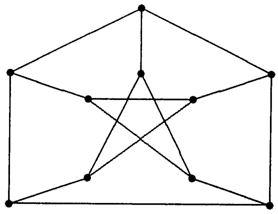
$$X = \{v \in V(G) : d_G(u, v) \text{ άρτιος}\}$$
$$Y = \{v \in V(G) : d_G(u, v) \text{ περιττός}\}$$

Θα αποδείξουμε ότι το (X, Y) αποτελεί διαμερισμό του G. Έστω ότι υπάρχει ακμή e με άκρα τις κορυφές w_1, w_2 και έστω ότι $w_1, w_2 \in X$. Έστω επίσης P ένα συντομότερο $(w_1, u)-$μονοπάτι, Q ένα συντομότερο $(w_2, u)-$μονοπάτι και z η πρώτη τους κοινή κορυφή. Επειδή τα P, Q είναι συντομότερα μονοπάτια, τα τμήματά τους από την κορυφή z έως την κορυφή u πρέπει να είναι συντομότερα $(z, u)-$μονοπάτια και επομένως του ίδιου μήκους. Το τμήμα του P από την w_1 στην z, θα το ονομάζουμε P_1, ενώ το τμήμα του Q από την w_2 στην z, θα το ονομάσουμε Q_1. Τα μονοπάτια P, Q είναι άρτιου μήκους, άρα τα P_1, Q_1 είναι είτε και τα δύο περιττού μήκους είτε και τα δύο άρτιου μήκους. Σε μια τέτοια περίπτωση ο κύκλος που σχηματίζεται από τα P_1, Q_1 και την ακμή e έχει περιττό αριθμό κορυφών. Εμείς όμως αρχικά είχαμε ότι το G δεν περιέχει κύκλους περιττού μήκους. Άρα δεν υπάρχει ακμή που να έχει και τα δύο άκρα της στο X.

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι δεν υπάρχει ακμή που να έχει και τα δύο άκρα της στο Y.

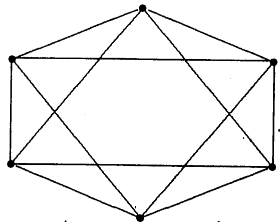
1.6.3. Κανονικά γραφήματα

Ένα γράφημα G ονομάζεται ***k*−κανονικό**, εάν $d_G(x) = k \ \ \forall x \in V(G)$.



$3 - \varkappa\alpha\nu o\nu\iota\varkappa\acute{o}$

Σχ. 1.10



$4 - \varkappa\alpha\nu o\nu\iota\varkappa\acute{o}$

Σχ. 1.11

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.1 μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε το παρακάτω πόρισμα.

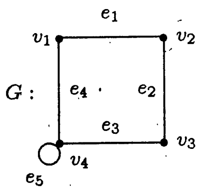
<u>Πόρισμα 1.5</u>: Εάν το G είναι k – κανονικό γράφημα, όπου το k είναι περιττός αριθμός, τότε το G περιέχει άρτιο αριθμό κορυφών.

1.7. Πίνακες γειτνίασης και πρόσπτωσης

Σ' ένα γράφημα G αντιστοιχεί ένας πίνακας $\nu \times \varepsilon$, ο οποίος ονομάζεται **πίνακας πρόσπτωσης**. Εάν οι κορυφές του G είναι οι $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$ και οι ακμές του οι $e_1, e_1, \ldots, e_\varepsilon$, τότε ο πίνακας πρόσπτωσης του G είναι ο πίνακας $B(G) = [b_{ij}]$, όπου b_{ij} συμβολίζει πόσες φορές η κορυφή v_i είναι άκρο της ακμής e_j (δηλαδή το b_{ij} μπορεί να πάρει τις τιμές $0, 1, 2$, την τιμή 2 την παίρνει όταν η ακμή e_j είναι βρόχος και έχει για άκρα της την u_i).

Ένας άλλος πίνακας, ο οποίος αντιστοιχεί σ' ένα γράφημα G, είναι ο **πίνακας γειτνίασης**. Αυτός είναι ο $\nu \times \nu$ πίνακας $A(G) = [a_{ij}]$, όπου a_{ij} είναι ο αριθμός των ακμών που συνδέουν τις κορυφές v_i και v_j.

Παράδειγμα 1.3:



$$B(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array}, \quad A(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Σχ. 1.12

Το Θεώρημα 1.4 μας δίνει μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα γράφημα διμερές. Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε ένα ανάλογο θεώρημα χρησιμοποιώντας την έννοια του πίνακα πρόσπτωσης. Για την διατύπωση αυτού του Θεωρήματος, είναι απαραίτητος ο εξής ορισμός:

Έστω $M(G)$ ο πίνακας πρόσπτωσης ενός γραφήματος G. Ο πίνακας $M(G)$ ονομάζεται **totally unimodular** εάν η ορίζουσα κάθε τετραγωνικού υποπίνακά του ισούται με 1, -1 ή 0.

Θεώρημα 1.6: Ένα γράφημα G είναι διμερές εάν και μόνον εάν ο πίνακας πρόσπτωσής του είναι **totally unimodular**.

Απόδειξη: Έστω ότι ο πίνακας $M(G)$ είναι totally unimodular και έστω ότι το G δεν είναι διμερές γράφημα. Από το Θεώρημα 1.4, αυτό σημαίνει ότι το G περιέχει κύκλο C περιττού μήκους, έστω $2\ell + 1$. Ο C είναι υπογράφημα του G και ο πίνακας πρόσπτωσής του, ας τον ονομάσουμε M_1, είναι ένας υποπίνακας του $M(G)$ μεγέθους $(2\ell + 1) \times (2\ell + 1)$. Τον πίνακα M_1 μπορούμε να τον φέρουμε στη μορφή

$$M_1' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

, μεταθέτοντας εάν είναι απαραίτητο τις γραμμές (στήλες) του M_1. Για τον πίνακα M_1' έχουμε ότι $|M_1'| =$

$1+(-1)^{2\ell+2}(1)=2$. Επομένως $|M_1| \neq 0$, 1 ή -1 και άρα ο $M(G)$ δεν είναι totally unimodular.

Αντίστροφα, έστω M_1 υποπίνακας του $M(G)$ μεγέθους $k \times k$. Θα αποδείξουμε ότι $|M_1| = 0$, 1 ή -1 χρησιμοποιώντας επαγωγή ως προς k. Εάν $k = 1$, τότε προφανώς ισχύει. Τώρα κάθε στήλη του M_1 περιέχει το πολύ δύο 1. Εάν ο M_1 έχει στήλη που περιέχει μόνον 0, τότε $|M_1| = 0$. Εάν ο M_1 έχει στήλη που περιέχει μόνον ένα 1, τότε αναπτύσοντας την ορίζουσα του M_1 ως προς αυτό το στοιχείο και χρησιμοποιώντας την υπόθεση της επαγωγής έχουμε $|M_1| = 1$, -1 ή 0. Τέλος, έστω ότι κάθε στήλη του M_1 περιέχει ακριβώς δύο 1. Εάν (X, Y) διαμερισμός του G, ορίζουμε:

S: σύνολο γραμμών του M_1 που αντιστοιχούν σε κορυφές του G, που ανήκουν στο X.

S': σύνολο γραμμών του M_1 που αντιστοιχούν σε κορυφές του G, που ανήκουν στο Y.

Έστω $|S| = r$ και $|S'| = k - r$. Μεταθέτουμε τις γραμμές του M_1 έτσι ώστε τα στοιχεία του S να καταλαμβάνουν τις πρώτες r θέσεις και τα στοιχεία του S' να καταλαμβάνουν τις τελευταίες $k - r$ θέσεις. Ας ονομάσουμε M_1' τον πίνακα που προκύπτει απ' αυτή την διαδικασία. Κάθε στήλη του M_1' θα περιέχει ένα 1 που προέρχεται από τις πρώτες r γραμμές του και ένα 1 που προέρχεται από τις τελευταίες $k - r$ γραμμές του. Επομένως το άθροισμα των διανυσμάτων γραμμών του M_1' που είναι στοιχεία του S είναι ίσο με το άθροισμα των διανυσμάτων γραμμών του M_1' που είναι στοιχεία του S'. Αυτό όμως σημαίνει ότι τα διανύσματα γραμμών του M_1' είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Άρα $|M_1'| = 0$ και επομένως $|M_1| = 0$.

1.8. Κατευθυνόμενα γραφήματα

Ένα **κατευθυνόμενο γράφημα** D είναι μία διατεταγμένη τριάδα $(V(D),\ A(D), \psi_D)$, η οποία αποτελείται (i) από ένα σύνολο $V(D)$, όπου $V(D) \neq \emptyset$, τα στοιχεία του οποίου ονομάζονται κορυφές, (ii) ένα σύνολο $A(D)$, όπου $A(D) \cap V(D) = \emptyset$, τα στοιχεία του οποίου ονομάζονται **τόξα** και (iii) από μια συνάρτηση ψ_D, βάσει της οποίας σε κάθε τόξο του D αντιστοιχεί ένα διατεταγμένο ζεύγος κορυφών του D.

Κάθε κατευθυνόμενο γράφημα D μπορεί να απεικονισθεί ως εξής: Κάθε κορυφή απεικονίζεται μ' ένα σημείο στο επίπεδο και κάθε στοιχείο α του $A(D)$ μ' ένα τόξο, το οποίο κατευθύνεται από την κορυφή x προς την κορυφή y, όπου $\psi_D(a) = (x, y)$. Έστω τόξο α και κορυφές x, y, έτσι ώστε $\psi_D(a) = (x, y)$. Τότε λέμε ότι η x αποτελεί την **ουρά**, ενώ η y την **κεφαλή** του α.

Ο **έσω-βαθμός** $d_D^-(u)$ μιας κορυφής u είναι ο αριθμός των τόξων που έχουν για κεφαλή την u, ενώ ο **έξω-βαθμός** $d_D^+(u)$ της u είναι ο αριθμός των τόξων που έχουν για ουρά την u. Ο **ελάχιστος** και **μέγιστος έσω-βαθμός** και **έξω-βαθμός** του D συμβολίζεται με $\delta^-(D)$, $\Delta^-(D)$ και $\delta^+(D)$, $\Delta^+(D)$ αντίστοιχα. Ο αριθμός των κορυφών του D συμβολίζεται με $\nu(D)$, ενώ ο αριθμός των τόξων με $\varepsilon(D)$.

Ένας **κατευθυνόμενος περίπατος** στο D είναι μια πεπερασμένη ακολουθία $W = u_0a_1u_1 \ldots a_ku_k$, της οποίας οι όροι είναι αλληλοδιαδόχως κορυφές και τόξα, όπου $\forall i = 1, 2, \ldots, k$ το τόξο a_i έχει για κεφαλή την u_i και για ουρά την u_{i-1}. Ένας κατευθυνόμενος περίπατος ονομάζεται κλειστός, εάν έχει την ίδια κορυφή για αρχή και τέλος.

Κατευθυνόμενο μονοπάτι είναι ένας κατευθυνόμενος περίπατος του οποίου όλες οι κορυφές είναι διαφορετικές. **Κατευθυνόμενο κύκλο** ονομάζουμε ένα κλειστό κατευθυνόμενο περίπατο, όπου εκτός της ταύτισης αρχής και τέλους δεν παρατηρείται άλλη επανάληψη κορυφών.

<u>Θεώρημα 1.7:</u> Για κάθε κατευθυνόμενο γράφημα D ισχύει ότι

$$\sum_{u \in V(D)} d_D^-(u) = \varepsilon(D) = \sum_{u \in V(D)} d_D^+(u).$$

<u>Απόδειξη:</u> Κάθε τόξο "συνεισφέρει" τον αριθμό 1 στον έξω-βαθμό της

ουράς του και τον αριθμό 1 στον έσω-βαθμό της κεφαλής του. Άρα

$$\sum_{u\in V(D)} d_D^-(u) = \varepsilon(D) = \sum_{u\in V(D)} d_D^+(u).$$

Ασκήσεις 1

1.1: Έστω G απλό διμερές γράφημα. Να αποδειχθεί ότι $\varepsilon(G) \leq (\nu(G))^2/4$.

1.2: Έστω σύνολο $A = \{0,1\}$. Λέξεις 0–1 ονομάζουμε τις λέξεις που έχουν για γράμματά τους στοιχεία του A. Θεωρούμε ένα γράφημα G που έχει για κορυφές του, όλες τις 0–1 λέξεις με k γράμματα και στο οποίο δύο κορυφές είναι γειτονικές εάν και μόνο εάν αυτές διαφέρουν ακριβώς κατά μία συντεταγμένη (για παράδειγμα, εάν $k = 5$, δύο τέτοιες λέξεις είναι και οι 00111, 01111).
   (a) Να αποδειχθεί ότι $\nu(G) = 2^k$.
   (b) Να αποδειχθεί ότι $\varepsilon(G) = k2^{k-1}$
   (c) Να αποδειχθεί ότι το G είναι διμερές γράφημα.

1.3: Να αποδειχθεί ότι κάθε γράφημα G περιέχει άρτιο αριθμό κορυφών που έχουν περιττό βαθμό.

1.4: Να αποδειχθεί ότι κάθε απλό γράφημα G περιέχει τουλάχιστον δύο κορυφές που έχουν τον ίδιο βαθμό.

1.5: Εάν G απλό γράφημα, με $\overline{G}$ θα συμβολίζουμε ένα απλό γράφημα που έχει τις ίδιες κορυφές με το G και στο οποίο δύο κορυφές είναι γειτονικές εάν και μόνον εάν δεν είναι γειτονικές στο G. Το γράφημα $\overline{G}$, θα το ονομάζουμε **συμπλήρωμα** του G.
Εάν $G \cong \overline{G}$, να αποδειχθεί ότι

$$\nu(G) \equiv 0, 1(\text{mod}4).$$

1.6: Έστω G απλό γράφημα με n κορυφές, το οποίο έχει τις εξής ιδιότητες: $n \equiv 1(\text{mod}4)$ και $G \cong \overline{G}$. Να αποδειχθεί ότι το G περιέχει τουλάχιστον μία κορυφή βαθμού $\dfrac{n-1}{2}$.

1.7: Εάν το G είναι απλό γράφημα με $\delta(G) \geq k$, να αποδειχθεί ότι το G περιέχει μονοπάτι μήκους k.

1.8: Εάν το G είναι απλό γράφημα με $\delta(G) \geq 2$, να αποδειχθεί ότι το G περιέχει κύκλο.

1.9: Έστω G απλό γράφημα με $\delta(G) \geq 2$. Να αποδειχθεί ότι το G περιέχει κύκλο μήκους τουλάχιστον $\delta(G)+1$.

1.10: Έστω G απλό γράφημα με $\delta(G) \geq 3$. Να αποδειχθεί ότι το G περιέχει κύκλο άρτιου μήκους.

1.11: Έστω G απλό γράφημα με ακριβώς δύο κορυφές περιττού βαθμού. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μονοπάτι στο G που συνδέει αυτές τις κορυφές.

1.12: Έστω G απλό γράφημα με $\delta(G) \geq \frac{\nu(G)-1}{2}$. Να αποδειχθεί ότι το G είναι συνεκτικό γράφημα.

1.13: Έστω G συνεκτικό γράφημα στο οποίο όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό. Να αποδειχθεί ότι για κάθε κορυφή u του G

$$\omega(G-\{u\}) \leq \frac{1}{2} d_G(u).$$

1.14: **Άνοιγμα** ενός γραφήματος ονομάζουμε την ελάχιστη τιμή μήκους κύκλου σ' αυτό. Να αποδειχθεί, (a) ότι ένα $k-$κανονικό γράφημα με άνοιγμα 4 έχει τουλάχιστον $2k$ κορυφές, (b) ότι ένα $k-$κανονικό γράφημα με άνοιγμα 5 έχει τουλάχιστον k^2+1 κορυφές.

1.15: Έστω G απλό γράφημα και έστω $V(G) = \{u_1, u_2, \ldots, u_\nu\}$. Εάν $A(G)$ είναι ο πίνακας γειτνίασης του G, να αποδειχθεί ότι το στοιχείο που βρίσκεται στην θέση (m,l) του πίνακα $(A(G))^n$ αντιπροσωπεύει τον αριθμό των διαφορετικών $(u_m, u_\ell)-$περιπάτων μήκους n.

1.16: Έστω γράφημα G, το οποίο δεν περιέχει βρόχους. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει επικαλυπτικό υπογράφημα H του G, για το οποίο ισχύει: το H είναι διμερές και $d_H(u) \geq \frac{1}{2} d_G(u)$ για κάθε $u \in V(G)$.

1.17: 'Εστω D κατευθυνόμενο γράφημα, το οποίο δεν περιέχει κατευθυνόμενους κύκλους. Να αποδειχθεί ότι $\delta^-(D) = 0$.

1.18: 'Εστω D κατευθυνόμενο γράφημα, το οποίο δεν περιέχει κατευθυνόμενους βρόχους και πολλαπλά τόξα (τόξα με τα ίδια άκρα και την ίδια κατεύθυνση). Να αποδειχθεί ότι το D περιέχει κατευθυνόμενο μονοπάτι μήκους τουλάχιστον $\max\{\delta^-(D), \delta^+(D)\}$.

1.19: 'Εστω D κατευθυνόμενο γράφημα, το οποίο δεν περιέχει κατευθυνόμενους βρόχους και πολλαπλά τόξα. Εάν $\max\{\delta^-(D), \delta^+(D)\} = k > 0$, να αποδειχθεί ότι το D περιέχει κατευθυνόμενο κύκλο μήκους τουλάχιστον $k + 1$.

Αναφορές

1. Hakimi S.L., On the realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a graph. SIAM J. Appl. Math. 10 (1962), 496–506.

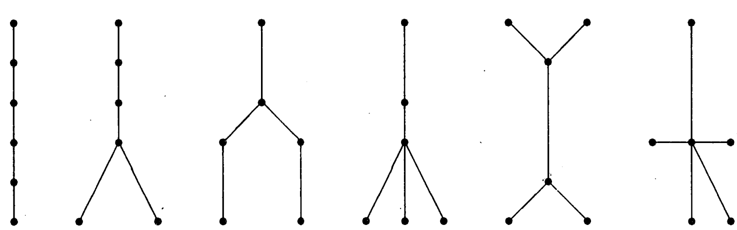
2. Havel V., A remark on the existence of finite graphs (Czech.) Časopis Pěst. Mat 80 (1955), 477–480.

Κεφάλαιο 2

Δέντρα

2.1. Γενικά περί δέντρων

Δέντρο ονομάζουμε ένα συνεκτικό γράφημα το οποίο δεν περιέχει κύκλους. Στο Σχ.2.1 απεικονίζονται όλα τα δέντρα με 6 κορυφές.



Σχ. 2.1

Θεώρημα 2.1: Για ένα απλό γράφημα G οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(1) Το G είναι δέντρο.

(2) Για κάθε $u, v \in V(G)$ υπάρχει ακριβώς ένα $(u, v) - \mu o \nu o \pi \acute{\alpha} \tau \iota$.

(3) Το G είναι συνεκτικό και $\nu(G) = \varepsilon(G) + 1$.

(4) Το G δεν περιέχει κύκλους και $\nu(G) = \varepsilon(G) + 1$.

(5) Το G δεν περιέχει κύκλους και για κάθε ζεύγος μη-γειτονικών κορυφών u και v, το γράφημα που προκύπτει από την προσθήκη μιας ακμής που έχει για άκρα τις u, v, περιέχει ακριβώς ένα κύκλο.

<u>Απόδειξη</u>:

$(1) \Rightarrow (2)$.

Επειδή το G είναι συνεκτικό, κάθε ζεύγος κορυφών συνδέεται με κάποιο μονοπάτι. Έστω P_1, P_2 διαφορετικά μονοπάτια, τα οποία συνδέουν τις κορυφές u και v του G, και έστω w η πρώτη κορυφή στο P_1 (καθώς πηγαίνουμε από την u στην v) για την οποία ισχύει ότι (i) η w είναι κορυφή και των δύο μονοπατιών και (ii) η αμέσως επόμενη κορυφή της w στο P_1 δεν ανήκει στο P_2.

Έστω επίσης w' η επόμενη κοινή κορυφή των P_1, P_2 μετά την w (πάντα καθώς πηγαίνουμε από την u στην v). Σ' αυτή την περίπτωση όμως παρατηρούμε ότι τα τμήματα των μονοπατιών P_1 και P_2, τα οποία βρίσκονται μεταξύ των κορυφών w και w' αποτελούν κύκλο του G. Αυτό όμως είναι άτοπο διότι το G είναι δέντρο. Άρα $\forall u, v \in V(G)$ υπάρχει ακριβώς ένα $(u, v) - \mu o\nu o\pi \acute{\alpha}\tau\iota$.

$(2) \Rightarrow (3)$. Προφανώς από την (2) έχουμε ότι το G είναι συνεκτικό. Θα αποδείξουμε ότι $\nu(G) = \varepsilon(G) + 1$ με την μέθοδο της επαγωγής. Εάν $\nu(G) = 1$ τότε $\varepsilon(G) = 0 = \nu(G) - 1$.

Έστω ότι το Θεώρημα ισχύει για όλα τα γραφήματα που έχουν λιγότερες από $\nu(G)$ κορυφές. Εάν $e \in E(G)$ με άκρα τις κορυφές u και v, τότε από την (2) το γράφημα $G - \{e\}$ δεν περιέχει $(u, v) - \mu o\nu o\pi \acute{\alpha}\tau\iota$. Επομένως το γράφημα $G - \{e\}$ δεν είναι συνεκτικό και συγκεκριμένα $\omega(G - \{e\}) = 2$. Έστω G_1, G_2 οι δύο συνιστώσες του $G - \{e\}$. Τα γραφήματα G_1, G_2 περιέχουν λιγότερες από $\nu(G)$ κορυφές, άρα από την υπόθεση της επαγωγής $\nu(G_i) = \varepsilon(G_i) + 1 \quad \forall i = 1, 2$.

Επομένως $\nu(G) = \nu(G_1) + \nu(G_2) = \varepsilon(G_1) + 1 + \varepsilon(G_2) + 1 \Rightarrow \nu(G) = \varepsilon(G) + 1$, διότι $\varepsilon(G_1) + \varepsilon(G_2) + 1 = \varepsilon(G)$.

(3) $\Rightarrow$ (4). Έστω ότι το G περιέχει κύκλο C μήκους n. Προφανώς ο κύκλος C περιέχει n κορυφές και n ακμές. Τώρα για κάθε κορυφή u που δεν ανήκει στον κύκλο C (υπάρχουν $\nu(G) - n$ τέτοιες κορυφές) βρίσκουμε το συντομότερο μονοπάτι P που συνδέει την u με τον C και αντιστοιχούμε στην κορυφή u την πρώτη ακμή του P (καθώς πηγαίνουμε από την u στον C.) Η αντιστοιχία αυτή είναι $1-1$. Άρα γενικά έχουμε ότι $\varepsilon(G) \geq \nu(G)$. Αυτό όμως είναι άτοπο, διότι από την (3) έχουμε ότι $\nu(G) = \varepsilon(G) + 1$.

(4) $\Rightarrow$ (5). Έστω $G_1, G_2, \ldots, G_k$ συνιστώσες του G. Επειδή το G δεν περιέχει κύκλους κάθε μια απ' αυτές τις συνιστώσες είναι δέντρο. Άρα $\forall i = 1, 2, \ldots, k$, $\nu(G_i) = \varepsilon(G_i) + 1$, από το οποίο συνεπάγεται ότι $\nu(G) = \varepsilon(G) + k$. Όμως από την (4) έχουμε ότι $\nu(G) = \varepsilon(G) + 1$, επομένως $k = 1$ και άρα το G είναι συνεκτικό. Με άλλα λόγια το G είναι δέντρο και από την (1) $\Rightarrow$ (2), έχουμε ότι $\forall u, v \in V(G)$, υπάρχει ακριβώς ένα $(u, v)-$μονοπάτι. Εάν τώρα οι u, v δεν είναι γειτονικές, τότε η προσθήκη μιας ακμής που θα τις συνδέει θα μας δώσει ακριβώς ένα κύκλο στο G.

(5) $\Rightarrow$ (1). Από την (5) έχουμε ότι το G είναι συνεκτικό και ότι δεν περιέχει κύκλους. Αρα το G είναι δέντρο.

2.2. Το πρόβλημα σύνδεσης

Έστω ότι θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα σιδηροδρομικό δίκτυο, το οποίο θα συνδέει n πόλεις. Γιά οικονομικούς λόγους θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε το κόστος κατασκευής αυτού του δίκτυου.

Έστω ότι οι πόλεις του δίκτυου αποτελούν το σύνολο των κορυφών του γραφήματος K_n και έστω ότι σε κάθε ακμή e του K_n, η οποία έχει για άκρα της τις κορυφές u_i και u_j αντιστοιχεί ένας πραγματικός μη αρνητικός αριθμός $w(e)$, ο οποίος συμβολίζει το κόστος σύνδεσης της πόλης u_i με την πόλη u_j. Σ' αυτή την περίπτωση η εύρεση ενός δίκτυου που ελαχιστοποιεί το κόστος κατασκευής, ισοδυναμεί με την εύρεση ενός δέντρου T, που έχει το ίδιο σύνολο κορυφών όπως και το K_n ('Ενα τέτοιο δέντρο ονομάζεται *επικαλυπτικό δέντρο* του K_n) και το οποίο ελαχιστοποιεί τον αριθμό

$$\sum_{e \in E(T)} w(e).$$

'Ενα τέτοιο επικαλυπτικό **δέντρο** ονομάζεται **optimal**.

Οι αλγόριθμοι του Kruskal και του Prim μας παρέχουν έναν απλό τρόπο για την εύρεση ενός optimal επικαλυπτικού δέντρου.

Αλγόριθμος του Kruskal[4]

(1) Επιλέγουμε μια ακμή e_1 έτσι ώστε το $w(e_1)$ να είναι ελάχιστο.

(2) Εάν οι ακμές $e_1, e_2, \ldots, e_i$ έχουν επιλεγεί, τότε επιλέγουμε ακμή e_{i+1} από το σύνολο $E - \{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$ έτσι ώστε:

   (i) $G[\{e_1, e_2, \ldots, e_{i+1}\}]$ δεν περιέχει κύκλους.

   (ii) $w(e_{i+1})$ είναι ελάχιστο ως προς (i).

(3) Η διαδικασία διακόπτεται όταν το (2) δεν είναι δυνατόν να εκτελεσθεί.

Θεώρημα 2.2: Κάθε επικαλυπτικό δέντρο $T^* = G[\{e_1, e_2, \ldots, e_{\nu-1}\}]$ ενός γραφήματος G, το οποίο προκύπτει από τον αλγόριθμο του Kruskal είναι optimal.

Απόδειξη: 'Εστω ότι το επικαλυπτικό δέντρο T^* δεν είναι optimal. Τότε θα υπάρχει επικαλυπτικό δέντρο S του G έτσι ώστε

$$\sum_{e \in E(S)} w(e) < \sum_{e \in E(T^*)} w(e)$$

'Εστω e_k η πρώτη ακμή της ακολουθίας $e_1, e_2, \ldots, e_{\nu-1}$ που δεν ανήκει στο S. Εάν προσθέσουμε την ακμή e_k στο S, τότε το γράφημα που θα προκύψει θα περιέχει ακριβώς ένα κύκλο (Βλέπε Θεώρημα 2.1), έστω C, ο οποίος με την σειρά του περιέχει την ακμή e_k. Επειδή τώρα ο κύκλος C περιέχει μια ακμή e_l, η οποία ανήκει στο S αλλά όχι στο T^*, συνεπάγεται ότι το γράφημα S' που θα προκύψει από το S, αν αντικαταστήσουμε την e_l με την e_k, είναι πάλι επικαλυπτικό δέντρο του G. Από τον τρόπο κατασκευής όμως του T^*, έχουμε ότι $w(e_k) \leq w(e_l)$ και έτσι

$$\sum_{e \in E(S')} w(e) \leq \sum_{e \in E(S)} w(e).$$

Εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία, αλλάζοντας μια ακμή κάθε φορά, μπορούμε να πάρουμε από το δέντρο S το δέντρο T^*. Κατά την διάρκεια αυτής της διαδικασίας όμως το συνολικό κόστος δεν αυξάνεται, άρα

$$\sum_{e \in E(S)} w(e) \geq \sum_{e \in E(T^*)} w(e).$$

Εμείς όμως υποθέσαμε ότι

$$\sum_{e \in E(S)} w(e) < \sum_{e \in E(T^*)} w(e).$$

Επομένως το T^* είναι optimal επικαλυπτικό δέντρο του G.

<u>Αλγόριθμος του Prim</u>[5]

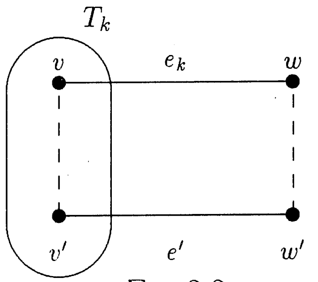
(1) Επιλέγουμε μια οποιαδήποτε κορυφή u_1 του G και ορίζουμε δέντρο $T_1 = (V_1, E_1)$ όπου $V_1 = \{u_1\}$ και $E_1 = \emptyset$.

(2) Εάν έχει ορισθεί δέντρο $T_k = (V_k, E_k)$, επιλέγουμε ακμή e_k έτσι ώστε (i) το ένα άκρο της e_k να ανήκει στο V_k και το άλλο, έστω το u_{k+1}, στο $V(G) - V_k$, (ii) το $w(e_k)$ να είναι ελάχιστο ως προς το (i).
Ορίζουμε δέντρο $T_{k+1} = (V_{k+1}, E_{k+1})$ όπου $V_{k+1} = V_k \cup \{u_{k+1}\}$ και $E_{k+1} = E_k \cup \{e_k\}$.

(3) Το βήμα 2 διακόπτεται όταν $k = |V(G)| = \nu$.

Θεώρημα 2.3: Κάθε δέντρο T_k ($k = 1, 2, \ldots, \nu$) της παραπάνω διαδικασίας περιέχεται σε κάποιο optimal δέντρο T του G.

Απόδειξη: Προφανώς η παραπάνω πρόταση ισχύει για $k = 1$. 'Εστω τώρα ότι το δέντρο T_k περιέχεται σε κάποιο optimal δέντρο T του G και έστω ότι $E(T_{k+1}) = E(T_k) \cup \{e_k\}$ όπου η e_k έχει για άκρα της τις κορυφές v και w. Εάν η e_k περιέχεται στο optimal δέντρο T τότε έχουμε τελειώσει. 'Εστω ότι η e_k δεν περιέχεται στο optimal δέντρο T. Επειδή το T είναι συνεκτικό γράφημα υπάρχει (v, w)−μονοπάτι στο T και επομένως υπάρχει ακμή e' μ' ένα άκρο στο $V(T_k)$ και το άλλο στο $V(G) - V(T_k)$. Προφανώς από τον τρόπο κατασκευής του T_{k+1}, $w(e') \geq w(e_k)$. Διαγράφουμε από το T την e' και προσθέτουμε την e_k. Το δέντρο T' που θα προκύψει περιέχει το T_k, καθώς επίσης και την ακμή e_k, δηλαδή αυτό περιέχει το δέντρο T_{k+1}. 'Ομως το T' είναι ένα optimal δέντρο του G. 'Αρα το θεώρημα ισχύει.



Σχ. 2.2

2.3. Optimal επικαλυπτικά δέντρα και βέλτιστα μονοπάτια

Σ' αυτή την ενότητα θα αναφερθούμε επίσης σ' ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης που έχει σχέση με την έννοια των βέλτιστων επικαλυπτικών δέντρων. 'Εστω γράφημα G και έστω συνάρτηση $w : E(G) \to \mathbb{R}^+$. Εάν u, v κορυφές του G, με $P(u, v)$ θα συμβολίζουμε το σύνολο όλων των (u, v)−μονοπατιών στο G. 'Ενα στοιχείο P του $P(u, v)$ θα ονομάζεται **minimax (u, v)−μονοπάτι** εάν

$$\max_{e \in E(P)} w(e) = \min_{P' \in P(u,v)} \max_{e \in E(P')} w(e)$$

Θεώρημα 2.4 [1]: Έστω γράφημα G, συνάρτηση $w : E(G) \rightarrow I\!R^+$ και έστω T βέλτιστο επικαλυπτικό δέντρο του G. Εάν $u, v \in V(G)$, το μοναδικό $(u, v)-$μονοπάτι που υπάρχει στο T αποτελεί ένα *minimax* $(u, v)-$μονοπάτι για το γράφημα G.

Απόδειξη: Ας ονομάσουμε P το μοναδικό $(u, v)-$μονοπάτι που υπάρχει στο T. Έστω $w_0 = \max\limits_{e \in E(P)} w(e)$ και έστω ότι το P δεν αποτελεί *minimax* $(u, v)-$μονοπάτι για το γράφημα G. Εάν P^* *minimax* $(u, v)-$μονοπάτι του G και $w^* = \max\limits_{e \in E(P^*)} w(e)$ θα έχουμε προφανώς $w^* < w_0$. Διαγράφουμε από το T μια ακμή e_0 του P που έχει βάρος w_0. Το γράφημα $T - \{e_0\}$ είναι μη-συνεκτικό και αποτελείται από δύο συνιστώσες, έστω την T_1 και την T_2. Η μια απ' αυτές περιέχει την κορυφή u, ενώ η άλλη την κορυφή v. Επειδή $w^* = \max\limits_{e \in E(P^*)} w(e)$ και $w^* < w_0$, η ακμή e_0 δεν ανήκει στο P^*. Άρα το μονοπάτι P^* θα υπάρχει και στο γράφημα $G - \{e_0\}$. Επομένως υπάρχει ακμή e^* του P^* στο γράφημα $G - \{e_0\}$ της οποίας το ένα άκρο ανήκει στο σύνολο $V(T_1)$ και το άλλο στο σύνολο $V(T_2)$. Θεωρούμε το γράφημα $H = T - \{e_0\} + \{e^*\}$, το οποίο είναι επικαλυπτικό δέντρο του G. Έχουμε ότι

$$\sum_{e \in E(H)} w(e) = \sum_{e \in E(T)} w(e) - w(e_0) + w(e^*).$$

Όμως $w(e^*) \leq w^* < w(e_0)$. Άρα το επικαλυπτικό δέντρο H του G, θα έχει μικρότερο συνολικό βάρος από το T που ήταν βέλτιστο επικαλυπτικό δέντρο. Επομένως το P είναι ένα *minimax* $(u, v)-$μονοπάτι για το G.

2.4. Απαρίθμηση δέντρων

Σ' αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε αρχικά με τον προσδιορισμό του αριθμού των διαφορετικών δέντρων που έχουν το ίδιο σύνολο κορυφών και όπου ο βαθμός κάθε κορυφής είναι προκαθορισμένος και ο ίδιος για όλα τα δέντρα.

Θεώρημα 2.5: Έστω $d_1, d_2, \ldots, d_n$ θετικοί αριθμοί με $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$, όπου $n \geq 2$. Ο αριθμός των δέντρων T που έχουν το $V = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ ως σύνολο κορυφών τους και για τα οποία ισχύει $d_i = d_T(u_i)\ \forall i = 1, 2, \ldots, n$, ισούται με $\frac{(n-2)!}{(d_1-1)!(d_2-1)!\ldots(d_n-1)!}$.

Απόδειξη: Πρώτα απ' όλα παρατηρούμε ότι $(d_1 - 1) + (d_2 - 1) + \ldots + (d_n - 1) = n - 2$. Άρα ο αριθμός των δέντρων T, στα οποία αναφέρεται το θεώρημα ισούται με τον αριθμό των διατάξεων των n στοιχείων ενός συνόλου $K = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ ανά $(n-2)$ σε κάθε μία από τις οποίες το α_1 εμφανίζεται $d_1 - 1$ φορές, το α_2 εμφανίζεται $d_2 - 1$ φορές, ..., το α_n εμφανίζεται $d_n - 1$ φορές. Θα αποδείξουμε το Θεώρημα με επαγωγή ως προς n. Εάν $n = 2$ τότε προφανώς το Θεώρημα ισχύει. Σ' αυτή την περίπτωση $d_1 = d_2 = 1$ και υπάρχει ακριβώς ένα δέντρο με αυτά τα χαρακτηριστικά.

Ας υποθέσουμε ότι $n > 2$. Επειδή $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2 < 2n$ υπάρχει i έστι ώστε $d_i = 1$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $d_n = 1$. Η διαγραφή της κορυφής u_n από το T, θα μας δώσει ένα δέντρο T^* με σύνολο κορυφών το $\{u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}\}$ και με βαθμούς κορυφών $d_1, \ldots, d_{j-1}, d_j - 1, d_{j+1}, \ldots, d_{n-1}$ όπου u_j η κορυφή με την οποία ήταν γειτονική η u_n $(1 \leq j \leq n-1)$. Αντίστροφα, εάν έχουμε ένα δέντρο T^* με σύνολο κορυφών $\{u_1, \ldots, u_{n-1}\}$ όπου $d_{T^*}(u_1) = d_1, \ldots, d_{T^*}(u_{j-1}) = d_{j-1}, d_{T^*}(u_j) = d_j - 1, d_{T^*}(u_{j+1}) = d_{j+1}, \ldots, d_{T^*}(u_{n-1}) = d_{n-1}$, η προσθήκη μιας επιπλέον κορυφής u_n, την οποία συνδέουμε με την u_j θα μας δώσει ένα δέντρο T με τα χαρακτηριστικά που αναφέρονται στο Θεώρημα. Από την υπόθεση της επαγωγής και αν θεωρήσουμε το j να εκτείνεται από το 1 έως το $n-1$, ο αριθμός των υπό εξέταση δέντρων θα ισούται με

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{(n-3)!}{(d_1-1)!\ldots(d_{j-1}-1)!(d_j-2)!(d_{j+1}-1)!\ldots(d_{n-1}-1)!} =$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{(n-3)!(d_j-1)}{(d_1-1)!(d_2-1)!\dots(d_{n-1}-1)!(d_n-1)!} =$$

$$= \frac{(n-3)!}{(d_1-1)!(d_2-1)!\dots(d_n-1)!} \sum_{j=1}^{n-1}(d_j-1).$$

'Ομως

$$\sum_{j=1}^{n-1}(d_j-1) = \sum_{j=1}^{n-1} d_j - (n-1) = (2n-3) - (n-1) = n-2$$

Άρα ο ζητούμενος αριθμός θα ισούται με $\frac{(n-2)!}{(d_1-1)!\dots(d_n-1)!}$.

Από το προηγούμενο Θεώρημα μπορεί να προκύψει ως πόρισμα, το επόμενο αποτέλεσμα που διατυπωθηκε για πρώτη φορά από τον Caley [2].

Πόρισμα 2.6: Ο αριθμός των δέντρων που μπορούμε να έχουμε με σύνολο κορυφών το $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ισούται με n^{n-2}.

Για την απόδειξη του Πορίσματος 2.6, θα χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω Λήμμα.

Λήμμα 2.7: Εάν $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in I\!R$, τότε

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p)^n = \sum_{\substack{n_1,\dots,n_p \geq 0 \\ n_1+\dots+n_p=n}} \binom{n}{n_1 n_2 \dots n_p} \alpha_1^{n_1}\alpha_2^{n_2}\dots\alpha_p^{n_p}$$

Απόδειξη του Πορίσματος 2.6: Από το Θεώρημα 2.5 έχουμε ότι ο ζητούμενος αριθμός ισούται με

$$\sum_{\substack{d_1,d_2\dots,d_n \geq 1 \\ d_1+d_2+\dots+d_n=2n-2}} \frac{(n-2)!}{(d_1-1)!\dots(d_n-1)!} = \sum_{\substack{k_1,\dots,k_n \geq 0 \\ k_1+\dots k_n=n-2}} \frac{(n-2)!}{k_1!k_2!\dots k_n!} =$$

$$\sum_{\substack{k_1,\ldots,k_n\geq 0\\ k_1+\ldots k_n=n-2}} \binom{n-2}{k_1k_2\ldots k_n}(1)^{k_1}(1)^{k_2}\ldots(1)^{k_n} =$$

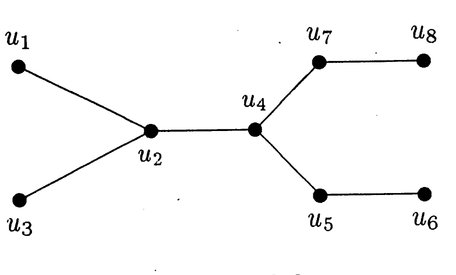
$$(\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n})^{n-2} = n^{n-2} \text{ από το Λήμμα 2.7}$$

Στην συνέχεια θα αναφέρουμε μια απόδειξη του Πορίσματος 2.6, η οποία εδόθη από τον Heinz Prüfer το 1918. [6]

Απόδειξη Prüfer του Πορίσματος 2.6:

Έστω S το σύνολο των διατάξεων των n στοιχείων του συνόλου $\{1, 2, \ldots, n\}$ ανά $n-2$, στις οποίες επιτρέπεται επανάληψη στοιχείων. Προφανώς $|S| = n^{n-2}$ και για να αποδείξουμε το Πόρισμα 2.6, αρκεί να αποδείξουμε ότι μεταξύ του S και του συνόλου των δέντρων που εξετάζουμε μπορεί να ορισθεί μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία.

Έστω T δέντρο με σύνολο κορυφών $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ (το οποίο θεωρούμε διατεταγμένο). Έστω u_{s_1} η πρώτη κορυφή (ως προς την παραπάνω διάταξη), η οποία έχει βαθμό 1 και έστω t_1 ο δείκτης της γειτονικής της κορυφής στο T. Θεωρούμε το γράφημα $T_1 = T - \{u_{s_1}\}$, το οποίο είναι δέντρο. Έστω u_{s_2} η πρώτη κορυφή, η οποία έχει βαθμό 1 στο T_1 και έστω t_2 ο δείκτης της γειτονικής της κορυφής στο T_1. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται μέχρι να φθασουμε στον δείκτη t_{n-2}. Για να φθάσουμε σ' αυτό το σημείο θα έχουμε διαγράψει $n-2$ κορυφές, οπότε θα έχει προκύψει ένα δέντρο με μόνον δύο κορυφές. Στο αρχικό δέντρο T, αντιστοιχούμε την διάταξη $(t_1, t_2, \ldots, t_{n-2})$. Για παράδειγμα στο δέντρο του Σχ. 2.3 αντιστοιχούμε την διάταξη (2,2,4, 5,4,7). Μπορεί επίσης να αποδειχθεί ότι διαφορετικά δέντρα αντιστοιχούν μέσω της παραπάνω διαδικασίας σε διαφορετικές διατάξεις.



Σχ. 2.3

Τώρα αντιστρέφοντας ουσιαστικά την προηγούμενη διαδικασία μπορούμε να ξεκινήσουμε από μια διάταξη και να κατασκευάσουμε το δέντρο T, από το οποίο προκύπτει αυτή. Πριν περιγράψουμε αυτή την αντίστροφη διαδικασία, ας κάνουμε τις εξής παρατηρήσεις: Κάθε δείκτης κορυφής u του T εμφανίζεται στην διάταξη $(t_1, t_2, \ldots, t_{n-2})$ που αντιστοιχεί σ' αυτό, $d_T(u) - 1$ φορές. Δηλαδή οι μόνοι δείκτες που δεν εμφανίζονται στην διάταξη είναι εκείνων των κορυφών που έχουν βαθμό 1. Επίσης η κορυφή u_{s_1} που είναι γειτονική με την u_{t_1}, είναι μια κορυφή βαθμού 1 με το μικρότερο δυνατόν δείκτη. Δηλαδή ο δείκτης s_1 θα είναι ο μικρότερος ακέραιος που δεν εμφανίζεται στην διάταξη $(t_1, t_2, \ldots, t_{n-2})$.

Λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω παρατηρήσεις, για να κατασκευάσουμε το δέντρο T από την διάταξη $(t_1, t_2, \ldots, t_{n-2})$, εργαζόμαστε ως εξής:

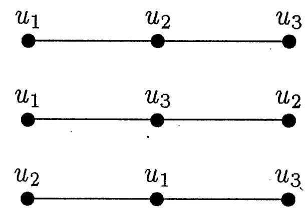
Έστω s_1 ο πρώτος δείκτης κορυφής στο διατεταγμένο σύνολο $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ που δεν ανήκει στην διάταξη $(t_1, t_2, \ldots, t_{n-2})$. Συνδέουμε τις κορυφές u_{s_1}, u_{t_1} με μια ακμή. Στην συνέχεια έστω s_2 ο πρώτος δείκτης κορυφής στο παραπάνω διατεταγμένο σύνολο από το οποίο έχει αφαιρεθεί η κορυφή u_{s_1}, που δεν ανήκει στην διάταξη $(t_2, \ldots, t_{n-2})$. Συνδέουμε τις κορυφές u_{s_2}, u_{t_2} επίσης με μια ακμή. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται μέχρι να προστεθεί η ακμή $u_{s_{n-2}} u_{t_{n-2}}$.

Το δέντρο T, θα προκύψει αν στις ήδη υπάρχουσες ακμές $u_{s_1} u_{t_1}$, $u_{s_2} u_{t_2}, \ldots, u_{s_{n-2}} u_{t_{n-2}}$ προστεθεί η ακμή που έχει για άκρα της τα δύο στοιχεία του $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} - \{u_{s_1}, u_{s_2}, \ldots u_{s_{n-2}}\}$.

Μπορεί να αποδειχθεί και σ'αυτή την περίπτωση ότι σε διαφορετικές διατάξεις αντιστοιχούν διαφορετικά δέντρα μέσω της διαδικασίας που περιγράψαμε.

Παρατήρηση: Στα Θεωρήματα 2.5, 2.6 εξετάσαμε τον αριθμό των δέντρων που έχουν ένα συγκεκριμένο σύνολο κορυφών $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$. Ο αριθμός αυτός είναι εντελώς διαφορετικός από τον αριθμό των μη-ισομορφικών δέντρων με n κορυφές (δηλαδή των δέντρων με n κορυφές που έχουν διαφορετική δομή). Για παράδειγμα, ο αριθμός των μη-ισομορφικών δέντρων με 3 κορυφές ισούται με 1 (βλέπε Σχ. 2.4). Ο αριθμός όμως των δέντρων που έχουν ως σύνολο κορυφών τους το $\{u_1, u_2, u_2\}$ ισούται με 3^{3-2} (βλέπε Σχ. 2.5).

Σχ. 2.4

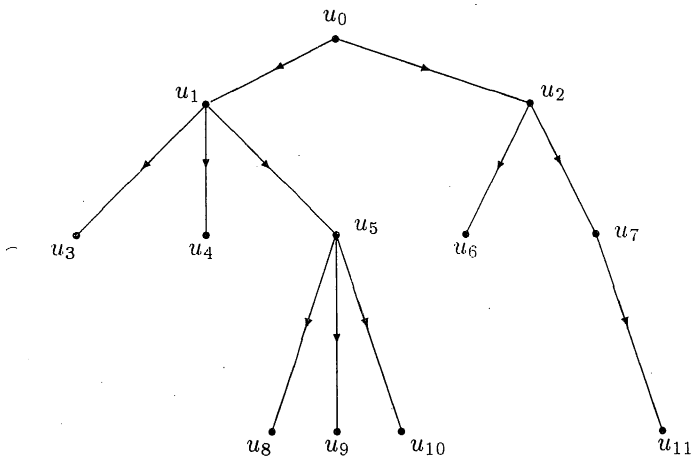


Σχ. 2.5

2.5. Δέντρα με ρίζες

Ένα κατευθυνόμενο γράφημα D ονομάζεται **κατευθυνόμενο δέντρο**, εάν από την αντικατάσταση των τόξων του D με ακμές προκύπτει ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα που είναι δέντρο.

Ένα κατευθυνόμενο δέντρο λέμε ότι έχει ρίζα, εάν (i) υπάρχει σ' αυτό ακριβώς μια κορυφή u_0 με $d_D^-(u_0) = 0$ και (ii) για όλες τις άλλες κορυφές u_i ισχύει ότι $d_D^-(u_i) = 1$. Η κορυφή u_0 ονομάζεται **ρίζα** του κατευθυνόμενου δέντρου D και όλες οι κορυφές u_j για τις οποίες ισχύει ότι $d_D^+(u_j) = 0$ ονομάζονται **φύλλα**. Επίσης όλες οι κορυφές που δεν είναι φύλλα ονομάζονται **εσωτερικές κορυφές**.



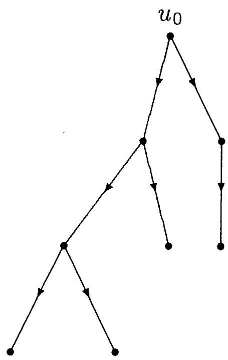
Σχ. 2.6

Το γράφημα του Σχ. 2.6 είναι ένα κατευθυνόμενο δέντρο με ρίζα. Η κορυφή u_0 αποτελεί ρίζα του, ενώ για φύλλα του έχει τις κορυφές $u_3, u_4, u_6, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}$. Για τα δέντρα με ρίζα θα χρησιμοποιούμε και τους παρακάτω όρους:

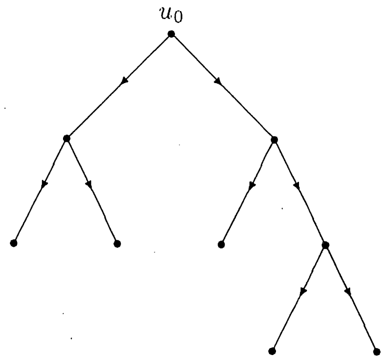
Μια κορυφή v ονομάζεται **παιδί** μιας κορυφής u, εάν υπάρχει τόξο από την u στη v. Επίσης η κορυφή u ονομάζεται **πατέρας** της v. Δυο κορυφές ονομάζονται **αδέλφια**, εάν είναι παιδιά της ίδιας κορυφής. Μια κορυφή v ονομάζεται **απόγονος** μιας κορυφής u εάν υπάρχει ένα κατευθυνόμενο μονοπάτι από την u στη v. Επίσης η u ονομάζεται **πρόγονος** της v.

Ένα κατευθυνόμενο δέντρο D με ρίζα ονομάζεται **δυαδικό** εάν $d_D^+(u_i) \leq 2 \ \forall u_i \in V(D)$. Το D ονομάζεται πλήρες δυαδικό εάν για κάθε κορυφή u_i που δεν είναι φύλλο του ισχύει ότι $d_D^+(u_i) = 2$.

Στο Σχ. 2.7 έχουμε ένα δυαδικό δέντρο, ενώ στο Σχ. 2.8 έχουμε ένα **πλήρες δυαδικό δέντρο**.

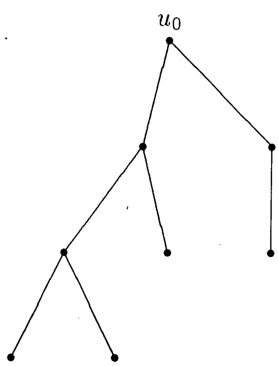


Σχ. 2.7



Σχ. 2.8

Τώρα σ' ένα κατευθυνόμενο δέντρο με ρίζα, τα τόξα του μπορούν να αντικατασταθούν με ακμές, διότι η επιλογή μιας κορυφής σαν ρίζα ουσιαστικά προσδιορίζει τις "κατευθύνσεις" των τόξων του γραφήματος.



Σχ. 2.9

Για παράδειγμα εάν έχουμε το γράφημα του Σχ. 2.7, τότε αμέσως μπορούμε να προσδιορίσουμε το κατευθυνόμενο γράφημα με ρίζα, από το οποίο προέρχεται. Στην προκείμενη περίπτωση, αυτό θα είναι το γράφημα του Σχ. 2.9.

Επομένως από εδώ και πέρα τα κατευθυνόμενα δέντρα με ρίζα θα τα απεικονίζουμε με μη-κατευθυνόμενα δέντρα.

Θεώρημα 2.8: Σε ένα πλήρες δυαδικό δέντρο T, ο αριθμός των φύλλων L σε σχέση με τον αριθμό των εσωτερικών κορυφών I ικανοποιούν την εξίσωση $L = I + 1$.

Απόδειξη: Οι κορυφές που αποτελούν τα φύλλα του T, είναι όλες οι κορυφές που έχουν βαθμό 1. Οι εσωτερικές κορυφές του T, πλην της ρίζας, είναι όλες οι κορυφές που έχουν βαθμό 3, ενώ η ρίζα είναι κορυφή βαθμού 2. Άρα

$$2\varepsilon(T) = \sum_{x \in V(T)} d_T(x) = L + 3(I-1) + 2 \qquad (2.1)$$

Όμως από το Θεώρημα 2.1 έχουμε ότι $\nu(G) = \varepsilon(G) + 1$ και επειδή $\nu(G) = L + I$, από την (2.1) παίρνουμε ότι $L = I + 1$.

Σαν **ύψος** μιας **κορυφής** u σ' ένα δέντρο με ρίζα, ορίζουμε το μήκος του μοναδικού μονοπατιού που συνδέει την ρίζα με την u. Επίσης σαν **ύψος** του **δέντρου** ορίζουμε την μέγιστη τιμή ύψους κορυφής.

Θεώρημα 2.9: Σ' ένα δυαδικό δέντρο T ύψους h υπάρχουν το πολύ 2^h φύλλα.

Απόδειξη: Θα το αποδείξουμε με επαγωγή ως προς h. Εάν $h = 1$ τότε προφανώς το T θα έχει ένα ή δύο φύλλα. Άρα σ' αυτή την περίπτωση το Θεώρημα ισχύει. Έστω τώρα ότι έχουμε ένα δυαδικό δέντρο T ύψους h. Διαγράφουμε από το T τις ακμές που έχουν για άκρο τους την ρίζα του T. Επειδή το T είναι δυαδικό, αυτές είναι το πολύ 2. Από αυτή την διαγραφή των ακμών θα προκύψουν (i) ένα γράφημα που αποτελείται από μία μόνον κορυφή, βαθμού 0 και (ii) ένα ή δύο δυαδικά δέντρα ύψους το πολύ $h-1$. Από την υπόθεση της επαγωγής, καθένα από αυτά τα δυαδικά δέντρα ύψους το πολύ $h-1$ έχει το πολύ 2^{h-1} φύλλα.

Τώρα η ένωση των συνόλων των φύλλων αυτών των δυαδικών δέντρων ισούται με το σύνολο των φύλλων του T. Άρα το T έχει το πολύ $2{\cdot}2^{h-1} = 2^h$ φύλλα.

<u>Πόρισμα 2.10:</u> Εάν έχουμε ένα δυαδικό δέντρο ύψους h, το οποίο έχει L φύλλα, τότε $h \geq \lceil \log_2 L \rceil$. (Με $\lceil x \rceil$ συμβολίζουμε τον μικρότερο ακέραιο που είναι μεγαλύτερος ή ίσος με x.)

<u>Απόδειξη:</u> Από το Θεώρημα 2.9 έχουμε ότι $L \leq 2^h$. Άρα $\log_2 L \leq h$ και επειδή το h είναι ακέραιος $h \geq \lceil \log_2 L \rceil$.

2.6. Κώδικες προθέματος και αλγόριθμος του Huffman

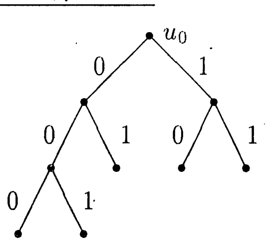
Έστω ότι θέλουμε να μεταδώσουμε ένα μήνυμα σε κωδικοποιημένη μορφή. Συγκεκριμένα σ' αυτή τη μορφή κάθε γράμμα του αγγλικού αλφαβήτου θα πρέπει να το αναπαραστήσουμε με μια πεπερασμένη ακολουθία που έχει για όρους της, τους αριθμούς 0 και 1. Προφανώς τα 26 γράμματα θα πρέπει να αναπαρασταθούν με 26 διαφορετικές ακολουθίες και κάτι τέτοιο μπορεί να γίνει εάν χρησιμοποιήσουμε ακολουθίες μήκους 5. (Ο συνολικός αριθμός τέτοιων ακολουθιών ισούται με 2^5).

Ο αποδέκτης ενός τέτοιου μηνύματος θα λάβει μια συμβολοσειρά που αποτελείται από 0 και 1, την οποία για να αποκωδικοποιήσει θα πρέπει να χωρίσει σε ακολουθίες μήκους 5 την καθεμία, από τις οποίες θα αναγνωρίσει τα αντίστοιχα γράμματα. Τα γράμματα του αγγλικού αλφάβητου όμως δεν εμφανίζονται όλα με την ίδια συχνότητα. Άλλη είναι η συχνότητα εμφάνισης του γράμματος a, άλλη είναι η συχνότητα εμφάνισης του γράμματος q. Αν θέλουμε επομένως να ελαχιστοποιήσουμε το μήκος της συμβολοσειράς που αντιστοιχεί σ' ένα μήνυμα, θα ήταν επιθυμητό να αναπαραστήσουμε γράμματα που χρησιμοποιούνται πιο συχνά με ακολουθίες μικρότερου μήκους και γράμματα που χρησιμοποιούνται λιγότερο συχνά με ακολουθίες μεγαλύτερου μήκους. Εάν όμως κάνουμε κάτι τέτοιο προκύπτει το εξής πρόβλημα: Πως ο αποδέκτης του μηνύματος θα διαιρέσει την συμβολοσειρά σε ακολουθίες που αντιστοιχούν σε γράμματα, τώρα που αυτές έχουν διαφορετικό μήκος;

Για παράδειγμα, εάν χρησιμοποιήσουμε την ακολουθία 01 για να περιγράψουμε το γράμμα a, την 11 για να περιγράψουμε το γράμμα e και την 0111 για να περιγράψουμε το γράμμα q, τότε όταν λάβει ο αποδέκτης την συμβολοσειρά 0111 δεν θα μπορεί να προσδιορίσει εάν μεταδόθηκε το γράμμα q ή τα γράμματα ae. Το παραπάνω πρόβλημα μπορούμε να το επιλύσουμε εάν χρησιμοποιήσουμε έναν κώδικα προθέματος. 'Οταν λέμε **κώδικα προθέματος** εννοούμε ένα σύνολο ακολουθιών στο οποίο καμία ακολουθία δεν είναι πρόθεμα κάποιας άλλης. Για παράδειγμα, το σύνολο $\{11, 100, 101, 00, 01\}$ είναι ένας κώδικας προθέματος.

Κατ' αρχήν θα παρατηρήσουμε ότι ένας κώδικας προθέματος μπορεί να κατασκευασθεί από ένα πλήρες δυαδικό δέντρο. 'Εστω ότι έχουμε ένα πλήρες δυαδικό δέντρο T. Για κάθε εσωτερική κορυφή του T, αντιστοιχούμε στις δύο ακμές που την συνδέουν με τα παιδιά της, τις ετικέτες 0 και 1 αντίστοιχα. Στην συνέχεια σε κάθε φύλλο αντιστοιχούμε την ακολουθία των ετικετών που συναντάμε ακολουθώντας το μονοπάτι που συνδέει την ρίζα του T με το συγκεκριμένο φύλλο. Το σύνολο των ακολουθιών που αντιστοιχούν στα φύλλα του T είναι ένας κώδικας προθέματος.

<u>Παράδειγμα 2.1:</u>



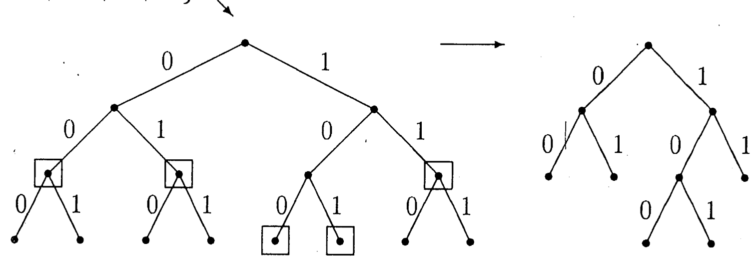
$\longrightarrow \{000, 001, 01, 10, 11\}$

Σχ. 2.10

Αντίστροφα, εάν έχουμε έναν κώδικα προθέματος, υπάρχει δυαδικό δέντρο T, στο οποίο οι δύο ακμές που συνδέουν κάθε εσωτερική κορυφή με τα παιδιά της έχουν τις ετικέτες 0 και 1 και στο οποίο οι ακολουθίες των ετικετών που συναντάμε καθώς πηγαίνουμε από την ρίζα σε κάθε φύλλο δεν είναι άλλες από τα στοιχεία του κώδικα προθέματος. Το δέντρο T κατασκευάζεται ως εξής: Έστω h μέγιστη τιμή μήκους ακολουθίας που ανήκει στον κώδικα προθέματος. Κατασκευάζουμε ένα πλήρες δυαδικό δένδρο στο οποίο κάθε κορυφή έχει ύψος h. Αντιστοιχούμε στις δύο ακμές που συνδέουν κάθε εσωτερική κορυφή με τα παιδιά της, τις ετικέτες 0 και 1 αντίστοιχα. Στην συνέχεια σε κάθε κορυφή u του T, αντιστοιχούμε την ακολουθία των ετικετών που συναντάμε, εάν ακολουθήσουμε το μονοπάτι που συνδέει την ρίζα του T με την u. Εντοπίζουμε και σημειώνουμε τις κορυφές του T, στις οποίες έχει αντιστοιχηθεί ακολουθία που ανήκει στον κώδικα προθέματος και επίσης διαγράφουμε κάθε μη-σημειωμένη κορυφή του T, που δεν αποτελεί πρόγονο σημειωμένης κορυφής. Το δυαδικό δέντρο που θα προκύψει είναι το ζητούμενο δέντρο.

Παράδειγμα 2.2:

$\{11, 100, 101, 00, 01\}$



Σχ. 2.11

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, στόχος μας είναι να κατασκευάσουμε έναν κώδικα προθέματος, στον οποίο τα γράμματα που εμφανίζονται συχνότερα θα περιγράφονται με ακολουθίες μικρότερου μήκους. Στην διατύπωση ενός τέτοιου προβλήματος ας γίνουμε πιο ακριβείς εκμεταλλευόμενοι και τις πληροφορίες που έχουμε για την πιθανότητα εμφάνισης ενός γράμματος σε ένα κείμενο.

Έστω ότι η πιθανότητα εμφάνισης του γράμματος a_i ισούται με p_i και έστω ότι με ℓ_i συμβολίζουμε το μήκος της δυαδικής λέξης που θα χρησιμοποιήσουμε για να αναπαραστήσουμε το a_i. Εάν θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε το μήκος της μεταδιδόμενης συμβολοσειράς, θα πρέπει να βρούμε έναν κώδικα προθέματος για τον οποίο το $\sum_{i=1}^{26} \ell_i p_i$ είναι ελάχιστο, δηλαδή θα πρέπει να βρούμε έναν κώδικα προθέματος, ο οποίος ελαχιστοποιεί το μέσο μήκος της συμβολοσειράς που θέλουμε να μεταδώσουμε.

Περιγράψαμε προηγουμένως μια διαδικασία όπου από ένα πλήρες δυαδικό δέντρο μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν πίνακα προθέματος. Σε κάθε φύλλο αυτού του δυαδικού δέντρου αντιστοιχεί μια δυαδική λέξη που περιγράφει κάποιο γράμμα. Εάν το μήκος της δυαδικής λέξης ισούται με ℓ_i, με ℓ_i θα ισούται και το μήκος του μοναδικού μονοπατιού που συνδέει την ρίζα του δέντρου με αυτό το φύλλο. Εμείς θέλουμε να κατασκευασουμε ένα τέτοιο πλήρες δυαδικό δέντρο T, για το οποίο το $\sum_{i=1}^{n} \ell_i p_i$ είναι όσο το δυνατόν μικρότερο. Στο προηγούμενο άθροισμα αναφέραμε ότι το i εκτείνεται από το 1 έως το n και όχι απαραίτητα έως το 26, διότι από εδώ και πέρα θα θεωρήσουμε πως οι χαρακτήρες που μεταδίδονται είναι γενικά οι n χαρακτήρες $a_1, a_2, \ldots, a_n$ και όχι απαραίτητα τα γράμματα του αγγλικού αλφάβητου. Ένα τέτοιο δέντρο T, θα το ονομάζουμε **βέλτιστο δέντρο**, ενώ κάθε αριθμό p_i που εκφράζει την πιθανότητα εμφάνισης του χαρακτήρα a_i θα τον ονομάζουμε και **βάρος** του φύλλου του T, στο οποίο αντιστοιχεί η δυαδική ακολουθία που περιγράφει τον παραπάνω χαρακτήρα. Επίσης, το άθροισμα $\sum_{i=1}^{n} \ell_i p_i$ θα το ονομάζουμε **συνολικό βάρος** του T και θα το συμβολίζουμε με $w(T)$.

Μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς να βλάψουμε τη γενικότητα των επιχειρημάτων μας ότι

$$p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_n.$$

Η κατασκευή ενός βέλτιστου δέντρου T στηρίζεται στο εξής Θεώρημα.

Θεώρημα 2.11: Ένα βέλτιστο δέντρο T με βάρη φύλλων $p_1, p_2, \ldots, p_n$ μπορεί να προκύψει από ένα βέλτιστο δέντρο T^* με βάρη φύλλων $p_1 + p_2, p_3, \ldots p_n$.

Απόδειξη: Πρώτα απ' όλα θα αποδείξουμε ότι υπάρχει βέλτιστο δέντρο στο οποίο τα φύλλα που έχουν βάρος p_1 και p_2 είναι αδέλφια.

Έστω βέλτιστο δέντρο T με φύλλα $u_1, u_2, \ldots, u_n$ και βάρη φύλλων $p_1, p_2, \ldots, p_n$ αντίστοιχα. Έστω w εσωτερική κορυφή του T, της οποίας η απόσταση από την ρίζα u_0 του T είναι μέγιστη. Έστω, επίσης, u_x, u_y τα δύο παιδιά της w. Προφανώς $d_T(u_0, u_x) \geq d_T(u_0, u_1)$, δηλαδή $\ell_x \geq \ell_1$. Εναλλάσουμε τους ρόλους των φύλλων u_1 και u_x (θεωρούμε ότι το u_1 αντιστοιχεί στον χαρακτήρα που έχει πιθανότητα εμφάνισης p_x, ενώ το u_x στον χαρακτήρα που έχει πιθανότητα εμφάνισης p_1). Ας ονομάσουμε T' το πλήρες δυαδικό δέντρο που προκύπτει απ' αυτή την εναλλαγή. Το βάρος του T' θα ισούται με $w(T) - p_1\ell_1 - p_x\ell_x + p_x\ell_1 + p_1\ell_x = w(T) + (p_x - p_1)(\ell_1 - \ell_x)$. Επειδή το T ήταν βέλτιστο δέντρο και επειδή $p_1 \leq p_x$, θα έχουμε είτε $\ell_1 \geq \ell_x$ είτε $p_x = p_1$. Έστω ότι $\ell_1 \geq \ell_x$. Όμως προηγουμένως είδαμε ότι $\ell_x \geq \ell_1$. Άρα $\ell_1 = \ell_x$ και επομένως το T' έχει ακριβώς το ίδιο βάρος με το T, δηλαδή και το T' είναι επίσης βέλτιστο δέντρο. Εάν $p_x = p_1$ καταλήγουμε πάλι στο ίδιο συμπέρασμα, διότι και σ' αυτή την περίπτωση $w(T) = w(T')$.

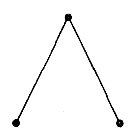
Χρησιμοποιώντας ακριβώς τα ίδια επιχειρήματα, στο δέντρο T' αυτή τη φορά και εναλλάσοντας τους ρόλους των φύλλων u_2 και u_y παίρνουμε ένα βέλτιστο δέντρο T'', στο οποίο τα φύλλα που έχουν βάρη p_1 και p_2 είναι αδέλφια.

Τώρα έστω T^* βέλτιστο δέντρο με βάρη φύλλων $p_1, p_2, \ldots, p_n$ στο οποίο τα φύλλα που έχουνε βάρος p_1 και p_2 είναι αδέλφια. Διαγράφουμε από το T^* αυτά τα δύο φύλλα καθώς επίσης και τον πατέρα τους και τα αντικαθιστούμε μ' ένα φύλλο που έχει βάρος $p_1 + p_2$. Έστω T^{**} το πλήρες δυαδικό δένδρο που θα προκύψει απ' αυτή τη διαδικασία. Με άλλα λόγια το T^{**} θα είναι ένα δέντρο με βάρη φύλλων

$p_1 + p_2, p_3, \ldots, p_n$. Προφανώς

$$w(T^*) = w(T^{**}) + p_1 + p_2$$

'Εστω T βέλτιστο δέντρο με βάρη φύλλων $p_1 + p_2, p_3, \ldots, p_n$. Διαγράφουμε από το T το φύλλο του που έχει βάρος $p_1 + p_2$ και το αντικαθιστούμε με το υπόδεντρο του Σχ. 2.12 του οποίου τα φύλλα έχουν βάρη p_1 και p_2. 'Εστω T' το πλήρες δυαδικό δέντρο που θα προκύψει. Για το T' έχουμε



Σχ. 2.12

$$w(T') = w(T) + p_1 + p_2$$

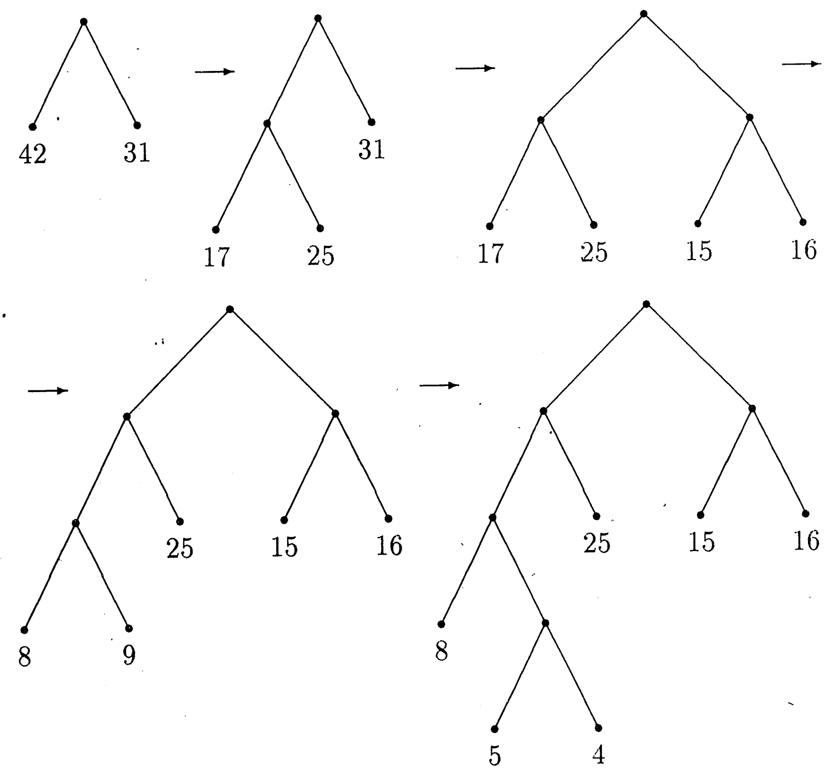
Τώρα εάν $w(T') > w(T^*)$, αυτό σημαίνει ότι $w(T) > w(T^{**})$. 'Ομως κάτι τέτοιο δεν μπορεί να ισχύει διότι το T ήταν ένα βέλτιστο δέντρο με βάρη φύλλων $p_1 + p_2, p_3, \ldots, p_n$. 'Αρα $w(T') \leq w(T^*)$ και επομένως το δέντρο T' είναι ένα βέλτιστο δέντρο με βάρη φύλλων $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Στο προηγούμενο Θεώρημα έχουμε αποδείξει ότι το πρόβλημα της κατασκευής ενός βέλτιστου δέντρου με n βάρη μπορεί να αναχθεί σε εκείνο της κατασκευής ενός δέντρου με $n-1$ βάρη, το οποίο στη συνέχεια μπορεί να αναχθεί σε εκείνο της κατασκευής ενός με $n-2$ βάρη κ.ο.κ.

Η διαδικασία κατασκευής ενός βέλτιστου δέντρου που υπαγορεύεται από το Θεώρημα ονομάζεται διαδικασία του Huffman [3].

Παράδειγμα 2.3: 'Εστω ότι θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα βέλτιστο δέντρο με βάρη φύλλων 4,5,8,15,16,25. Σύμφωνα με το Θεώρημα ένα τέτοιο δέντρο μπορεί να κατασκευασθεί από ένα βέλτιστο δέντρο με βάρη φύλλων 9.8,15.16,25. 'Ομως και πάλι σύμφωνα με το Θεώρημα ένα βέλτιστο δέντρο με βάρη φύλλων 8,9,15,16,25 μπορεί να κατασκευασθεί από ένα βέλτιστο δέντρο με βάρη φύλλων 17,15,16,25. Η κατασκευή ενός βέλτιστου δέντρου με βάρη φύλλων 15,16,17,25 μπορεί να προκύψει από ένα βέλτιστο δέντρο με βάρη φύλλων 31,17,25. Τέλος, η κατασκευή ενός βέλτιστου δέντρου με βάρη φύλλων 17,25,31 μπορεί να προκύψει από ένα βέλτιστο δέντρο με βάρη φύλλων 42,31.

Εφαρμόζοντας όλες τις λεπτομέρειες της διαδικασίας που περιγράφεται στο Θεώρημα έχουμε:



Σχ. 2.13

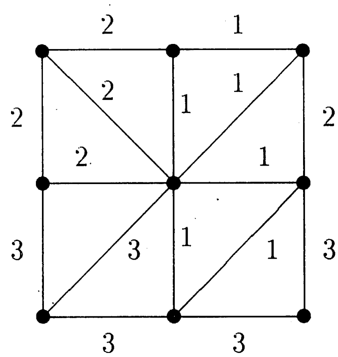
Ασκήσεις 2

2.1: Έστω δέντρο T με $\Delta(T) = k$ και έστω ότι με n_i συμβολίζουμε τον αριθμό των κορυφών του που έχουν βαθμό i για $i = 1, 2, \ldots, k$. Να αποδειχθεί ότι

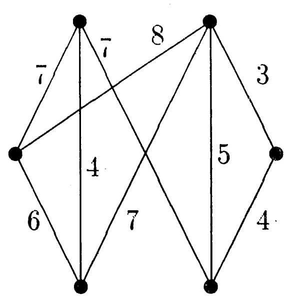
$$n_1 = n_3 + 2n_4 + 3n_5 + \ldots + (k-2)n_k + 2$$

2.2: Έστω δέντρο T με k κορυφές και έστω απλό γράφημα G με $\delta(G) \geq k - 1$. Να αποδειχθεί ότι το T είναι υπογράφημα του G.

2.3: Για τα γραφήματα των Σχ. 2.14 και 2.15, να βρεθεί ένα optimal επικαλυπτικό δέντρο χρησιμοποιώντας τους αλγόριθμους του Kruskal και του Prim.



Σχ. 2.14



Σχ. 2.15

2.4: Το **δεντρο–γράφημα** ενός συνεκτικού γραφήματος είναι ένα γράφημα που έχει ως σύνολο κορυφών του τα επικαλυπτικά δέντρα $T_1, T_2, \ldots, T_T$ του G και όπου δύο κορυφές T_i, T_j είναι γειτονικές σ' αυτό εάν έχουν ακριβώς $\nu - 2$ κοινές ακμές. Να αποδειχθεί ότι το δεντρο–γράφημα ενός συνεκτικού γραφήματος είναι επίσης συνεκτικό γράφημα.

2.5: Μια ακολουθία $d_1, d_2, \ldots, d_n$ θετικών ακέραιων (όπου $n \geq 2$) αποτελεί την ακολουθία βαθμών ενός δέντρου εάν και μόνον εάν $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$.

2.6: Για καθένα από τα παρακάτω σύνολα βαρών, να κατασκευασθεί ένα βέλτιστο πλήρες δυαδικό δέντρο.
(i) 1,2,4,5,6,9,10,12
(ii) 5,5,10,15,15,20,30

2.7: 'Εστω G ένα συνεκτικό γράφημα. Να αποδειχθεί ότι για κάθε κορυφή u του G υπάρχει επικαλυπτικό δέντρο T του G για το οποίο ισχύει

$$d_G(u,w) = d_T(u,w) \quad \text{για κάθε} \quad w \in V(G).$$

Αναφορές

1. Bardadym, B.A., Minimax paths and minimum spanning trees, Kibernetica No. 2 (1990), 122 (in Russian).
2. Cayley A., A theorem on trees, Quart. J. Math. 23 (1889), 276–378.
3. Huffman D.A., A method for the construction of minimum redundancy codes. Proc. Inst. Rail. Engin 40 (1952), 1098–1011.
4. Kruskal J.B.Jr., On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem. Proc. Amer. Math. Soc. 7 (1956), 48–50.
5. Prim R.C., Shortest connection networks and some generalizations. Bell Syst. Tech. J. 36 (1957), 1389–1401.
6. Prüfer H., Neuer Beweis eines Satzes über Permutationen. Arch. Math. Phys. 27 (1918), 742–744.

Κεφάλαιο 3

Μονοπάτια και αποστάσεις σε γραφήματα

Έστω γράφημα G και έστω συνάρτηση $w : E(G) \to \mathbb{R}^+$. Μια ακμή e του G που έχει για άκρα της, τις κορυφές u και v θα την συμβολίζουμε με $\{u, v\}$, ενώ με $w(u, v)$ θα συμβολίζουμε την εικόνα της e μέσω της συνάρτησης w. Τον αριθμό $w(u, v)$ θα τον ονομάζουμε **μήκος** ή **βάρος** της ακμής $\{u, v\}$, ενώ ως **μήκος ενός μονοπατιού** ορίζουμε το άθροισμα των μηκών (βαρών) των ακμών που ανήκουν σ' αυτό το μονοπάτι. Εάν $u_1, u_2 \in V(G)$, με $d_G(u_1, u_2)$ θα συμβολίζουμε το μήκος ενός συντομότερου $(u_1, u_2)-$μονοπατιού στο G (δηλαδή ενός $(u_1, u_2)-$μονοπατιού με ελάχιστο μήκος). Τον αριθμό $d_G(u_1, u_2)$ θα τον ονομάζουμε απόσταση μεταξύ των κορυφών u_1 και u_2.

Εδώ θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι εάν δεν έχουμε ορίσει συνάρτηση w στο $E(G)$, το μήκος ενός μονοπατιού ορίζεται με τον συνήθη τρόπο, δηλαδή ορίζεται ως ο αριθμός των ακμών του (βλέπε Κεφ. 1). Με άλλα λόγια ουσιαστικά θεωρούμε ότι κάθε ακμή έχει βάρος 1.

3.1. Το πρόβλημα των αποστάσεων και των συντομότερων μονοπατιών

Το πρόβλημα που θα μας απασχολήσει σ' αυτή την ενότητα έχει ως εξής: 'Εστω γράφημα G, συνάρτηση $w : E(G) \rightarrow I\!R^+$ και έστω $u_0 \in V(G)$. Θέλουμε να προσδιορίσουμε τις αποστάσεις της u_0 από οποιαδήποτε άλλη κορυφή του G.

Ο αλγόριθμος που θα περιγράψουμε παρακάτω, ο οποίος προσδιορίζει αυτές τις αποστάσεις, έχει για βάση του τις εξής παρατηρήσεις:

a) 'Εστω $S \subseteq V(G)$ και έστω $u_0 \in S$. Με $\overline{S}$ θα συμβολίζουμε το σύνολο $V(G) - S$. Για κάθε κορυφή $v \in \overline{S}$ θεωρούμε όλα τα (u_0, v)−μονοπάτια που (εκτός της v) δεν περιέχουν άλλη κορυφή του $\overline{S}$. 'Εστω $\ell(v)$ το μήκος ενός συντομότερου τέτοιου (u_0, v)−μονοπατιού. Εάν δεν υπάρχει ένα τέτοιο μονοπάτι τότε θέτουμε όπου $\ell(v)$ το ∞. Τον αριθμό $\ell(v)$ θα τον ονομάζουμε **δείκτη** της κορυφής v ως προς το σύνολο S. (Εδώ θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι ο $\ell(v)$ δεν αντιπροσωπεύει απαραίτητα το μήκος του συντομότερου μονοπατιού μεταξύ των κορυφών u_0 και v, διότι πιθανόν να υπάρχει άλλο συντομότερο (u_0, v)−μονοπάτι που εκτός από την v περιέχει και άλλες κορυφές που ανήκουν στο $\overline{S}$).

'Εστω v_1 κορυφή με τον μικρότερο δείκτη. Θα αποδείξουμε ότι σ' αυτή την περίπτωση ο $\ell(v_1)$ είναι ίσος με το μήκος του συντομότερου (u_0, v_1)−μονοπατιού. 'Εστω ότι το παραπάνω δεν ισχύει και έστω ότι υπάρχει (u_0, v_1)−μονοπάτι με μήκος μικρότερο από $\ell(v_1)$. 'Ενα τέτοιο μονοπάτι θα περιέχει μια ή περισσότερες κορυφές που ανήκουν στο σύνολο $\overline{S} - \{v_1\}$. 'Εστω v_2 η πρώτη απ' αυτές τις κορυφές που συναντάμε σ' αυτό το μονοπάτι καθώς πηγαίνουμε από το u_0 στο v_1. Προφανώς τότε $\ell(v_2) < \ell(v_1)$, κάτι που δεν μπορεί να ισχύει διότι η v_1 είναι μια κορυφή με τον μικρότερο δείκτη.

b) 'Εστω πάλι $S \subseteq V(G)$ και $u_0 \in S$. 'Εστω επίσης ότι για κάθε κορυφή u που ανήκει στο S, υπάρχει συντομότερο (u_0, u)−μονοπάτι στο G που περιέχει κορυφές που ανήκουν μόνον στο S. Εδώ υποθέτουμε ότι έχουμε προσδιορίσει τους δείκτες $\ell(v)$ ως προς S, για κάθε κορυφή v του $\overline{S}$.

'Εστω $v_1 \in \overline{S}$. Ορίζουμε $S' = S \cup \{v_1\}$ και $\overline{S'} = \overline{S} - \{v_1\}$. Εάν με $\ell'(v)$ συμβολίζουμε τον δείκτη κάθε κορυφής v του $\overline{S'}$, θα έχουμε ότι

$$\ell'(v) = \min\left[\ell(v), \ell(v_1) + w(v, v_1)\right]^{1} \qquad (3.1)$$

Ας αποδείξουμε την (3.1). Θεωρούμε ένα (u_0, v)−μονοπάτι, το οποίο εκτός από την v δεν περιέχει καμία άλλη κορυφή του $\overline{S'}$. Ας ονομάσουμε αυτό το μονοπάτι P και ας υποθέσουμε ότι είναι ελάχιστου μήκους ως προς την παραπάνω ιδιότητα. Διακρίνουμε τις εξής δύο περιπτώσεις.

Περίπτωση 1: Το P δεν περιέχει την v_1.
Σ' αυτή την περίπτωση είναι προφανές ότι

$$\ell'(v) = \ell(v).$$

Περίπτωση 2: Το P περιέχει την v_1.
Εάν το P πηγαίνει από την u_0 στην v_1 ακολουθούμενο από την ακμή $\{v_1, v\}$, τότε θα έχουμε

$$\ell'(v) = \ell(v_1) + w(v_1, v).$$

Τέλος, θα δείξουμε ότι δεν χρειάζεται να εξετάσουμε την περίπτωση εκείνη όπου το μονοπάτι πηγαίνει από την u_0 στην v_1, μετά σε κάποια κορυφή v_1' του S και μετά στην v. Πράγματι εάν ισχύει κάτι τέτοιο, από τον τρόπο κατασκευής του S, υπάρχει ελάχιστο μονοπάτι στο G, που συνδέει τις κορυφές u_0 και v_1', του οποίου όλες οι κορυφές ανήκουν στο S (δηλαδή δεν περιέχει την κορυφή v_1). Το τελευταίο αυτό μονοπάτι ακολουθούμενο από την ακμή $\{v_1', v\}$ μπορεί να αντικαταστήσει το P, οπότε η δεύτερη αυτή υποπερίπτωση ανάγεται στην πρώτη.

[1] Εάν δεν υπάρχει ακμή που να συνδέει τις v, v_1 τότε θεωρούμε ότι το $w(v, v_1)$ είναι ∞.

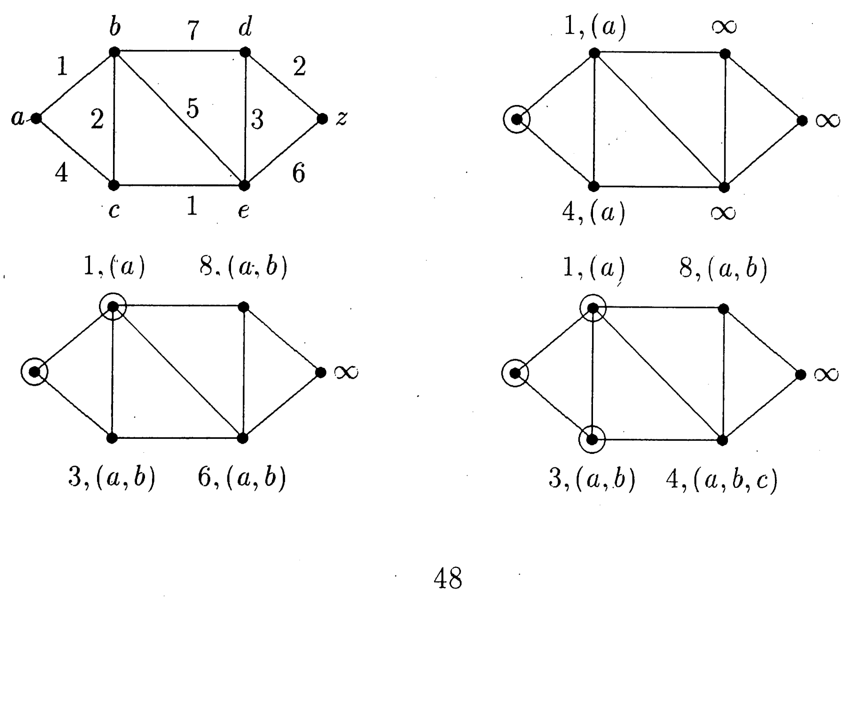
Ο αλγόριθμος που θα περιγράψουμε στην συνέχεια ανακαλύφθηκε από τον Dijkstra [1] το 1959 και ανεξάρτητα από τους Whiting, Hiller [4] το 1960. Ο αλγόριθμος αυτός στηρίζεται στις παρατηρήσεις που κάναμε προηγουμένως και εάν εφαρμοσθεί σ' ένα γράφημα G προσδιορίζει τις αποστάσεις μιας συγκεκριμένης κορυφής του u_0, προς όλες τις υπόλοιπες κορυφές του G.

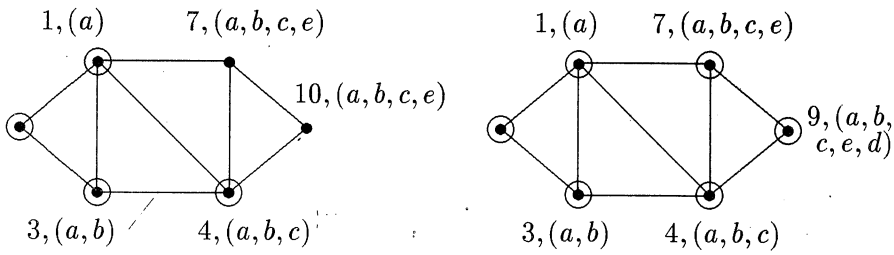
Αλγόριθμος του Dijkstra

1. Θέτουμε $\ell(u_0) = 0$, $\ell(v) = \infty$ για $v \neq u_0$, $S_0 = \{u_0\}$ και $i = 0$.
2. Για κάθε $v \in \overline{S}_i$, αντικαθιστούμε το $\ell(v)$ με το $\min\{\ell(v), \ell(u_i) + w(u_i, v)\}$. Υπολογίζουμε το $\min_{v \in \overline{S}_i}\{\ell(v)\}$ και έστω u_{i+1} η κορυφή στην οποία επιτυγχάνεται αυτό το minimum. Θέτουμε $S_{i+1} = S_i \cup \{u_{i+1}\}$.
3. Εάν $i = |V(G)| - 1$, ο αλγόριθμος διακόπτεται. Εάν $i < |V(G)| - 1$, αντικαθιστούμε το i με το $i + 1$ και πηγαίνουμε στο Βήμα 2.

Στο επόμενο παράδειγμα θα δούμε μια εφαρμογή του αλγόριθμου του Dijkstra. Σε κάθε βήμα ο αριθμός που αντιστοιχεί σε κάθε κορυφή αντιπροσωπεύει τον δείκτη της κορυφής, ενώ σε κάθε κορυφή που ανήκει στο σύνολο S την βάζουμε μέσα σ' ένα κύκλο.

Παράδειγμα 3.1:





Σχ. 3.1

Ο αλγόριθμος του Dijkstra προσδιορίζει μόνον τις αποστάσεις από την κορυφή u_0 προς όλες τις άλλες κορυφές και όχι τα συντομότερα μονοπάτια. Όμως όπως είδαμε και στο προηγούμενο παράδειγμα και τα συντομότερα μονοπάτια μπορούν να προσδιορισθούν εάν στην όλη διαδικασία ενσωματώσουμε την παρακολούθηση δημιουργίας των μονοπατιών στα οποία επιτυγχάνονται αυτές οι αποστάσεις. Στο παράδειγμα προηγουμένως προέκυψε ότι η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των κορυφών a και z ισούται με 9. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι η απόσταση αυτή επιτυγχάνεται στο μονοπάτι $abcedz$.

Τώρα η ένωση των παραπάνω συντομότερων μονοπατιών αποτελεί ένα επικαλυπτικό δέντρο T για το γράφημα G, το οποίο έχει την εξής ιδιότητα: για κάθε $v \in V(T)$, το ένα και μοναδικό $(u_0, v)-$μονοπάτι στο T είναι ένα συντομότερο $(u_0, v)-$μονοπάτι στο G.
(Αφήνουμε στον αναγνώστη την απόδειξη της αλήθειας της παραπάνω πρότασης.)

3.2. Εκκεντρικότητα κορυφών και κέντρο γραφήματος

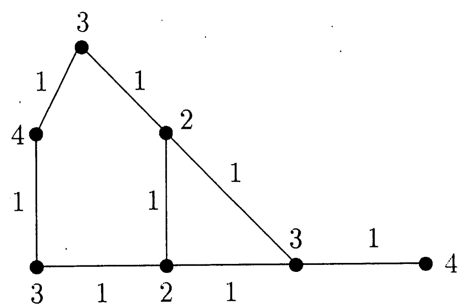
Έστω συνεκτικό γράφημα G και έστω συνάρτηση $w : E(G) \to I\!R^+$. Η **εκκεντρικότητα** $e(u)$ μιας κορυφής u στο G ορίζεται ως η απόστασή της από την πλέον απομακρυσμένη κορυφή του γραφήματος. Δηλαδή έχουμε ότι

$$e(u) = \max\{d_G(v, u) | v \in V(G)\}$$

Η ακτίνα και διάμετρος του G συμβολίζονται με $\operatorname{rad} G$, $\operatorname{diam} G$ αντίστοιχα και ορίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned}\operatorname{rad} G &= \min\{e(v)|v \in V(G)\} \\ \operatorname{diam} G &= \max\{e(v)|v \in V(G)\}\end{aligned}$$

Την διάμετρο του G μπορούμε να την θεωρήσουμε και ως την μεγαλύτερη απόσταση μεταξύ ζεύγους κορυφών στο G.



Σχ. 3.2

Στο Σχ. 3.2 έχουμε ένα γράφημα G στο οποίο κάθε ακμή έχει βάρος 1. Ο αριθμός που αντιστοιχούμε σε κάθε κορυφή του, ισούται με την εκκεντρικότητά τους. Για το G ισχύει ότι:

$$\operatorname{rad} G = 2 \ , \quad \operatorname{diam} G = 4.$$

Υπάρχουν προβλήματα, για την επίλυση των οποίων χρησιμοποιείται η έννοια της εκκεντρικότητας κορυφής. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε το εξής ερώτημα: «Που πρέπει να ιδρυθεί ένας σταθμός πυροσβεστικής ώστε να εξυπηρετεί μια συνοικία όσο το δυνατόν ταχύτερα σε περίπτωση ανάγκης;»

Το οδικό δίκτυο αυτής της συνοικίας μπορεί να θεωρηθεί ως ένα γράφημα G. Ορίζουμε συνάρτηση $w : E(G) \to \mathbb{R}^+$, η οποία σε κάθε ακμή e αντιστοιχεί ένα θετικό πραγματικό αριθμό $w(e)$ που ισούται με το μήκος του δρόμου που περιγράφεται απ' αυτή την ακμή. Το σημείο ίδρυσης του σταθμού της πυροσβεστικής αντιστοιχεί σε μια κορυφή του G, η οποία έχει όσο το δυνατόν μικρότερη εκκεντρικότητα.

Το επόμενο θεώρημα μας δίνει πληροφορίες για το πως σχετίζεται η έννοια της ακτίνας με την έννοια της διαμέτρου.

Θεώρημα 3.1: Για κάθε συνεκτικό γράφημα G,

$$\operatorname{rad} G \leq \operatorname{diam} G \leq 2\operatorname{rad} G.$$

Απόδειξη: Η σχέση $\operatorname{rad} G \leq \operatorname{diam} G$ απορέει αμέσως από τον τρόπο που ορίσαμε αυτές τις δύο έννοιες. Έστω τώρα $u, v \in V(G)$ όπου $d_G(u,v) = \operatorname{diam} G$. Θεωρούμε επίσης μια κορυφή t του G, με $e(t) = \operatorname{rad} G$. Έχουμε ότι

$$\operatorname{diam} G = d_G(u,v) \leq d_G(u,t) + d_G(t,v) \leq 2\operatorname{rad} G$$

Τώρα το **κέντρο** ενός συνεκτικού γραφήματος G συμβολίζεται με $C(G)$ και ορίζεται ως το υπογράφημα του G που παράγεται από όλες εκείνες τις κορυφές που έχουν εκκεντρικότητα ίση με την ακτίνα του. Για το γράφημα G του Σχ. 3.2 έχουμε ότι $C(G) \cong K_2$, όπου ως κορυφές του K_2, θεωρούμε τις δύο κορυφές του G που έχουν εκκεντρικότητα 2.

Το επόμενο θεώρημα ανακαλύφθηκε από τον Jordan [2] το 1869 και ανεξάρτητα από τον Sylvester [3] το 1873. Το αποτέλεσμα αυτό αναφέρεται στην δομή που θα έχει το κέντρο ενός δέντρου, στο οποίο κάθε ακμή έχει βάρος 1.

Θεώρημα 3.2: Έστω δέντρο T, στο οποίο κάθε ακμή έχει βάρος 1. Τότε είτε $C(T) \cong K_1$ ή $C(T) \cong K_2$.

Απόδειξη: Κατ' αρχήν εάν $T \cong K_1$ ή $T \cong K_2$, τότε προφανώς το θεώρημα ισχύει.

Έστω τώρα S, το σύνολο των κορυφών του T που έχουν βαθμό 1 και έστω $T' = T - S$. Προφανώς το T' είναι επίσης δέντρο. Εάν u είναι μια οποιαδήποτε κορυφή στο αρχικό δέντρο T, η μέγιστη απόστασή της από οποιαδήποτε άλλη κορυφή v, θα επιτυγχάνεται μόνον όταν η v έχει βαθμό 1. Άρα οι εκκεντρικότητες των κορυφών στο T' θα είναι κατά μία μικρότερες απ' αυτές που είχαμε στο T. Επομένως οι κορυφές που είχαν ελάχιστη εκκεντρικότητα στο T είναι ακριβώς οι ίδιες κορυφές που έχουν ελάχιστη εκκεντρικότητα τώρα στο T'. Με άλλα λόγια τα T, T' έχουν το ίδιο κέντρο. Εάν αυτή η διαδικασία διαγραφής κορυφών που έχουν βαθμό 1 συνεχισθεί, θα πάρουμε διαδοχικά δέντρα που έχουν το ίδιο κέντρο όπως και το αρχικό δέντρο από το οποίο ξεκινήσαμε. Επειδή το T ήταν ένα πεπερασμένο γράφημα, στο τέλος θα προκύψει είτε το δέντρο K_1 ή το δέντρο K_2, το οποίο θα έχει το ίδιο κέντρο με το T.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 3.2 μας δίνει ουσιαστικά έναν αλγόριθμο για την εύρεση του κέντρου ενός δέντρου.

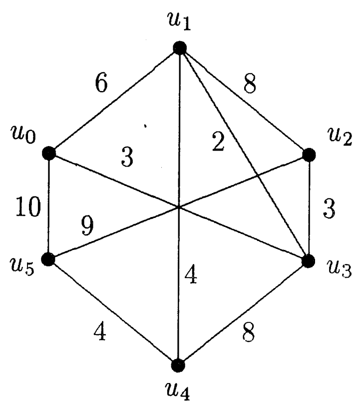
Αλγόριθμος για την εύρεση του κέντρου $C(T)$ ενός δέντρου T, στο οποίο κάθε ακμή έχει βάρος 1

1. Θέτουμε $T' = T$.
2. Εάν $T' \cong K_1$ ή $T' \cong K_2$, τότε $C(T) = T'$, διαφορετικά εκτελούμε το Βήμα 3.
3. Διαγράφουμε από το T' τις κορυφές που έχουν βαθμό 1. Έστω T'' το δέντρο που προκύπτει. Επαναλαμβάνουμε το Βήμα 2, χρησιμοποιώντας ως T' το T''.

Ασκήσεις 3

3.1: Ο αλγόριθμος που περιγράψαμε προηγουμένως προσδιορίζει το κέντρο ενός δέντρου, στο οποίο κάθε ακμή έχει βάρος 1. Εάν υπάρχουν και βάρη ακμών διάφορα του 1, αληθεύει ότι ο ίδιος αλγόριθμος θα μας προσδιορίσει πάλι το κέντρο του δέντρου;

3.2: Να χρησιμοποιηθεί ο αλγόριθμος του Dijkstra για τον προσδιορισμό των αποστάσεων της κορυφής u_0 απ' όλες τις υπόλοιπες κορυφές, στο γράφημα του Σχ. 3.3.



Σχ. 3.3

3.3: Για το γράφημα G του Σχ. 3.3, να βρεθούν

(a) η εκκεντρικότητα κάθε κορυφής

(b) η ακτίνα και η διάμετρος του G

(c) το κέντρο του G

3.4: Εάν G συνεκτικό γράφημα και $uv \in E(G)$, να αποδειχθεί ότι $|e(u) - e(v)| \leq 1$.

3.5: Έστω G συνεκτικό γράφημα με $\operatorname{rad} G = m$, $\operatorname{diam} G = n$ και έστω k ακέραιος όπου $m < k < n$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει κορυφή t στο G έτσι ώστε $e(t) = k$.

Αναφορές

1. Dijkstra E.W., A note on two problems in connexion with graphs. Numer. Math. 1 (1959), 269–271.
2. Jordan C., Sur les assemblages de lignes. J. Reine Angew. Math. 70 (1869), 185–190.
3. König D., Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzip, 1936, Reprinted Chelsea, N.York 1950.
4. Whiting P.D., Hillier J.A., A method for finding the shortest route through a road network. Operations Research Quart. 11 (1960), 37–40.

Κεφάλαιο 4

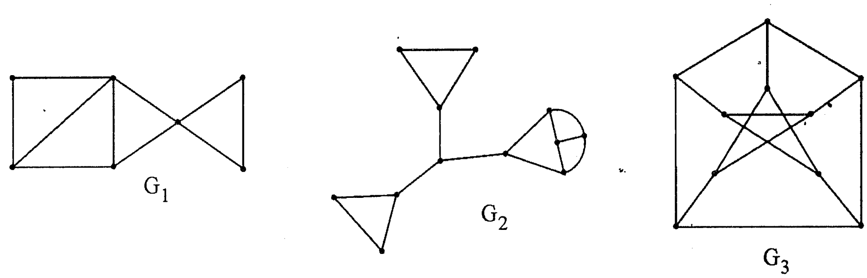
Συνεκτικότητα Γραφημάτων

4.1. Γενικά περί συνεκτικότητας

Έστω γράφημα G και έστω $S \subseteq V(G)$. Το S θα λέμε ότι αποτελεί **σύνολο–κορυφών–αποκοπής** για το G, εάν το γράφημα $G - S$ είναι μη–συνεκτικό. Τα μόνα γραφήματα που δεν έχουν σύνολα–κορυφών–αποκοπής είναι εκείνα τα οποία περιέχουν πλήρη γραφήματα ως επικαλυπτικά τους υπογραφήματα. Η **συνεκτικότητα–κορυφών** του G συμβολίζεται με $k(G)$ και ορίζεται ως εξής:
Εάν το G έχει τουλάχιστον δύο κορυφές που είναι μη–γειτονικές, το $\boldsymbol{k(G)}$ ισούται με τον ελάχιστο αριθμό στοιχείων που μπορεί να περιέχει ένα σύνολο–κορυφών–αποκοπής του. Διαφορετικά ορίζουμε ότι $k(G) = |V(G)| - 1$. (Προφανώς $k(G) = 0$ εάν το G είναι μη–συνεκτικό ή εάν $|V(G)| = 1$). Το G θα λέμε ότι είναι **$\boldsymbol{k}$–κορυφών–συνεκτικό** εάν $k(G) \geq k$.

Εάν S, $S' \subseteq V(G)$ με $E_G(S, S')$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των ακμών που έχουν ένα άκρο στο S και το άλλο στο S'. Εάν $K \subseteq E(G)$, θα λέμε ότι αυτό αποτελεί **σύνολο–ακμών–αποκοπής** για το G εάν είναι της μορφής $E_G(S, \overline{S})$ όπου S είναι ένα μη–κενό υποσύνολο του $V(G)$ και όπου $\overline{S} = V(G) - S$. Η **συνεκτικότητα–ακμών** του G συμβολίζεται με $\boldsymbol{\lambda(G)}$ και ορίζεται ως εξής: Εάν $|V(G)| \geq 2$ το $\lambda(G)$ ισούται με τον ελάχιστο αριθμό στοιχείων που μπορεί να περιέχει ένα σύνολο–ακμών–αποκοπής του. Διαφορετικά εάν $|V(G)| = 1$ τότε ορίζουμε $\lambda(G) = 0$. (Προφανώς $\lambda(G) = 0$ εάν $|V(G)| = 1$ ή εάν το G δεν είναι συνεκτικό). Το G ονομάζεται ***k*–ακμών–συνεκτικό** εάν $\lambda(G) \geq k$. (Προφανώς όλα τα συνεκτικά γραφήματα με τουλάχιστον δύο κορυφές είναι 1–ακμής–συνεκτικά).

Εάν K σύνολο–ακμών–αποκοπής στο G και $|K| = 1$, τότε το μοναδικό στοιχείο του K θα ονομάζεται **γέφυρα** του G.



Σχ. 4.1

Για τα γραφήματα του Σχ. 4.1 έχουμε ότι:

$k(G_1) = 1$	$k(G_2) = 1$	$k(G_3) = 3$
$\lambda(G_1) = 2$	$\lambda(G_2) = 1$	$\lambda(G_3) = 3$

<u>Θεώρημα 4.1 (Whitney [3] 1932):</u> Για κάθε γράφημα G,

$$k(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$

<u>Απόδειξη:</u> Εάν $|V(G)| = 1$, τότε $\lambda(G) = 0 \leq \delta(G)$. Τώρα εάν $|V(G)| \geq 2$, θεωρούμε κορυφή u στο G με $d_G(u) = \delta(G)$ και έστω X το σύνολο των ακμών που έχουν την u ως άκρο τους. Προφανώς το X αποτελεί ένα σύνολο–ακμών–αποκοπής για το G και άρα $\lambda(G) \leq |X| = \delta(G)$.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι $k(G) \leq \lambda(G)$ χρησιμοποιώντας την μέθοδο της επαγωγής ως προς $\lambda(G)$. Για $\lambda(G) = 0$, $|V(G)| = 1$ ή το G είναι μη–συνεκτικό γράφημα. Όμως και για τις δύο αυτές περιπτώσεις έχουμε ότι $k(G) = 0$. Άρα $k(G) \leq \lambda(G)$.

Έστω τώρα ότι $k(G) \leq \lambda(G)$ για όλα τα γραφήματα που έχουν συνεκτικότητα ακμών μικρότερη από r και έστω γράφημα G με $\lambda(G) = r \geq 1$. Θεωρούμε σύνολο–ακμών–αποκοπής X του G, όπου $|X| = r$. Εάν $e \in X$, ορίζουμε το γράφημα $G_1 = G - \{e\}$. Τότε έχουμε $\lambda(G_1) = r - 1$ και επομένως από την υπόθεση της επαγωγής $k(G_1) \leq \lambda(G_1) = r - 1$.

Έστω S σύνολο–κορυφών–αποκοπής του G_1 όπου $|S| = k(G_1)$. Τότε είτε το $G - S$ είναι μη–συνεκτικό, οπότε

$$k(G) \leq k(G_1) \leq r - 1 \tag{4.1}$$

ή διαφορετικά το $G - S$ είναι συνεκτικό και η ακμή e αποτελεί γέφυρα γι' αυτό.

Στην δεύτερη περίπτωση διακρίνουμε τις εξής δύο υποπεριπτώσεις:
$\underline{|V(G - S)| = 2}$: Τότε

$$k(G) \leq |V(G)| - 1 = |S| + 2 - 1 = k(G_1) + 1 \leq r \tag{4.2}$$

$\underline{|V(G - S)| \geq 3}$: Τότε
υπάρχει τουλάχιστον ένα άκρο u της e τέτοιο ώστε $\omega(G - |S \cup \{u\}|) \geq 2$, οπότε σ' αυτή την περίπτωση

$$k(G) \leq k(G_1) + 1 \leq r \tag{4.3}$$

διότι το σύνολο $S \cup \{u\}$ αποτελεί σύνολο–κορυφών–αποκοπής για το G.

Από τις (4.1), (4.2), (4.3) προκύπτει $k(G) \leq r$.
Άρα έχουμε αποδείξει $k(G) \leq r = \lambda(G)$.

Πριν αναφερθούμε σε άλλα θέματα που έχουν σχέση με την συνεκτικότητα ενός γραφήματος, θα πρέπει να ορίσουμε τις εξής έννοιες:

Μια οικογένεια (u, v)–μονοπατιών σ' ένα γράφημα G, θα λέμε ότι αποτελείται από **μονοπάτια εσωτερικών–κορυφών–ξένα** εάν δεν υπάρχει κορυφή στο G που να είναι εσωτερική σε περισσότερα από ένα μονοπάτια αυτής της οικογενείας.

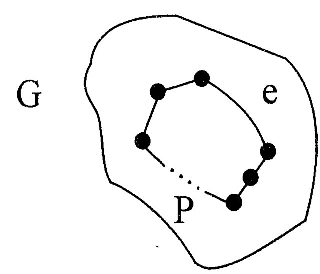
Επίσης η οικογένεια αυτή των (u, v)–μονοπατιών θα λέμε ότι αποτελείται από **μονοπάτια ακμών–ξένα** εάν δεν υπάρχει ακμή στο G που να ανήκει σε περισσότερα από ένα μέλη αυτής της οικογένειας.

Θεώρημα 4.2: Έστω γράφημα G με $|V(G)| \geq 3$. Το G είναι 2–κορυφών–συνεκτικό εάν και μόνον εάν $\forall u, v \in V(G)$, υπάρχουν τουλάχιστον δύο (u, v)–μονοπάτια στο G εσωτερικών–κορυφών–ξένα.

Απόδειξη: Εάν $\forall u, v \in V(G)$, υπάρχουν τουλάχιστον δύο (u, v)–μονοπάτια στο G εσωτερικών–κορυφών–ξένα, τότε είναι προφανές ότι δεν υπάρχει σύνολο–κορυφών–αποκοπής στο G που να έχει ένα μόνον στοιχείο. Άρα το G θα είναι 2–κορυφών–συνεκτικό.

Τώρα έστω ότι το G είναι 2–κορυφών–συνεκτικό.
Θα αποδείξουμε ότι κάθε ζεύγος κορυφών u και v στο G συνδέονται μεταξύ τους με τουλάχιστον 2 μονοπάτια εσωτερικών–κορυφών–ξένα, χρησιμοποιώντας επαγωγή ως προς την απόσταση $d_G(u, v)$.

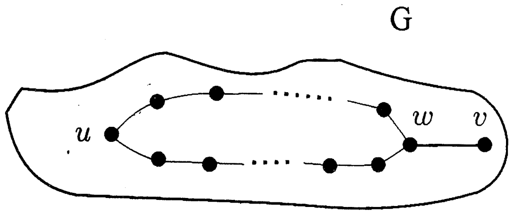
Έστω $d_G(u, v) = 1$. Επειδή $2 \leq k(G) \leq \lambda(G)$, η ακμή e που έχει για άκρα της τις κορυφές u, v δεν αποτελεί γέφυρα για το G. Άρα το γράφημα $G - \{e\}$ είναι συνεκτικό και επομένως υπάρχει μονοπάτι P που συνδέει τις κορυφές u και v στο $G - \{e\}$. Οπότε οι u και v συνδέονται με δύο μονοπάτια εσωτερικών–κορυφών–ξένα. Έστω τώρα ότι το Θεώρημα ισχύει για κάθε ζεύγος κορυφών οι οποίες απέχουν απόσταση μικρότερη από r και έστω $d_G(u, v) = r \geq 2$.



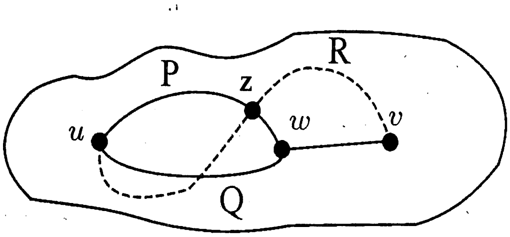
Σχ. 4.2

Θεωρούμε ένα συντομότερο (u, v)–μονοπάτι μήκους r, το οποίο έχει για προτελευταία κορυφή του, την w. Επειδή $d_G(u, v) = r$,

$d_G(u,w) = r-1$, άρα από την υπόθεση της επαγωγής, υπάρχουν δύο (u,w)–μονοπάτια εσωτερικών–κορυφών–ξένα. Ας τα ονομάσουμε P και Q. Το G είναι 2–κορυφών–συνεκτικό, άρα το $G_1 = G - \{w\}$ είναι συνεκτικό γράφημα. Επομένως υπάρχει (u,v)–μονοπάτι στο G_1. Ας ονομάσουμε αυτό το μονοπάτι R. 'Εστω z η τελευταία κορυφή του R που ανήκει στο $P \cup Q$. (Χωρίς να βλάψουμε την γενικότητα των επιχειρημάτων μας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η z ανήκει στο P). 'Ομως από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν στο G δύο (u,v)–μονοπάτια εσωτερικών–κορυφών–ξένα. Το πρώτο αποτελείται από το τμήμα του μονοπατιού P, από την u έως την z, και από το τμήμα του μονοπατιού R, από την z έως την v. Το δεύτερο αποτελείται από το μονοπάτι Q και την ακμή wv.



Σχ. 4.3



Σχ. 4.4

Από το προηγούμενο Θεώρημα προκύπτει αμέσως το εξής Πόρισμα.

Πόρισμα 4.3: Εάν ένα γράφημα G είναι 2–κορυφών–συνεκτικό τότε κάθε ζεύγος κορυφών του ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

Για την διατύπωση του επόμενου Θεωρήματος, θα χρειαστούμε τον εξής ορισμό: 'Εστω γράφημα G, u, v δύο κορυφές του και έστω $S \subseteq V(G) - \{u,v\}$. Θα λέμε ότι τα στοιχεία του S **χωρίζουν** τις κορυφές u και v εάν δεν υπάρχει (u,v)–μονοπάτι στο γράφημα $G - S$.

Θεώρημα 4.3 (Menger [2] 1927): 'Εστω γράφημα G και έστω u, v δύο μη–γειτονικές του κορυφές. Ο ελάχιστος αριθμός κορυφών που χωρίζουν τις u, v ισούται με το μέγιστο αριθμό των (u,v)–μονοπατιών τα οποία ανά δύο είναι εσωτερικών–κορυφών–ξένα.

Η απόδειξη του Θεωρήματος του Menger παραλείπεται. Το επόμενο Θεώρημα αποτελεί παραλλαγή του Θεωρήματος του Menger και εύκολα μπορεί να προκύψει απ' αυτό.

Θεώρημα 4.4 (Whitney [4] 1932): Ένα γράφημα G με $|V(G)| \geq k+1$ είναι $k-$κορυφών–συνεκτικό εάν και μόνον εάν κάθε ζεύγος διαφορετικών κορυφών του, συνδέονται μεταξύ τους με k μονοπάτια εσωτερικών–κορυφών–ξένα.

Απόδειξη: Έστω ότι το G είναι $k-$κορυφών–συνεκτικό γράφημα και έστω u, v δύο κορυφές του. Ας υποθέσουμε κατ' αρχήν ότι οι u, v είναι μη–γειτονικές κορυφές. Εάν με m συμβολίζουμε τον ελάχιστο αριθμό κορυφών που χωρίζουν τις u, v έχουμε ότι

$$k \leq k(G) \leq m.$$

Άρα από το Θεώρημα 4.3 (Menger), θα υπάρχουν τουλάχιστον k $(u,v)-$μονοπάτια στο G, τα οποία είναι εσωτερικών–κορυφών–ξένα.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι οι κορυφές u, v αποτελούν τα άκρα μιας ακμής e και έστω ότι υπάρχουν λιγότερα από k $(u,v)-$μονοπάτια, τα οποία είναι εσωτερικών–κορυφών–ξένα. Θεωρούμε το γράφημα $G' = G - \{e\}$. Στο γράφημα G' θα υπάρχουν το πολύ $k-2$ μονοπάτια όπως τα παραπάνω. Άρα από το Θεώρημα 4.3 υπάρχει σύνολο κορυφών $A \subseteq V(G) - \{u,v\}$ με $|A| \leq k-2$, το οποίο χωρίζει τις κορυφές u, v στο G'. Όμως $|V(G)| \geq k+1$. Άρα

$$|V(G') - A| = |V(G)| - |A| \geq 3$$

και επομένως στο σύνολο $V(G') - A$ υπάρχει κορυφή w διάφορη από τις u, v. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει $(u,w)-$μονοπάτι στο G' που δεν περιέχει καμία κορυφή του A. Αυτό είναι προφανές εάν οι κορυφές u, w είναι γειτονικές στο G. Εάν οι κορυφές u, w δεν είναι γειτονικές, όπως αποδείξαμε προηγουμένως υπάρχουν $(u,w)-$μονοπάτια στο G εσωτερικών–κορυφών–ξένα. Άρα θα υπάρχουν τουλάχιστον $(k-1)$ τέτοια μονοπάτια στο G'. Επειδή $|A| \leq k-2$, τουλάχιστον ένα απ' αυτά δεν περιέχει καμία κορυφή του A. Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει $(w, v)-$μονοπάτι στο G' που δεν περιέχει κανένα στοιχείο του A. Με άλλα λόγια υπάρχει $(u, v)-$μονοπάτι στο G' που δεν περιέχει κανένα στοιχείο του A, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι το A είναι σύνολο που χωρίζει τις κορυφές u και v στο G'.

Αντίστροφα, έστω ότι για κάθε $u, v \in V(G)$ υπάρχουν k $(u, v)-$μονοπάτια εσωτερικών–κορυφών–ξένα και έστω ότι το G δεν είναι $k-$κορυφών–συνεκτικό. Προφανώς επειδή $|V(G)| \geq k+1$, το G δεν περιέχει ως επικαλυπτικό του υπογράφημα κάποιο πλήρες γράφημα (διότι διαφορετικά το G θα ήταν $k-$κορυφών–συνεκτικό). Άρα από τον τρόπο που ορίσαμε την συνεκτικότητα–κορυφών υπάρχει σύνολο–κορυφών–αποκοπής A στο G με $|A| < k$. Το γράφημα $G - A = G'$ θα είναι μη–συνεκτικό και θα έχει τουλάχιστον δύο συνιστώσες. Επιλέγουμε κορυφές u, v που ανήκουν σε δύο διαφορετικές συνιστώσες του G'. Οι κορυφές u, v δεν είναι γειτονικές στο G. Άρα από το Θεώρημα του Menger υπάρχουν το πολύ $|A| < k$ $(u, v)-$μονοπάτια εσωτερικών–κορυφών–ξένα στο G, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την αρχική υπόθεση.

Το Θεώρημα 4.4 αποτελεί γενίκευση του Θεωρήματος 4.2.

Το επόμενο Θεώρημα, το οποίο απλώς θα διατυπώσουμε, αναφέρεται στην συνεκτικότητα–ακμών ενός γραφήματος και είναι ανάλογο του Θεωρήματος 4.4.

Θεώρημα 4.5: Ένα γράφημα G είναι $k-$ακμών–συνεκτικό εάν και μόνον εάν για κάθε ζεύγος διαφορετικών κορυφών του u, v υπάρχουν τουλάχιστον k $(u, v)-$μονοπάτια ακμών–ξένα.

4.2. Κατασκευή αξιόπιστων δικτύων με ελάχιστο αριθμό συνδέσεων

Με $\boldsymbol{f(m,n)}$ θα συμβολίζουμε τον ελάχιστο αριθμό ακμών που μπορεί να έχει ένα $m-$κορυφών–συνεκτικό γράφημα με n κορυφές.

Εάν G είναι ένα τέτοιο γράφημα, τότε

$$\begin{aligned} 2|E(G)| &= \sum_{x\in V(G)} d_G(x) \\ &\geq \delta(G)|V(G)| \\ &\geq k(G)|V(G)| \end{aligned}$$

από το Θεώρημα 4.1.

Άρα $2|E(G)| \geq m \cdot n$ και επομένως

$$f(m,n) \geq \left\lceil \frac{m \cdot n}{2} \right\rceil$$

Θα κατασκευάσουμε ένα $m-$κορυφών–συνεκτικό γράφημα (θα το συμβολίζουμε με $H_{m,n}$), με n κορυφές που έχει ακριβώς $\left\lceil \frac{mn}{2} \right\rceil$ ακμές. Η ύπαρξη ενός τέτοιου γραφήματος αποδεικνύει ότι $f(m,n) = \left\lceil \frac{mn}{2} \right\rceil$.

Ένα τέτοιο γράφημα μπορεί να θεωρηθεί ως ένα αξιόπιστο δίκτυο το οποίο περιέχει ελάχιστο αριθμό συνδέσεων. Ο βαθμός αξιοπιστίας του δικτύου εξαρτάται από τον ελάχιστο αριθμό κόμβων m που θα πρέπει να καταστραφούν έτσι ώστε να σταματήσουν οι υπόλοιποι κόμβοι να επικοινωνούν μεταξύ τους.

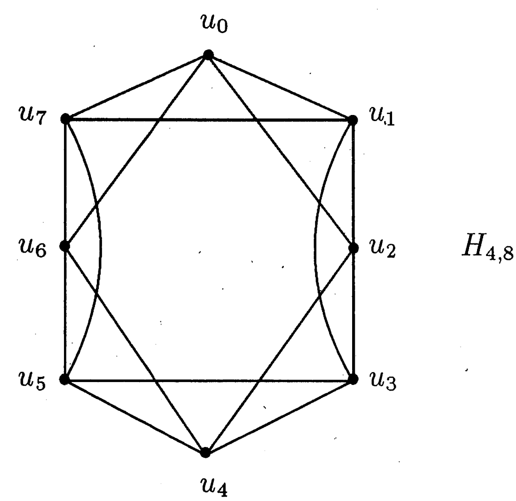
Προφανώς όσο πιο μεγάλο είναι το m, τόσο πιο αξιόπιστο είναι το δίκτυο.

Σχετικά με την κατασκευή ενός τέτοιου γραφήματος διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

Το m είναι άρτιος.

Έστω $m = 2r$. Το γράφημα $H_{2r,n}$ κατασκευάζεται ως εξής: Έχει για κορυφές του τις $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ και δύο κορυφές u_i, u_j είναι γειτονικές εάν $i - r \leq j \leq i + r$, όπου η πρόσθεση θεωρείται *modulo* n.

Παράδειγμα 4.1:

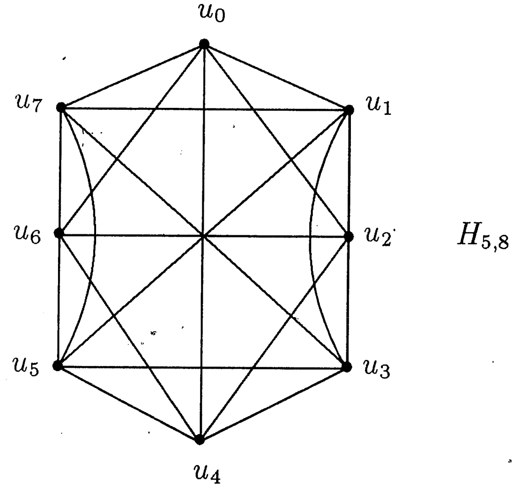


Σχ. 4.5

Το m είναι περιττός και το n είναι άρτιος.

Έστω $m = 2r + 1$. Το γράφημα $H_{2r+1,n}$ κατασκευάζεται ως εξής: Κατασκευάζουμε πρώτα το $H_{2r,n}$ και μετά συνδέουμε την κορυφή u_i με την κορυφή $u_{i+\frac{n}{2}}$ για $1 \leq i \leq \frac{n}{2}$.

Παράδειγμα 4.2:

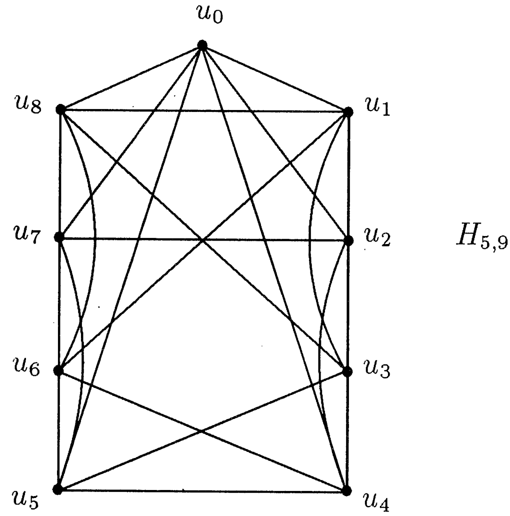


Σχ. 4.6

Τα m, n είναι περιττοί.

Έστω $m = 2r + 1$. Το γράφημα $H_{2r+1,n}$ κατασκευάζεται ως εξής: Κατασκευάζουμε πρώτα το $H_{2r,n}$ και μετά συνδέουμε την κορυφή u_0 με τις κορυφές $u_{\frac{n-1}{2}}$, $u_{\frac{n+1}{2}}$ και την κορυφή u_i με την κορυφή $u_{i+\frac{n+1}{2}}$ για $1 \leq i \leq \dfrac{n-1}{2}$.

Παράδειγμα 4.3:



Σχ. 4.7

Θεώρημα 4.6 (Harary [1] 1962): Το γράφημα $H_{m,n}$ είναι $m-$κορυφών–συνεκτικό.

Απόδειξη: 'Εστω ότι $m = 2r$. 'Εστω επίσης ότι υπάρχει σύνολο–κορυφών–αποκοπής S του $H_{m,n}$ όπου $|S| < 2r$. Υποθέτουμε ότι οι κορυφές u_i και u_j ανήκουν σε διαφορετικές συνιστώσες του γραφήματος $H_{2r,n} - S$. Θεωρούμε τα σύνολα

$$P = \{u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_j\}$$

$$Q = \{u_j, u_{j+1}, \ldots, u_{i-1}, u_i\}$$

(Και εδώ η πρόσθεση θεωρείται *modulo* n).

Επειδή $|S| < 2r$, χωρίς να βλάψουμε την γενικότητα των επιχειρημάτων μπορούμε να υποθέσουμε ότι $|P \cap S| < r$. Επομένως υπάρχει μια ακολουθία κορυφών που ανήκουν στο $P - S$, που αρχίζει με την u_i και τελειώνει με την u_j, έτσι ώστε εάν u_k, u_l διαδοχικές κορυφές σ' αυτή την ακολουθία $|\ell - k| \leq r$. 'Ομως μια τέτοια ακολουθία κορυφών αποτελεί ένα $(u_i, u_j)-$μονοπάτι στο γράφημα $H_{2r,n} - S$, το οποίο είναι άτοπο, διότι οι κορυφές u_i, u_j ανήκουν σε διαφορετικές συνιστώσες του $H_{2r,n} - S$.

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε το Θεώρημα αυτό για $m = 2r + 1$.

Ασκήσεις 4

4.1: Για κάθε απλό γράφημα G με $\delta(G) \geq |V(G)| - 2$, να αποδειχθεί ότι $k(G) = \delta(G)$.

4.2: Για κάθε απλό γράφημα G με $\delta(G) \geq \dfrac{|V(G)|}{2}$, να αποδειχθεί ότι $\lambda(G) = \delta(G)$.

4.3: Έστω G απλό 3–κανονικό γράφημα. Να αποδειχθεί ότι $k(G) = \lambda(G)$.

4.4: Έστω G απλό συνεκτικό 3–κανονικό γράφημα, στο οποίο κάθε ακμή αποτελεί γέφυρα γι' αυτό. Να αποδειχθεί ότι $V(G) \geq 10$.

4.5: Έστω γράφημα G 2–κορυφών–συνεκτικό. Να αποδειχθεί ότι κάθε ζεύγος ακμών του ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

4.6: Έστω γράφημα G, το οποίο είναι 2–κορυφών–συνεκτικό, για το οποίο ισχύει το εξής: $k(G - \{e\}) < k(G)$ για κάθε ακμή e του G. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει κορυφή στο G με βαθμό 2.

4.7: Έστω απλό γράφημα G με $\delta(G) \geq \dfrac{|V(G)| + k - 2}{2}$. Να αποδειχθεί ότι το G είναι $k-$κορυφών–συνεκτικό.

Αναφορές

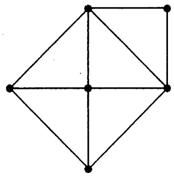
1. Harary, F., The maximum connectivity of a graph, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 48, 1142–46, 1962.
2. Menger, K., Zur allgemeinen Kurventheorie, Fund. Math. 10, 95–115, 1927.
3. Whitney, H., Congruent graphs and the connectivity of graphs, Amer. J. Math. 54, 150–168, 1932.
4. Whitney, H., Non–seperable and planar graphs, Trans. Amer. Math. Soc. 34, 339–362, 1932.

Κεφάλαιο 5

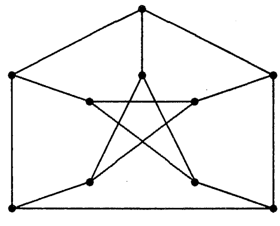
Κύκλοι του Hamilton

5.1. Hamiltonian Γραφήματα

'Ενα μονοπάτι το οποίο περιέχει όλες τις κορυφές ενός γραφήματος G ονομάζεται **μονοπάτι του Hamilton** στο G. Παρόμοια ένας κύκλος, ο οποίος περιέχει όλες τις κορυφές του G ονομάζεται **κύκλος του Hamilton** στο G. 'Ενα γράφημα που περιέχει κάποιο κύκλο του Hamilton ονομάζεται **Hamiltonian γράφημα**.



Σχ. 5.1



Σχ. 5.2

Το γράφημα του Σχ. 5.1 είναι Hamiltonian, ενώ το γράφημα του Σχ. 5.2 δεν είναι Hamiltonian, αλλά περιέχει μονοπάτι του Hamilton.

Το επόμενο Θεώρημα μας δίνει μια ικανή συνθήκη για να είναι ένα απλό γράφημα Hamiltonian.

Θεώρημα 5.1: (Dirac [4] 1952). Έστω G απλό γράφημα με $\delta(G) \geq \frac{|V(G)|}{2}$ και $|V(G)| \geq 3$. Το γράφημα G είναι Hamiltonian.

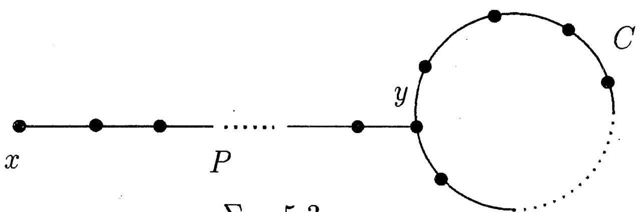
Θα παρουσιάσουμε 3 διαφορετικές αποδείξεις του παραπάνω Θεωρήματος. Πριν να κάνουμε κάτι τέτοιο θα αναφερθούμε σε κάποιο Λήμμα και κάποιους βασικούς ορισμούς, τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε σ' αυτά που θα ακολουθήσουν.

Έστω C κύκλος στο γράφημα G, $u, v \in V(C)$ και έστω $(u, v)-$μονοπάτι που αποτελεί τμήμα του C. Δίνουμε στον C ένα συγκεκριμένο προσανατολισμό. Εάν το $(u, v)-$μονοπάτι έχει την ίδια κατεύθυνση με τον C θα το συμβολίζουμε με $\boldsymbol{C[u, v]}$, ενώ εάν έχει αντίθετη κατεύθυνση θα το συμβολίζουμε με $\overleftarrow{\boldsymbol{C}}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$.

Αντίστοιχους συμβολισμούς θα χρησιμοποιήσουμε για τμήματα μονοπατιού, στο οποίο έχουμε δώσει επίσης κάποιο προσανατολισμό.

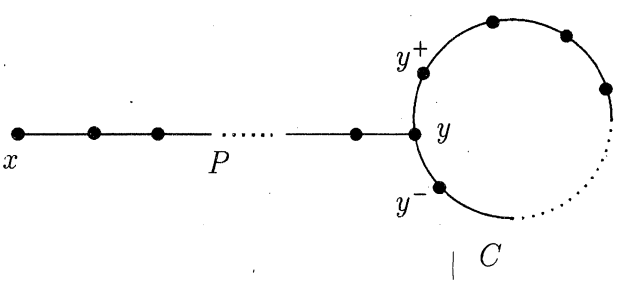
Έστω κύκλος C σ' ένα γράφημα G, στον οποίο έχουμε δώσει έναν προσανατολισμό και έστω x κορυφή του C. Με $\boldsymbol{x^-}$ θα συμβολίζουμε την κορυφή που προηγείται της x στον C, ενώ με $\boldsymbol{x^+}$ θα συμβολίζουμε την κορυφή που ακολουθεί την x. Ο παραπάνω συμβολισμός επεκτείνεται και σε σύνολα. Έτσι έχουμε $\boldsymbol{S^- = \{x^- | x \in S\}}$ και $\boldsymbol{S^+ = \{x^+ | x \in S\}}$.

Έστω κύκλος C και μονοπάτι P στο γράφημα G που συνδέει δύο κορυφές x και y. Εάν $V(C) \cap V(P) = \{y\}$ τότε το γράφημα $C \cup P$ ονομάζεται $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})-$**λάσο** του G (βλέπε Σχ. 5.3).



Σχ. 5.3

Λήμμα 5.2: Έστω γράφημα G και έστω $C \cup P$ ένα (x, y)–λάσο του, όπου $|V(P)| = m + 1$ και $|V(C)| = \ell$. Εάν δώσουμε στον C έναν προσανατολισμό, τότε το G περιέχει το (x, y^-)–μονοπάτι $P\,C\,[y, y^-]$ και το (x, y^+)–μονοπάτι $P\,\overleftarrow{C}\,[y, y^+]$, τα οποία είναι μήκους $m + l - 1$. Επίσης εάν ο C είναι κύκλος μέγιστου μήκους στο G και $|V(P)| \geq 2$, τότε η x δεν μπορεί να είναι γειτονική με την y^+ αλλά ούτε και με την y^- στο G.



Σχ. 5.4

Απόδειξη: Προφανής αν λάβουμε υπόψη μας το Σχ. 5.4.

Η πρώτη από τις αποδείξεις που θα παρουσιάσουμε δόθηκε από τον Dirac.

1η απόδειξη του Θεωρήματος 5.1:

Έστω C κύκλος μέγιστου μήκους στο G με μήκος ℓ. Από την άσκηση 1.9 έχουμε ότι $\ell \geq \delta(G) + 1$. Εάν ο C είναι κύκλος του Hamilton στο G, τότε έχουμε τελειώσει. Επομένως μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$V(G) - V(C) \neq \emptyset$. Επιλέγουμε ένα υπογράφημα του G, της μορφής $C \cup P$ που είναι (x, y)–λάσο και όπου το P είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερο. Ας υποθέσουμε ότι το μήκος του P είναι m. Τότε

$$\delta(G) \geq |V(G)| - \delta(G) > |V(G)| - \ell = |V(G - C)|$$

Αυτό όμως σημαίνει ότι κάθε κορυφή που ανήκει στο σύνολο $V(G) - V(C)$ είναι γειτονική με τουλάχιστον μια κορυφή του C και επομένως $m \geq 1$ δηλαδή $|V(P)| \geq 2$. Επίσης εάν μια κορυφή του $C - \{y\}$ απέχει από την y κατά μήκος του C απόσταση m ή λιγότερο δεν μπορεί να είναι γειτονική με την x. Αυτές οι κορυφές είναι $2m$ τον αριθμό. Τώρα από τις υπόλοιπες $\ell - 2m$ κορυφές του C, δεν μπορούμε να έχουμε δύο γειτονικές προς την x. Αν λάβουμε όλα αυτά υπ' όψη μας και το γεγονός ότι η x δεν μπορεί να είναι γειτονική με κορυφή που ανήκει στο $V(G) - (V(C) \cup V(P))$, επειδή το P ήταν όσο το δυνατόν μεγαλύτερο, έχουμε ότι:

$$d_G(x) \leq m + \frac{\ell - 2m}{2} = \frac{\ell}{2} < \frac{|V(G)|}{2} \leq \delta(G)$$

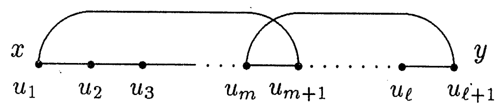
το οποίο είναι άτοπο.

Η δεύτερη από τις αποδείξεις που θα παρουσιάσουμε δόθηκε από τον Newmann [5] 1958.

2η απόδειξη του Θεωρήματος 5.1:

Έστω P μονοπάτι μέγιστου μήκους στο G, με μήκος ℓ. Θα αποδείξουμε ότι το G περιέχει κύκλο μήκους $\ell + 1$. Ας υποθέσουμε ότι x και y είναι τα άκρα του P. Εάν οι κορυφές x και y είναι γειτονικές, τότε προφανώς ισχύει αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε. Ας υποθέσουμε επομένως ότι οι x και y δεν είναι γειτονικές. Επειδή το P είναι μονοπάτι μέγιστου μήκους, όλες οι κορυφές του G που είναι γειτονικές προς την x ή την y αναγκαστικά θα ανήκουν στο P. Εάν $P = u_1 u_2 \ldots u_{\ell+1}$ (όπου προφανώς $u_1 = x$ και $u_{\ell+1} = y$), ορίζουμε $X = \{u_i | u_1$ γειτονική προς την $u_{i+1}\}$, $Y = \{u_i | u_i$ γειτονική προς την $u_{\ell+1}\}$.

Θα αποδείξουμε ότι $X \cap Y \neq \emptyset$. Επειδή $\delta(G) \geq \frac{|V(G)|}{2}$, $|X| + |Y| = d_G(u_1) + d_G(u_{\ell+1}) \geq 2\delta(G) \geq |V(G)|$ και επειδή $y \notin X \cup Y$, $|X \cup Y| \leq \ell \leq |V(G)| - 1$. Επομένως $|X \cap Y| = |X| + |Y| - |X \cup Y| \geq 1$. Έστω $u_m \in X \cap Y$.



Σχ. 5.5

Τότε ο κύκλος $C = P[x, u_m]u_m y \overleftarrow{P}[y, u_{m+1}]u_{m+1}x$ έχει μήκος $\ell + 1$.

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε ότι ο C είναι κύκλος του Hamilton στο G. Εάν ο C δεν είναι κύκλος του Hamilton τότε υπάρχει υπογράφημα στο G, της μορφής $C \cup Q$ το οποίο αποτελεί λάσο στο G, όπου Q μονοπάτι μήκους k με $k \geq 1$. Τότε σύμφωνα με το Λήμμα 5.2 υπάρχει στο G μονοπάτι μήκους $\ell + 1 + k - 1 = \ell + k$, το οποίο είναι άτοπο, διότι το P που είναι μονοπάτι μέγιστου μήκους, έχει μήκος ℓ.

Παρατήρηση:

Στην προηγούμενη απόδειξη δεν χρησιμοποιήσαμε πλήρως την υπόθεση ότι $\delta(G) \geq \frac{|V(G)|}{2}$, αλλά την εξής ασθενέστερη συνθήκη: για κάθε ζεύγος μη-γειτονικών κορυφών x και y, $d_G(x) + d_G(y) \geq |V(G)|$. Επομένως έχουμε αποδείξει το εξής ισχυρότερο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 5.3:

Έστω G απλό γράφημα με $|V(G)| \geq 3$. Εάν για κάθε ζεύγος μη-γειτονικών κορυφών x και y,

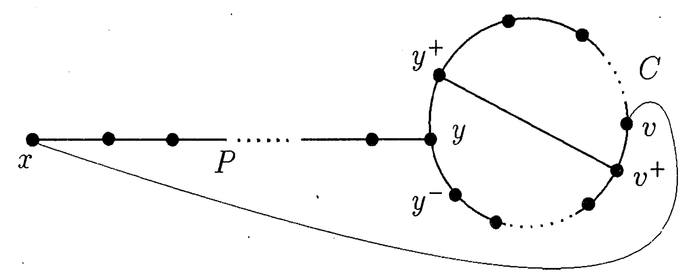
$$d_G(x) + d_G(y) \geq |V(G)|,$$

τότε το G είναι Hamiltonian.

Η επόμενη απόδειξη που θα παρουσιάσουμε δόθηκε από τον Bondy [1] 1981.

3^{η} απόδειξη του Θεωρήματος 5.1:

'Εστω κύκλος C στο G, μέγιστου μήκους. Εάν ο C είναι κύκλος του Hamilton, τότε έχουμε τελειώσει. Επομένως μπορούμε να υποθέσουμε ότι $V(G) - V(C) \neq \emptyset$ και άρα υπάρχει υπογράφημα $C \cup P$ του G που είναι $(x,y)-$λάσο. Ορίζουμε $V_1 = V(C)$, $V_2 = V(P) - \{y\}$, $V_3 = V(G) - V(C \cup P)$. Επίσης για κάθε $i = 1,2,3$, με $d_i(x)$ και $d_i(y^+)$ θα συμβολίζουμε τον αριθμό των γειτονικών κορυφών προς την x και y^+ αντίστοιχα που ανήκουν στο V_i.



Σχ. 5.6

Επειδή ο κύκλος C είναι μέγιστου μήκους έχουμε τα ακόλουθα:

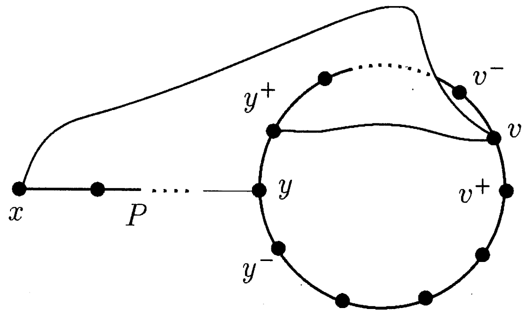
(a) Οι κορυφές x και y^+ δεν μπορεί να είναι γειτονικές με δύο διαδοχικές κορυφές v και v^+ αντίστοιχα του κύκλου C. (Εάν δεν ισχύει το παραπάνω, τότε ο κύκλος $xPy\overleftarrow{C}[y,v^+]v^+y^+C[y^+,v]$ vx είναι μεγαλύτερου μήκους απ' ότι ο C.)

(b) Η κορυφή y^+ δεν μπορεί να είναι γειτονική με κάποια κορυφή που ανήκει στο V_2.

(c) Οι κορυφές x και y^+ δεν μπορεί να είναι και οι δύο γειτονικές με μια κορυφή που ανήκει στο V_3.

Στην συνέχεια χρησιμοποιώντας την πρόταση (a), θα αποδείξουμε ότι

$$d_1(x) + d_1(y^+) \leq |V_1| \tag{5.1}$$



Σχ. 5.7

Εάν κάθε κορυφή που ανήκει στο V_1 είναι γειτονική με το πολύ μια από τις κορυφές x, y^+, τότε η παραπάνω σχέση προφανώς ισχύει. Έστω ότι υπάρχει κορυφή $v \in V_1$, η οποία είναι γειτονική τόσο με την x, όσο και με την y^+. Από την (a), η y^+ δεν μπορεί να είναι γειτονική προς την v^+.

Επίσης η x δεν μπορεί να είναι γειτονική με την v^+, διότι διαφορετικά θα είχαμε τον κύκλο $C[v^+, v]vxv^+$, ο οποίος θα έχει μεγαλύτερο μήκος από τον C. Άρα εάν υπάρχει κορυφή v στον C που είναι γειτονική τόσο με την x όσο και με την y^+, τότε η αμέσως επόμενή της στο C, δηλαδή v^+, δεν θα είναι γειτονική με καμία από τις δύο. Άρα και σ' αυτή την περίπτωση ισχύει η 5.1.

Τώρα από την (b) έχουμε ότι

$$d_2(y^+) = 0 \tag{5.2}$$

Επίσης από την (c) έχουμε ότι

$$d_3(x) + d_3(y^+) \leq |V_3| \tag{5.3}$$

Άρα από τις (5.1), (5.2), (5.3) και επειδή $d_2(x) \leq |V_2| - 1$, προκύπτει ότι

$$2\delta(G) \leq d_G(x) + d_G(y^+) = \sum_{i=1}^{3}(d_i(x) + d_i(y^+)) \leq |V_1| + |V_2| - 1 + |V_3|.$$

Επομένως $2\delta(G) \leq |V(G)| - 1$, το οποίο είναι άτοπο διότι $\delta(G) \geq \dfrac{|V(G)|}{2}$.

Από το Θεώρημα του Dirac (Θεώρημα 5.1), μπορεί να προκύψει το εξής πόρισμα.

Πόρισμα 5.3: 'Εστω G απλό γράφημα με $\delta(G) \geq \frac{|V(G)|-1}{2}$. Τότε το G περιέχει μονοπάτι του Hamilton.

Απόδειξη: Εάν $|V(G)| = 1$, τότε το πόρισμα προφανώς ισχύει. Εάν $|V(G)| \geq 2$, θεωρούμε το γράφημα $G' = G + \{u\}$. Το γράφημα G' προκύπτει από το G, προσθέτοντας μια νέα κορυφή u, την οποία συνδέουμε με κάθε κορυφή του G. Για το G' ισχύει ότι: $|V(G')| \geq 3$ και $\delta(G') \geq \frac{|V(G)|+1}{2}$. 'Αρα από το Θεώρημα του Dirac, το G' περιέχει κύκλο του Hamilton C. 'Ομως σε μια τέτοια περίπτωση το γράφημα $C - \{u\}$ αποτελεί μονοπάτι του Hamilton για το G.

Εάν εξετάσουμε με προσοχή την απόδειξη 2 του Θεωρήματος του Dirac εύκολα προκύπτει η εξής πρόταση.

Πόρισμα 5.4: 'Εστω G απλό γράφημα και u, v μη-γειτονικές κορυφές του, όπου

$$d_G(u) + d_G(v) \geq |V(G)| \tag{5.4}$$

Θεωρούμε το γράφημα $G' = G + \{u, v\}$, το οποίο προκύπτει από το G εάν προσθέσουμε μια ακμή που συνδέει τις μη-γειτονικές κορυφές u και v.
Το γράφημα G είναι Hamiltonian εάν και μόνον εάν το G' είναι επίσης Hamiltonian.

Απόδειξη: Εάν το γράφημα G είναι Hamiltonian τότε προφανώς και το $G' = G + \{uv\}$ θα είναι Hamiltonian. Αντίστροφα, έστω ότι το G' είναι Hamiltonian. Τότε το γράφημα G, θα περιέχει μονοπάτι του Hamilton, δηλαδή μονοπάτι μήκους $|V(G)| - 1$. 'Ενα τέτοιο μονοπάτι είναι προφανώς μονοπάτι μέγιστου μήκους και θα έχει για άκρα του τις κορυφές u, v. Στην απόδειξη 2 του Θεωρήματος του Dirac, μεταξύ άλλων αποδείξαμε και το εξής:

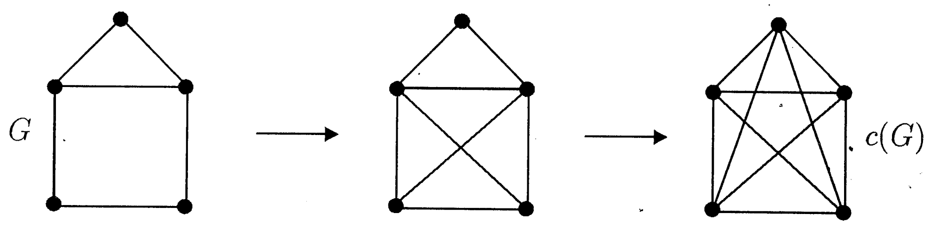
> «'Εστω P μονοπάτι μέγιστου μήκους σ' ένα γράφημα G, τα άκρα του οποίου ικανοποιούν την 5.4. Εάν το P έχει μήκος ℓ, τότε το G περιέχει κύκλο μήκους $\ell + 1$»

Εάν θέσουμε όπου ℓ το $|V(G)| - 1$, έχουμε αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε.

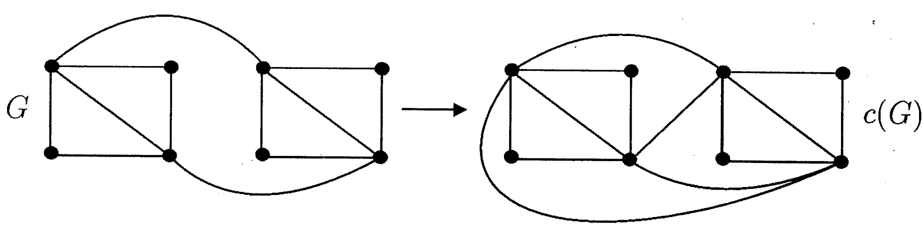
Το προηγούμενο Πόρισμα μας οδηγεί στον εξής ορισμό.

Το **κλείσιμο** ενός γραφήματος G συμβολίζεται με $\boldsymbol{c(G)}$ και ορίζεται ως το γράφημα που προκύπτει από το G, εάν αναδρομικώς συνδέουμε ζεύγη μη–γειτονικών κορυφών του, των οποίων το άθροισμα των βαθμών ισούται τουλάχιστον με $|V(G)|$.

Παράδειγμα 5.1:



Σχ. 5.8



Σχ. 5.9

Παρατήρηση: 'Οπως βλέπουμε και στο γράφημα του Σχ. 5.9, το $c(G)$ δεν είναι απαραίτητα πλήρες γράφημα.

Θεώρημα 5.5: 'Εστω γράφημα G και έστω G_1, G_2 κλεισίματα του G, τα οποία προέκυψαν απ' αυτό ακολουθώντας διαφορετικό τρόπο προσθήκης ακμών. Θα έχουμε ότι $G_1 = G_2$.
(Με άλλα λόγια η σειρά που προσθέτουμε ακμές για τον σχηματισμό του $c(G)$ δεν παίζει ρόλο)

Απόδειξη: 'Εστω ότι προκύπτουν δύο διαφορετικά γραφήματα G_1 και G_2 ως κλεισίματα του G. 'Εστω επίσης $e_1, e_2, \ldots, e_m$ οι ακμές που προσθέσαμε στο G, για να προκύψει το G_1 και $g_1, g_2, \ldots, g_n$ οι ακμές που προσθέσαμε για να προκύψει το G_2. Ας υποθέσουμε ότι $e_{\ell+1}$ είναι η πρώτη ακμή της ακολουθίας $e_1, e_2, \ldots, e_m$ που δεν είνα ακμή του G_2 και έστω ότι έχει για άκρα της, τις κορυφές u και v. Ορίζουμε το γράφημα $K = G + \{e_1, e_2, \ldots, e_\ell\}$, δηλαδή το γράφημα που προκύπτει από το G, εάν προσθέσουμε τις ακμές $e_1, e_2, \ldots, e_\ell$. Προφανώς

$$d_K(u) + d_K(v) \geq |V(G)|.$$

Επομένως επειδή το K είναι υπογράφημα του G_2,

$$d_{G_2}(u) + d_{G_2}(v) \geq |V(G)|.$$

'Ομως οι κορυφές u και v δεν είναι γειτονικές στο G_2, το οποίο είναι άτοπο διότι το G_2 είναι κλείσιμο του G. 'Αρα κάθε ακμή e_i ($i = 1, \ldots, m$) ανήκει στο G_2. Παρόμοια αποδεικνύουμε ότι κάθε ακμή g_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) ανήκει στο G_1. Επομένως $G_1 = G_2$.

Το επόμενο Θεώρημα, που διατυπώθηκε για πρώτη φορά από τον Bondy και τον Chvátal [2] 1976, προκύπτει αμέσως εάν εφαρμόσουμε επανειλλημένα το Πόρισμα 5.4.

Θεώρημα 5.6: 'Ενα απλό γράφημα G είναι Hamiltonian εάν και μόνον εάν το $c(G)$ είναι Hamiltonian.

Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο Θεώρημα και λαμβάνοντας υπ' όψη ότι κάθε πλήρες γράφημα με τουλάχιστον 3 κορυφές είναι Hamiltonian, προκύπτει το εξής πόρισμα.

Πόρισμα 5.7: 'Εστω G απλό γράφημα με $|V(G)| \geq 3$. Εάν το γράφημα $c(G)$ είναι πλήρες τότε το G είναι Hamiltonian.

Παρατήρηση: Εάν σ' ένα γράφημα G, $\delta(G) \geq \dfrac{|V(G)|}{2}$ είναι προφανές ότι το $c(G)$ είναι πλήρες γράφημα. 'Αρα χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 5.7, προκύπτει αμέσως το Θεώρημα του Dirac.

Το επόμενο Θεώρημα που αποδείχθηκε από τον Chvátal [3] 1972, αποτελεί γενίκευση του Θεωρήματος του Dirac και μπορεί να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας και πάλι το Πόρισμα 5.7.

Θεώρημα 5.8: Έστω G απλό γράφημα και έστω $(d_1, d_2, \ldots, d_\nu)$ η ακολουθία των βαθμών των κορυφών του, όπου $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_\nu$ και όπου $\nu \geq 3$. Εάν δεν υπάρχει ακέραιος m μικρότερος του $\frac{\nu}{2}$ για τον οποίο $d_m \leq m$ και $d_{\nu-m} < \nu - m$, τότε το G είναι Hamiltonian.
(Με άλλα λόγια εάν για το $m < \frac{\nu}{2}$, $d_m > m$ ή $d_{\nu-m} \geq \nu - m$, τότε το G είναι Hamiltonian)

Απόδειξη: Έστω γράφημα G, το οποίο ικανοποιεί την υπόθεση του Θεωρήματος. Εάν αποδείξουμε ότι το $c(G)$ είναι πλήρες τότε από το Πόρισμα 5.7, θα έχουμε αποδείξει ότι το G είναι Hamiltonian. Για κάθε $u \in V(G)$, με $d^*(u)$ θα συμβολίζουμε το βαθμό της κορυφής u στο $c(G)$.

Ας υποθέσουμε ότι το $c(G)$ δεν είναι πλήρες γράφημα και έστω u, v δύο μη-γειτονικές κορυφές του όπου το $d^*(u) + d^*(v)$ είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερο. Ας υποθέσουμε επίσης ότι

$$r = d^*(u) \leq d^*(v) \tag{5.5}$$

Επειδή οι u, v είναι μη-γειτονικές στο $c(G)$,

$$d^*(u) + d^*(v) \leq |V(G)| - 1 \tag{5.6}$$

Από τις (5.5), (5.6) έχουμε

$$r = d^*(u) \leq \frac{|V(G)| - 1}{2} \tag{5.7}$$

και

$$d^*(v) \leq |V(G)| - 1 - r \tag{5.8}$$

Ορίζουμε τα εξής σύνολα:

X : σύνολο κορυφών που ανήκουν στο $V(G) - \{v\}$ και δεν είναι γειτονικές προς την v στο γράφημα $c(G)$.

Y : σύνολο κορυφών που ανήκουν στο $V(G) - \{u\}$ και δεν είναι γειτονικές προς την u στο $c(G)$.

Προφανώς έχουμε,

$$\begin{aligned} |X| &= |V(G)| - 1 - d^*(v) \\ &\geq |V(G)| - 1 - (|V(G)| - 1 - r) \text{ από την } 5.8 \\ &= r \end{aligned}$$

και για κάθε $x \in X$, $d_G(x) \leq d^*(x) \leq d^*(u) = r$.

Επίσης

$$\begin{aligned} |Y| &= |V(G)| - 1 - d^*(u) \\ &= |V(G)| - 1 - r \end{aligned}$$

και για κάθε $y \in Y$, $d_G(y) \leq d^*(y) \leq d^*(v) \leq |V(G)| - 1 - r$.

Επομένως υπάρχουν τουλάχιστον r κορυφές στο G, βαθμού το πολύ r (τα στοιχεία του X) και $|V(G)| - r$ κορυφές, βαθμού το πολύ $|V(G)| - 1 - r$ (Τα στοιχεία του $Y \cup \{v\}$). Όμως σε μια τέτοια περίπτωση $d_r \leq r$ και $d_{|V(G)|-r} < |V(G)| - r$ όπου από την (5.7), $r < \dfrac{|V(G)|}{2}$. Αυτό όμως έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση του Θεωρήματος, άρα το γράφημα $c(G)$ είναι πλήρες και επομένως το G είναι Hamiltonian.

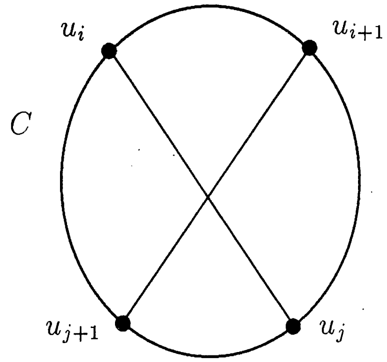
5.2. Το πρόβλημα του περιοδεύοντος εμπόρου

Το πρόβλημα του περιοδεύοντος εμπόρου έχει ως εξής: Ένας έμπορος θέλει να επισκεφθεί n πόλεις. Η διαδρομή που θα ακολουθήσει θα πρέπει να έχει τ' ακόλουθα χαρακτηριστικά: Ο έμπορος ξεκινά από την πόλη που έχει ως βάση του και αφού επισκεφθεί τις υπόλοιπες $n-1$ ακριβώς μια φορά, θα πρέπει να καταλήξει στην πόλη απ' όπου ξεκίνησε. Επιπλέον η διαδρομή θα πρέπει να έχει το μικρότερο δυνατόν μήκος.

Για την περιγραφή και την επίλυση του προβλήματος χρησιμοποιούμε ως μαθηματικό μοντέλο την έννοια του γραφήματος. Θεωρούμε ένα γράφημα G, του οποίου οι κορυφές αντιστοιχούν στις πόλεις, ενώ δύο κορυφές u, v είναι γειτονικές στο G εάν και μόνον εάν οι πόλεις που αντιστοιχούν σ' αυτές συνδέονται άμεσα μεταξύ τους. Επίσης ορίζουμε συνάρτηση $w : E(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$, όπου ο αριθμός $w(e)$ (το βάρος της ακμής e) εκφράζει την απόσταση, εάν ταξιδεύουμε άμεσα, μεταξύ των πόλεων που αντιστοιχούν στα άκρα της ακμής e. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι ο περιοδεύων έμπορος ουσιαστικά θέλει να βρει έναν κύκλο του Hamilton C στο G, για τον οποίο θα ισχύει ότι το $\sum_{e \in E(C)} w(e)$ είναι ελάχιστο.

Εμείς θα υποθέσουμε ότι το γράφημα G είναι πλήρες γράφημα. Σ' ένα τέτοιο γράφημα υπάρχει προφανώς κύκλος του Hamilton. Εμείς θέλουμε να βρούμε έναν με το μικρότερο δυνατόν συνολικό βάρος. Σε αντίθεση με άλλα προβλήματα βελτιστοποίησης δεν υπάρχει αποδοτική διαδικασία επίλυσης του παραπάνω προβλήματος. Θα περιοριστούμε στην περιγραφή μιας διαδικασίας που μας δίνει μια "σχετικώς καλή" λύση, αλλά όχι αναγκαστικά και βέλτιστη. Η διαδικασία αυτή στηρίζεται στην εξής στρατηγική: Ξεκινάμε από έναν κύκλο του Hamilton C στο G και τροποποιώντας τον προσπαθούμε να κατασκευάσουμε έναν άλλο μικρότερο συνολικού βάρους. Η διαδικασία που τροποποιείται ο C έχει ως εξής: 'Εστω $C = u_1u_2 \ldots u_nu_1$. Εάν $1 < i+1 < j < n$ θεωρούμε έναν νέο κύκλο C^* στο G, όπου $C^* = u_1u_2 \ldots\ldots u_iu_ju_{j-1} \ldots u_{i+1}u_{j+1}u_{j+2} \ldots u_nu_1$.

Δηλαδή ο C^* προκύπτει από τον C διαγράφοντας τις ακμές u_iu_{i+1}, u_ju_{j+1} και προσθέτοντας τις ακμές u_iu_j, $u_{i+1}u_{j+1}$. Τώρα εάν $w(u_iu_j) + w(u_{i+1}u_{j+1}) < w(u_iu_{i+1}) + w(u_ju_{j+1})$ ο C^* θα έχει μικρότερο συνολικό βάρος απ' ότι ο C.



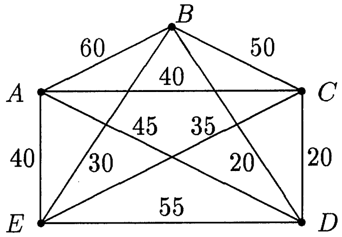
Σχ. 5.10

Εάν στηριχθούμε στην παραπάνω διαδικασία και την εφαρμόσουμε έναν αριθμό φορών, στο τέλος θα καταλήξουμε σ' έναν κύκλο του Hamilton C, που δεν είναι δυνατόν να "βελτιωθεί" περαιτέρω. Ο C ενδέχεται να μην είναι η βέλτιστη λύση. Θα είναι μια προσέγγιση αυτής, δηλαδή ένα πάνω φράγμα της. Τώρα μπορούμε να έχουμε μια ένδειξη για το πόσο καλή είναι η προσέγγιση αυτή, βρίσκοντας έναν αριθμό που αποτελεί κάτω φράγμα της βέλτιστης λύσης. Θα περιγράψουμε πως προκύπτει αυτό το κάτω φράγμα.

'Εστω κύκλος του Hamilton C στο G, με ελάχιστο συνολικό βάρος (δηλαδή έστω ότι ο C είναι βέλτιστη λύση στο πρόβλημα του περιοδεύοντος εμπόρου). Εάν $u \in V(C)$, το γράφημα $C - \{u\}$ είναι μονοπάτι του Hamilton στο $G - \{u\}$ και επομένως επικαλυπτικό δέντρο στο γράφημα αυτό. 'Εστω ακμές e_k, e_ℓ που έχουν ως άκρο τους, την κορυφή u με $w(e_k) + w(e_\ell)$ όσο το δυνατόν μικρότερο. Τότε

$$\sum_{e \in E(C)} w(e) \geq \sum_{e \in E(C-\{u\})} w(e) + w(e_k) + w(e_\ell) \geq (\text{συνολικό βάρος}$$
$$\text{βέλτιστου επικαλυπτικού δέντρου στο } G - \{u\}) + w(e_k) + w(e_\ell)$$

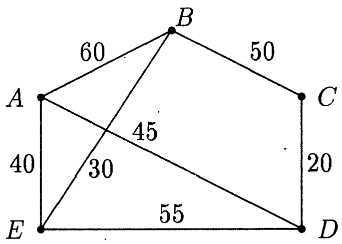
Εάν βρούμε ένα βέλτιστο επικαλυπτικό δέντρο στο $G - \{u\}$ χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Kruskal ή του Prim και στην συνέχεια το συνολικό του βάρος έχουμε ένα κάτω φράγμα της βέλτιστης λύσης, στο πρόβλημα του περιοδεύοντος εμπόρου. Ας εφαρμόσουμε, όσα έχουμε αναπτύξει μέχρι τώρα σ' ένα συγκεκριμένο παράδειγμα.



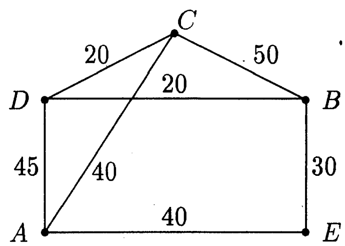
Σχ. 5.11

Θεωρούμε το γράφημα G του Σχ. 5.11, σε κάθε ακμή του οποίου έχουμε αντιστοιχίσει έναν πραγματικό αριθμό. Ξεκινάμε από τον κύκλο ABCDEA και προσπαθούμε να βρούμε έναν κύκλο του Hamilton με μικρότερο συνολικό βάρος. Ένας τέτοιος κύκλος είναι ο ADCBEA.

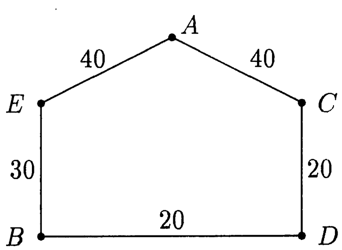
Στην συνέχεια, θα βρούμε έναν κύκλο του Hamilton μικρότερου συνολικού βάρους από τον προηγούμενο. Ένας τέτοιος κύκλος είναι ο ACDBEA. Με την διαδικασία που εφαρμόσαμε μέχρι τώρα, από τον κύκλο αυτό δεν μπορεί να προκύψει άλλος μικρότερου συνολικού βάρους.



Σχ. 5.12



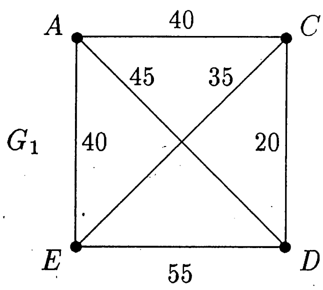
Σχ. 5.13



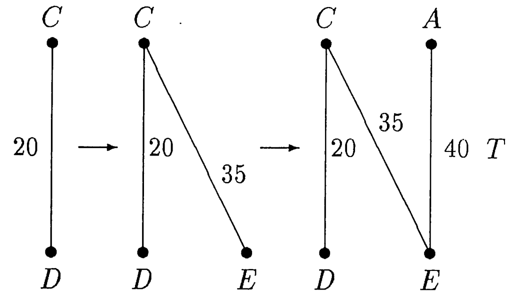
Σχ. 5.14

Επομένως μια προσέγγιση της βέλτιστης λύσης είναι ο κύκλος ACDBEA με συνολικό βάρος 150. Στη συνέχεια θα βρούμε ένα κάτω φράγμα για το συνολικό βάρος της βέλτιστης λύσης.

Θεωρούμε το γράφημα $G_1 = G - \{B\}$. Θα βρούμε ένα βέλτιστο επικαλυπτικό δέντρο στο γράφημα G_1, χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Kruskal.



Σχ. 5.15



Σχ. 5.16

Τό συνολικό βάρος του βέλτιστου επικαλυπτικού δέντρου T που έχει προκύψει είναι 95. Άρα ο αριθμός

$$\sum_{e \in E(T)} w(e) + w(BE) + w(BD) = 95 + 30 + 20 = 145$$

αποτελεί ένα κάτω φράγμα για το συνολικό βάρος της βέλτιστης λύσης, στο πρόβλημα που εξετάζουμε.

Επομένως, εάν C κύκλος του Hamilton στο G, που αποτελεί βέλτιστη λύση στο πρόβλημα του περιοδεύοντος εμπόρου

$$145 \leq \sum_{e \in E(C)} w(e) \leq 150.$$

Ασκήσεις 5

5.1: a) Έστω G Hamiltonian γράφημα. Για κάθε μη-κενό, γνήσιο υποσύνολο S του $V(G)$, να αποδειχθεί ότι $\omega(G-S) \leq |S|$.
b) Έστω γράφημα G, το οποίο έχει μονοπάτι του Hamilton. Για κάθε γνήσιο υποσύνολο S του $V(G)$, να αποδειχθεί ότι $\omega(G-S) \leq |S|+1$.

5.2: Έστω G διμερές Hamiltonian γράφημα με διαμερισμό (X, Y). Να αποδειχθεί ότι $|X| = |Y|$.

5.3: Έστω γράφημα G και έστω ότι για κάθε μη-κενό γνήσιο υποσύνολο S του $V(G)$, $\omega(G-S) \leq |S|$. Αληθεύει ότι το G είναι πάντα Hamiltonian;

5.4: Ένα γράφημα G ονομάζεται υπο-Hamiltonian εάν (i) Το G δεν είναι Hamiltonian, και (ii) για κάθε $u \in V(G)$, το γράφημα $G - \{u\}$ είναι Hamiltonian. Για κάθε υπο-Hamiltonian γράφημα G, να αποδειχθεί ότι $\delta(G) \geq 3$.

5.5: Ένα γράφημα G, θα ονομάζεται Hamiltonian-συνεκτικό εάν για κάθε u, $v \in V(G)$ υπάρχει (u, v)−μονοπάτι του Hamilton. Για κάθε Hamiltonian-συνεκτικό γράφημα G με $|V(G)| \geq 4$, να αποδειχθεί ότι $k(G) \geq 3$.

Αναφορές

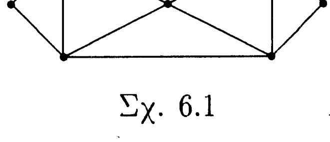
1. Bondy, J.A., Integrity in graph theory, in: The Theory and Applications of Graphs, eds G. Chartrand, Y. Alavi, D.L. Goldsmith, L. Lesniak-Foster and D.R. Lick (Wiley, New York) p.p. 117–125, 1981.
2. Bondy, J.A., and Chvátal V. A method in graph theory, Discrete Math. 15, 111–135, 1976.
3. Chvátal V., On Hamilton's ideals, J. Combin Theory B12, 163–168, 1972.
4. Dirac, G.A., Some theorems on abstract graphs, Proc. London Math. Soc. 2, 69–81, 1952.
5. Newman, D.J., A problem in graph theory, Amer. Math. Monthly 65, 611, 1958.

Κεφάλαιο 6

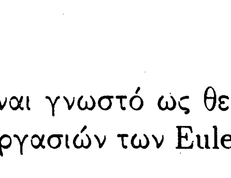
Ίχνη του Euler

6.1. Eulerian Γραφήματα

Ένα συνεκτικό γράφημα G ονομάζεται **Eulerian** εάν υπάρχει ένα κλειστό ίχνος στο G, το οποίο περιέχει όλες του τις ακμές. Ένα τέτοιο ίχνος ονομάζεται **ίχνος του Euler** (Πρώτος ο Euler εξέτασε την ύπαρξη τέτοιων ιχνών σ' ένα γράφημα). Τα παρακάτω γραφήματα είναι Eulerian.



Σχ. 6.1



Σχ. 6.2

Το επόμενο θεώρημα παρ'όλο που είναι γνωστό ως θεώρημα του Euler αποτελεί ουσιαστικά ανάμιξη των εργασιών των Euler [1], Hierholzer [4] και Veblen [6].

Θεώρημα 6.1: Για κάθε συνεκτικό γράφημα G, οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:
(1) Το G είναι Eulerian.
(2) Ο βαθμός κάθε κορυφής είναι άρτιος.
(3) Υπάρχει ένα σύνολο $B = \{C_1, C_2, \ldots, C_\ell\}$, τα στοιχεία του οποίου είναι κύκλοι του G, έτσι ώστε (i) $E(C_1) \cup \ldots \cup E(C_\ell) = E(G)$ και (ii) $E(C_i) \cap E(C_j) = \emptyset$ $\forall i, j = 1, 2, \ldots, \ell$ όπου $i \neq j$.

Απόδειξη: (1) $\Rightarrow$ (2).
Έστω T ίχνος του Euler στο G. Κάθε φορά που το T "περνάει" από μια κορυφή u, χρησιμοποιεί δύο διαφορετικές ακμές ή ένα βρόχο που έχει την u άκρο. Επειδή στο T εμφανίζονται όλες οι ακμές, η u πρέπει να έχει άρτιο βαθμό.
(2) $\Rightarrow$ (3). Επειδή το G είναι συνεκτικό και ο βαθμός κάθε κορυφής είναι άρτιος, $\delta(G) \geq 2$. Επομένως, από την άσκηση 1.8, το G θα περιέχει κάποιο κύκλο, έστω τον C_1. Μετά τη διαγραφή των ακμών του C_1 από το G, θα προκύψει ένα γράφημα G_1 κάθε κορυφή του οποίου θα έχει άρτιο βαθμό. Εάν το G_1 δεν έχει ακμές τότε προφανώς η (3) ισχύει. Εάν τώρα το G_1 έχει ακμές η εφαρμογή του ίδιου επιχειρήματος στο G_1 θα μας δώσει κάποιο κύκλο C_2, η διαγραφή των ακμών του οποίου, θα μας δώσει με την σειρά της ένα νέο γράφημα G_2 στο οποίο ο βαθμός κάθε κορυφής θα είναι άρτιος. Αν εφαρμόσουμε αυτή την διαδικασία μέχρι να προκύψει ένα γράφημα χωρίς ακμές, τότε θα έχουμε βρεί ένα σύνολο κύκλων του G που θα ικανοποιεί τις ιδιότητες (i) και (ii) της πρότασης (3).
(3) $\Rightarrow$ (1). Έστω $Z_1 \in B$. Εάν $E(Z_1) = E(G)$ τότε προφανώς το G είναι Eulerian. Εάν $E(Z_1) \neq E(G)$, τότε επειδή το G είναι συνεκτικό υπάρχει κύκλος $Z_2 \in B$ έτσι ώστε Z_1 και Z_2 έχουν τουλάχιστον μια κοινή κορυφή, έστω την u. Το ίχνος που έχει ως αρχή του την u και περιέχει διαδοχικά τους κύκλους Z_1 και Z_2 είναι ένα κλειστό ίχνος στο G, το οποίο περιέχει τις ακμές του Z_1 και Z_2. Εάν $E(Z_1) \cup E(Z_2) = E(G)$, τότε προφανώς το G είναι Eulerian. Εάν $E(Z_1) \cup E(Z_2) \neq E(G)$ τότε συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία μπορούμε να βρούμε τελικά ένα κλειστό ίχνος στο G, το οποίο περιέχει όλες τις ακμές του. Άρα το G είναι Eulerian.

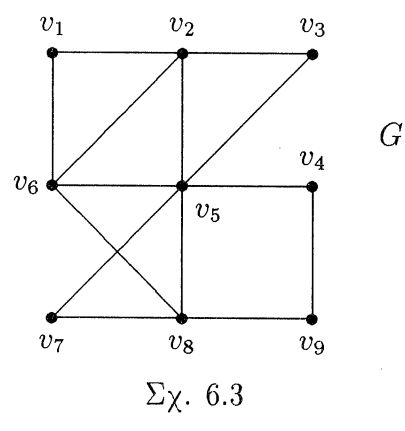
Η απόδειξη του Θεωρήματος 6.1 μας παρέχει έναν αλγόριθμο για την κατασκευή ενός ίχνους του Euler. Ο αλγόριθμος αυτός στηρίζεται σε μια διαδικασία *συγκόλλησης* ιχνών με το κάθε φορά τρέχον ίχνος, μέχρις ότου εξαντληθούν όλες οι ακμές του γραφήματος. Ο επόμενος αλγόριθμος που θα περιγράψουμε προσεγγίζει το θέμα κατασκευής του ίχνους του Euler σ' ένα γράφημα G πιο άμεσα, προσθέτοντας μια ακμή κάθε φορά.

Αλγόριθμος του Fleury [2]

1. Επιλέγουμε μια τυχαία κορυφή u_0 και θέτουμε $W_0 = u_0$.
2. Έστω ότι έχει κατασκευασθεί το ίχνος $W_i = u_0 e_1 u_1 \ldots e_i u_i$. Τότε επιλέγουμε την ακμή e_{i+1} από το σύνολο $E(G) - \{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$ έτσι ώστε (i) η κορυφή u_i να αποτελεί άκρο της ακμής e_{i+1} και (ii) εάν είναι δυνατόν $\omega(G_i) = \omega(G_i - \{e_{i+1}\})$ όπου $G_i = G - \{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$.
3. Ο αλγόριθμος σταματά όταν το Βήμα 2 δεν μπορεί να εκτελεσθεί.

Θεώρημα 6.2: Εάν το G είναι Eulerian τότε κάθε ίχνος που κατασκευάζεται από τον αλγόριθμο του Fleury είναι ίχνος του Euler.

Πριν αναφερθούμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 6.2, ας εξετάσουμε ένα παράδειγμα εφαρμογής του αλγορίθμου.
Παράδειγμα 6.1:



Σχ. 6.3

Το γράφημα του Σχ. 6.3 είναι Eulerian, διότι είναι συνεκτικό και ο βαθμός κάθε κορυφής του είναι άρτιος. Άρα εάν εφαρμοσθεί σ' αυτό ο αλγόριθμος του Fleury θα μας δώσει ένα Eulerian ίχνος του. Πράγματι έχουμε:

$$
\begin{aligned}
W_0 &= v_1\\
W_1 &= v_1v_2\\
W_2 &= v_1v_2v_6\\
W_3 &= v_1v_2v_6v_8\\
W_4 &= v_1v_2v_6v_8v_7\\
W_5 &= v_1v_2\ldots v_7v_5\\
W_6 &= v_1v_2\ldots v_7v_5v_4\\
W_7 &= v_1v_2\ldots v_5v_4v_9\\
W_8 &= v_1v_2\ldots v_4v_9v_8\\
W_9 &= v_1v_2\ldots v_9v_8v_5\\
W_{10} &= v_1v_2\ldots v_8v_5v_3\\
W_{11} &= v_1v_2\ldots v_5v_3v_2\\
W_{12} &= v_1v_2\ldots v_3v_2v_5\\
W_{13} &= v_1v_2\ldots v_2v_5v_6\\
\text{και } W_{14} &= v_1v_2\ldots v_5v_6v_1
\end{aligned}
$$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 6.2, θα χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω πρόταση, την απόδειξη της οποίας αφήνουμε στον αναγνώστη ως άσκηση.

Λήμμα 6.3: Έστω γράφημα G, στο οποίο όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό. Τότε $\forall\ e \in E(G)$,

$$\omega(G - \{e\}) = \omega(G).$$

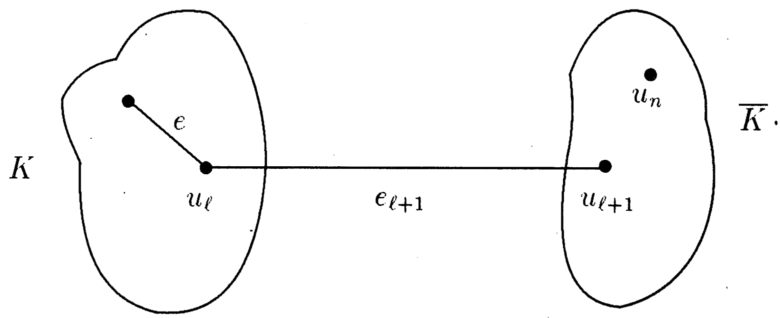
Απόδειξη του Θεωρήματος 6.2:

Έστω G Eulerian γράφημα και έστω ίχνος $W = u_0e_1u_1\ldots e_nu_n$ στο G, το οποίο έχει κατασκευασθεί χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Fleury. Επειδή το ίχνος W έχει για τελευταία του κορυφή την u_n, αυτό σημαίνει ότι ο βαθμός της u_n στο G_n ισούται με 0. Όμως αρχικά ο βαθμός της u_n στο G ήταν άρτιος, επομένως $u_0 = u_n$ και άρα το W είναι κλειστό ίχνος.

'Εστω ότι το W δεν είναι ίχνος του Euler στο G και έστω K το σύνολο των κορυφών που έχουν θετικούς βαθμούς στο γράφημα G_n. Ορίζουμε επίσης $\overline{K} = V(G) - K$. Προφανώς $u_n \in \overline{K}$. 'Εστω ℓ ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει: $u_\ell \in K$ και $u_{\ell+1} \in \overline{K}$. Επειδή το W σταματά σε κορυφή που ανήκει στο $\overline{K}$, αυτό σημαίνει ότι

$$\omega(G_{\ell+1}) = \omega(G_\ell) + 1$$

Δηλαδή η $e_{\ell+1}$ είναι η μόνη ακμή του G_ℓ που έχει ένα άκρο στο K και το άλλο στο $\overline{K}$.



Σχ. 6.4

'Εστω e μια οποιαδήποτε ακμή του G_ℓ που έχει για άκρο της, την κορυφή u_ℓ. Από το Βήμα 2 του αλγορίθμου του Fleury, θα πρέπει να ισχύει

$$\omega(G_\ell - \{e\}) = \omega(G_\ell) + 1$$

και επομένως

$$\omega(G_\ell[K] - \{e\}) = \omega(G_\ell[K]) + 1. \qquad (6.1)$$

'Ομως $G_\ell[K] = G_n[K]$ και άρα κάθε κορυφή στο $G_\ell[K]$, θα έχει άρτιο βαθμό. Επομένως για ένα τέτοιο γράφημα δεν μπορεί να ισχύει η 6.1, λόγω του Λήμματος 6.3.

6.2. Το Πρόβλημα του Κινέζου Ταχυδρόμου

Το παραπάνω πρόβλημα ονομάστηκε έτσι, διότι διατυπώθηκε για πρώτη φορά από τον Κινέζο μαθηματικό Kwan [5] το 1962. Πριν ασχοληθούμε μ' αυτό το πρόβλημα είναι απαραίτητο να αναφερθούμε σε κάποιους ορισμούς.

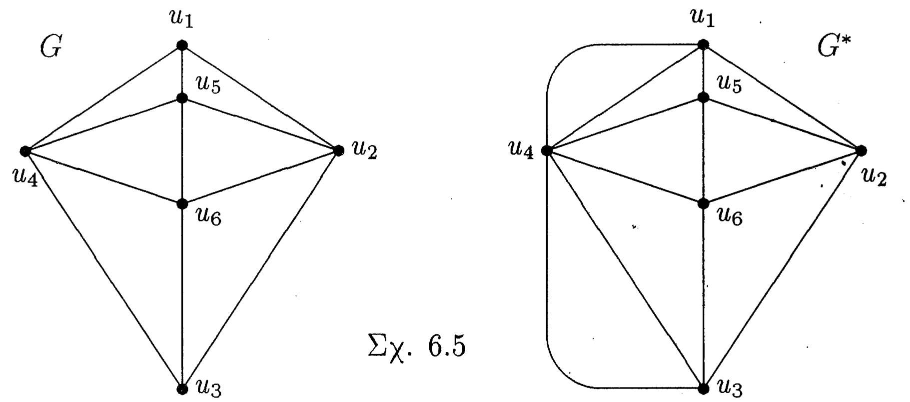
'Ενας κλειστός περίπατος σ' ένα γράφημα G ονομάζεται **κλειστός καλυπτικός περίπατος** εάν περιέχει κάθε ακμή του G τουλάχιστον μία φορά. 'Εναν κλειστό καλυπτικό περίπατο ελάχιστου μήκους θα τον ονομάζουμε **Eulerian περίπατο**. Το **μήκος** κάθε **Eulerian περιπάτου** στο G, θα το συμβολίζουμε με $\boldsymbol{e(G)}$. Εάν το G είναι Eulerian γράφημα τότε προφανώς $e(G) = |E(G)|$ και η έννοια του Eulerian περιπάτου στο G ταυτίζεται με την έννοια του ίχνους του Euler.

Η αρχική διατύπωση του προβλήματος του Κινέζου ταχυδρόμου έχει ως εξής: 'Ενας ταχυδρόμος ξεκινά από το ταχυδρομικό γραφείο στο οποίο ανήκει, για να διανείμει τις επιστολές στους κατοίκους της περιοχής του και στην συνέχεια να επιστρέψει στο γραφείο του. Στην διαδρομή που θα ακολουθήσει είναι υποχρεωμένος να περάσει από κάθε δρόμο τουλάχιστον μία φορά. Το ερώτημα το οποίο τίθεται είναι το εξής: Ποιά διαδρομή θα πρέπει να ακολουθήσει έτσι ώστε στο τέλος να έχει διανύσει την μικρότερη δυνατόν απόσταση;

Για να επιλύσουμε το παραπάνω πρόβλημα θεωρούμε ένα γράφημα G όπου οι ακμές του αντιστοιχούν στους δρόμους της περιοχής, ενώ οι κορυφές του στους κόμβους της.

Προφανώς η βέλτιστη διαδρομή που ψάχνει να βρει ο ταχυδρόμος αντιστοιχεί σ' έναν κλειστό καλυπτικό περίπατο στο G ελάχιστου μήκους, δηλαδή αντιστοιχεί σ' έναν Eulerian περίπατο. Εάν το γράφημα G είναι Eulerian, τότε ένα ίχνος του Euler αντιστοιχεί σε μια βέλτιστη διαδρομή του ταχυδρόμου. Τώρα έστω ότι το G δεν είναι Eulerian και έστω W κλειστός καλυπτικός περίπατός του. Θεωρούμε ένα ένο γράφημα G^*, το οποίο προκύπτει από το G εάν σε κάθε ακμή του, προσθέσουμε $k-1$ *αντίγραφά* της, όπου k ο αριθμός των φορών που ο W επισκέπτεται αυτή την ακμή. Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι ο κλειστός καλυπτικός περίπατος W στο G αντιστοιχεί σ' ένα ίχνος του Euler T στο G^*. Επίσης το αντίστροφο ισχύει. Εάν προσθέσουμε στο G *αντίγραφα* ακμών, έτσι ώστε το γράφημα G^* που θα προκύψει να είναι Eulerian, τότε κάθε ίχνος του Euler T του G^* αντιστοιχεί σ' ένα κλειστό καλυπτικό περίπατο W στο G, στον οποίο κάθε ακμή εμφανίζεται αριθμό φορών ίσο με την πολλαπλότητα που έχει αυτή στο G^*.

Παράδειγμα 6.2:



Σχ. 6.5

$$W = u_1u_5u_6u_3u_2u_6u_4u_5u_2u_1u_4u_3u_4u_1$$

Επομένως το πρόβλημα του Κινέζου ταχυδρόμου σ' αυτή την περίπτωση, επαναδιατυπώνεται ως εξής:

'Εχουμε ένα μη-Eulerian γράφημα G και θέλουμε απ' αυτό να κατασκευάσουμε ένα Eulerian γράφημα G^* κατόπιν προσθήκης *αντιγράφων* ακμών έτσι ώστε ο αριθμός $|E(G^*)| - |E(G)|$ να είναι όσο το δυνατόν μικρότερος. Προφανώς $e(G) = |E(G^*)|$ και $|E(G)| \leq e(G) \leq 2|E(G)|$, διότι εάν προσθέσουμε σε κάθε ακμή του G ένα *αντίγραφό* της, τότε προφανώς το γράφημα που θα προκύψει είναι Eulerian.

Θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε ένα θεώρημα, που μας δίνει το ακριβές μήκος ενός Eulerian περίπατου σ' ένα γράφημα G. Προηγουμένως όμως θα πρέπει να αναφερθούμε στους παρακάτω ορισμούς.

'Εστω G συνεκτικό γράφημα με q ακμές, στο οποίο υπάρχουν ακριβώς $2n$ κορυφές περιττού βαθμού. Ας ονομάσουμε K το σύνολο των κορυφών του G που έχουν περιττό βαθμό. Κάθε χωρισμός των στοιχείων του K σε n ζεύγη ανά δύο ξένα μεταξύ τους, θα μας δώσει ένα σύνολο $\Pi = \{\{u_{11}, u_{12}\}, \{u_{21}, u_{22}\}, \ldots, \{u_{n1}, u_{n2}\}\}$ το οποίο ονομάζεται **ζευγαρωτός-διαμερισμός** του K. Δοθέντος ενός τέτοιου ζευγαρωτού-διαμερισμού Π, ορίζουμε το άθροισμα

$$\boldsymbol{d(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} d_G(u_{i1}, u_{i2})}$$

Δηλαδή το $d(\Pi)$ εκφράζει το άθροισμα των αποστάσεων $d_G(u_{i1}, u_{i2})$ των ζευγών κορυφών που αποτελούν στοιχεία του Π. Εάν με $\boldsymbol{\Pi(G)}$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των ζευγαρωτών-διαμερισμών των *περιττών* κορυφών του G, ορίζουμε

$$\boldsymbol{m(G) = \min_{\Pi \in \Pi(G)} d(\Pi)}$$

Ας υποθέσουμε ότι Π^* είναι ο ζευγαρωτός-διαμερισμός στον οποίο επιτυγχάνεται αυτό το ελάχιστο. 'Εστω δηλαδή $\boldsymbol{d(\Pi^*) = m(G)}$. Για κάθε ζεύγος $\{u_{i1}, u_{i2}\}$ που ανήκει στο Π^*, θεωρούμε συντομότερο μονοπάτι P_i που συνδέει τις κορυφές u_{i1}, u_{i2}, δηλαδή θεωρούμε μονοπάτι μήκους $d_G(u_{i1}, u_{i2})$. Κάθε τέτοιο σύνολο n μονοπατιών $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ θα το ονομάζουμε $\boldsymbol{m}$**−σύνολο** του G. Επίσης με $|P_i|$ θα συμβολίζουμε το μήκος του μονοπατιού P_i, δηλαδή $\boldsymbol{|P_i| = d_G(u_{i1}, u_{i2})}$.

<u>Θεώρημα 6.4</u> [3]: Για κάθε απλό συνεκτικό γράφημα G με q ακμές, στο οποίο υπάρχουν ακριβώς $2n$ κορυφές περιττού βαθμού

$$e(G) = q + m(G)$$

<u>Απόδειξη:</u> Πρώτα απ' όλα θα αποδείξουμε ότι $e(G) \leq q + m(G)$. Δηλαδή θα αποδείξουμε ότι υπάρχει κλειστός καλυπτικός περίπατος στο G με μήκος $q + m(G)$. 'Εστω $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ m−σύνολο στο G, το οποίο αναφέρεται σε κάποιο ζευγαρωτό-διαμερισμό $\Pi^* = \{\{u_{11},$

$u_{12}\}, \{u_{21}, u_{22}\}, \ldots, \{u_{n1}, u_{n2}\}\}$ των *περιττών* κορυφών του G. Τότε

$$|P_1| + |P_2| + \ldots + |P_n| = d_G(u_{11}, u_{12}) + \ldots + d_G(u_{n1}, u_{n2}) = m(G).$$

Θα ονομάσουμε G^* το γράφημα που θα πορκύψει από το G εάν για κάθε μονοπάτι P_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ προσθέσουμε ένα *αντίγραφο* για κάθε ακμή του. Το G^* θα είναι ένα γράφημα, που περιέχει και πολλαπλές ακμές, στο οποίο δεν υπάρχουν κορυφές περιττού βαθμού. Δηλαδή το G^* θα είναι Eulerian. Με άλλα λόγια υπάρχει κλειστός καλυπτικός περίπατος W στο G^* μήκους $q + m(G)$, ο οποίος περιέχει κάθε ακμή του G^* ακριβώς μία φορά. 'Ομως αυτός ο περίπατος W στο G^* αντιστοιχεί σ' ένα κλειστό καλυπτικό περίπατο στο G επίσης μήκους $q + m(G)$. 'Αρα $e(G) \leq q + m(G)$.

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε ότι $e(G) \geq q + m(G)$. 'Εστω κλειστός καλυπτικός περίπατος W στο G, με μήκος r. Δοθέντος ενός τέτοιου περιπάτου W, ξεκινώντας από το G μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα γράφημα G^*, με τον τρόπο που αναφέραμε στην εισαγωγή αυτής της ενότητας. Δηλαδή το G^* θα προκύψει, εάν σε κάθε ακμή του G προσθέσουμε $k - 1$ *αντίγραφά* της, όπου k ο αριθμός των φορών που ο W επισκέπτεται αυτή την ακμή. Επειδή το G^* είναι Eulerian, κάθε κορυφή του θα έχει άρτιο βαθμό. Θεωρούμε το γράφημα $G^{**} = G^* - E(G)$. Στο G^{**} θα υπάρχουν ακριβώς $2n$ κορυφές με περιττό βαθμό και μάλιστα θα είναι εκείνες που είχαν περιττό βαθμό και στο G. 'Αρα από την 'Ασκηση 6.2 υπάρχουν n μη-κλειστά ίχνη στο G^{**}, τα οποία ανά δύο έχουν σύνολα ακμών ξένα μεταξύ τους και όπου η ένωση των συνόλων ακμών τους ισούται με $E(G^{**})$. Αυτά τα n ίχνη θα συνδέουν τις $2n$ κορυφές περιττού βαθμού κατά ζεύγη. Τα ζεύγη αυτά μπορούν να θεωρηθούν ως τα στοιχεία ενός ζευγαριού-διαμερισμού Π των *περιττών* κορυφών του G. 'Ομως $d(\Pi) \leq |E(G^{**})| = r - q$, και $d(\Pi) \geq m(G)$. 'Αρα $r - q \geq m(G)$ και επομένως $r \geq q + m(G)$. 'Ομως ο αρχικός περίπατος W από τον οποίο ξεκινήσαμε μπορεί να είναι ένας οποιοσδήποτε κλειστός καλυπτικός περίπατος στο G. Επομένως $e(G) \geq q + m(G)$.

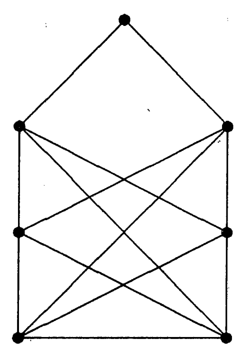
Το προηγούμενο θεώρημα μας παρέχει έναν αλγόριθμο για την εύρεση ενός Eulerian περίπατου.

Ασκήσεις 6

6.1: Να δοθεί παράδειγμα γραφήματος το οποίο είναι Eulerian και δεν είναι Hamiltonian.

6.2: Έστω G συνεκτικό γράφημα με ακριβώς $2k$ κορυφές περιττού βαθμού, όπου $k \geq 1$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν υποσύνολα $E_1, E_2, \ldots, E_k$ του $E(G)$ με $E_1 \cup \ldots \cup E_k = E(G)$ και $E_i \cap E_j = \emptyset$ για $i \neq j$, κάθε ένα από τα οποία αποτελεί το σύνολο ακμών ενός ανοικτού ίχνους. Τα ίχνη αυτά συνδέουν τις κορυφές περιττού βαθμού κατά ζεύγη.

6.3: Να προσδιορισθεί ίχος του Euler στο παρακάτω γράφημα, χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Fleury.



6.4: Να αποδειχθεί ότι ένα συνεκτικό γράφημα G είναι Eulerian εάν και μόνον εάν κάθε ακμή του G ανήκει σε περιττό αριθμό κύκλων.

Αναφορές

1. Euler L., Solutio Problematics ad Geometriam Situs Pertinentis. Comment. Acadamiae Sci. I. Petropolitanae, 9 (1736), 128–140.
2. Fleury [see Lucas, E., Recreations Mathematiques IV, Paris, 1921].
3. Goodman S., Hedetniemi S., Eulerian Walks in graphs, SIAM J. COMPUT. Vol. 2, No. 1, March 1973.
4. Hierholzer C., Ueber die Möglichkeit, einen Linienzug Ohne Wiederholung und Ohne Unterbrechnung zu Umfahren. Math. Ann., 6 (1873), 30–42.
5. Kwan M.K., Graphic Programming Using Odd or Even Points. Chinese Math., 1 (1962), 273–277.
6. Veblen O., An Application of Modular Equations in Analysis Situs. Ann. Math., (2), 14 (1912–13), 86–94.

Κεφάλαιο 7

Σχεδιασμοί και Κώδικες

7.1. Σχεδιασμοί

Ένας **σχεδιασμός** αποτελείται από γνήσια υποσύνολα (**blocks**) ενός συνόλου στοιχείων (**varieties ή ποικιλίες**), όπου:

(i) κάθε υποσύνολο (block) έχει τον ίδιο αριθμό στοιχείων, και

(ii) κάθε ζεύγος στοιχείων (ποικιλιών) ανήκει στον ίδιο αριθμό υποσυνόλων (blocks).

Παράδειγμα 7.1: $K = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
$\{1,2,3\}$, $\{4,5,6\}$, $\{7,8,9\}$, $\{1,4,7\}$, $\{1,5,9\}$, $\{2,5,8\}$
$\{3,6,9\}$, $\{2,6,7\}$, $\{3,4,8\}$, $\{1,6,8\}$, $\{2,4,9\}$, $\{3,5,7\}$.

Θεώρημα 7.1: Έστω σχεδιασμός με v ποικιλίες και b blocks, όπου κάθε block περιέχει k ποικιλίες και όπου κάθε ζεύγος ποικιλιών περιέχεται σε λ blocks. Τότε κάθε ποικιλία περιέχεται ακριβώς σε r blocks, όπου $r = \dfrac{bk}{v} = \dfrac{\lambda(v-1)}{k-1}$.

Απόδειξη: Έστω x μια οποιαδήποτε ποικιλία του σχεδιασμού και έστω ότι αυτή ανήκει σε r_x blocks. Θεωρούμε το σύνολο των ζευγών ποικιλιών, στα οποία το ένα στοιχείο είναι το x. Αθροίζουμε τον αριθμό των συμμετοχών αυτών των ζευγών στα blocks (με δύο διαφορετικούς τρόπους). Σε κάθε block που ανήκει το x υπάρχουν $k-1$ τέτοια ζεύγη, ενώ το x ανήκει συνολικά σε r_x blocks. Επομένως ο αριθμός συμμετοχών αυτών των ζευγών στα blocks ισούται με $r_x(k-1)$.

Επίσης ο αριθμός των ζευγών αυτών ισούται με $v-1$ και κάθε τέτοιο ζεύγος ανήκει σε λ blocks. Άρα ο αριθμός των συμμετοχών αυτών των ζευγών ισούται με $\lambda(v-1)$.

Επομένως

$$r_x(k-1) = \lambda(v-1),$$

και άρα $r = \dfrac{\lambda(v-1)}{k-1}$.

Για να αποδείξουμε ότι $r = \dfrac{bk}{v}$ εργαζόμαστε ως εξής: Αθροίζουμε τον αριθμό των συμμετοχών των ποικιλιών στα blocks.

Κάθε ποικιλία συμμετέχει σε r blocks (υπάρχουν v ποικιλίες). Επίσης κάθε block περιέχει k ποικιλίες (υπάρχουν b blocks). Άρα

$$v \cdot r = b \cdot k \Rightarrow r = \frac{bk}{v}. \quad |$$

Χρησιμοποιώντας και το προηγούμενο θεώρημα, βλέπουμε ότι σε κάθε σχεδιασμό αντιστοιχούν οι εξής πέντε παράμετροι.

v αριθμός ποικιλιών,

b αριθμός των blocks,

k αριθμός ποικιλών σε κάθε block,

r αριθμός των blocks, στα οποία ανήκει κάθε ποικιλία,

λ αριθμός των blocks, στα οποία ανήκει κάθε ζεύγος ποικιλιών.

Ένας τέτοιος σχεδιασμός ονομάζεται (v, b, r, k, λ)−σχεδιασμός.

Παρατήρηση: Εάν μας δοθούν μόνον οι 3 παράμετροι ενός σχεδιασμού, εμείς μπορούμε να προσδιορίσουμε τις άλλες 2.

Σημείωση: Εάν μας δοθούν 5 αριθμοί, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις του προηγούμενου Θεωρήματος, δεν σημαίνει απαραίτητα ότι υπάρχει σχεδιασμός μ' αυτούς ως παραμέτρους.

Έστω σύνολο $\{x_1, x_2, \ldots, x_v\}$ και $(A_1, A_2, \ldots, A_b)$ οικογένεια υποσυνόλων του. Θεωρούμε πίνακα $M = [m_{ij}]$ μεγέθους $b \times v$, ο οποίος ορίζεται ως εξής:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{εάν} \quad x_j \in A_i \\ 0 & \text{εάν} \quad x_j \notin A_i \end{cases}$$

Εάν η οικογένεια υποσυνόλων αποτελεί σχεδιασμό, τότε ο πίνακας M ονομάζεται **πίνακας πρόσπτωσης** αυτού του σχεδιασμού.

Παράδειγμα 7.2: Ο πίνακας πρόσπτωσης του σχεδιασμού της σελίδας 99 θα είναι ένας πίνακας μεγέθους 12×9 και θα είναι ο εξής:

$$\begin{array}{ccc}
 & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} & \\
M = & \left\{ \begin{matrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{matrix} \right\} & \begin{matrix}
\{1,2,3\} \\ \{4,5,6\} \\ \{7,8,9\} \\ \{1,4,7\} \\ \{1,5,9\} \\ \{2,5,8\} \\ \{3,6,9\} \\ \{2,6,7\} \\ \{3,4,8\} \\ \{1,6,8\} \\ \{2,4,9\} \\ \{3,5,7\}
\end{matrix}
\end{array}$$

Παρατηρήσεις: Ο πίνακας πρόσπτωσης ενός σχεδιασμού έχει τις εξής ιδιότητες:

α) Σε κάθε γραμμή υπάρχουν k 1.

β) Σε κάθε στήλη υπάρχουν r 1.

γ) Για κάθε ζεύγος στηλών, υπάρχουν ακριβώς λ θέσεις, στις οποίες και οι δύο στήλες εμφανίζουν τον αριθμό 1.

Θεώρημα 7.2: Έστω οικογένεια b υποσυνόλων ενός συνόλου v στοιχείων και έστω ότι κάθε υποσύνολο περιέχει ακριβώς k στοιχεία $(1 < k < v)$. Γι' αυτή την οικογένεια συνόλων κατασκευάζουμε έναν πίνακα M, όπως αυτόν που ορίσαμε στην σελ. 101.

Ο πίνακας M είναι ο πίνακας πρόσπτωσης ενός $(v, b, r, k, \lambda)-$σχεδιασμού εάν και μόνον εάν ο πίνακας $M^T \cdot M$ είναι ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} r & \lambda & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda \\ \lambda & r & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \cdots & \cdots & \lambda & r \end{bmatrix} \quad \text{μεγέθους } v \times v$$

Επίσης $|M^T \cdot M| = (r + (v-1)\lambda)(r-\lambda)^{v-1} > 0$.

Απόδειξη: Έχουμε ότι: εάν $M^T \cdot M = [a_{ij}]$, $a_{ij} = (i-$γραμμή του $M^T) \cdot (j-$στήλη του $M) = (i-$στήλη του $M) \cdot (j-$στήλη του $M) =$

$$= \begin{cases} \text{εάν } i = j \to \text{ αριθμός των 1 στην } i - \text{στήλη του } M \\ \text{εάν } i \neq j \to \text{ αριθμός θέσεων στις οποίες τόσο} \\ \quad \text{η στήλη } i, \text{ όσο και η στήλη } j \text{ εμφανίζουν το 1.} \end{cases}$$

Ο πίνακας M είναι ο πίνακας πρόσπτωσης ενός $(v, b, r, k, \lambda)-$σχεδιασμού $\Leftrightarrow$ $a_{ij} = r$ όταν $i = j$
$a_{ij} = \lambda$ όταν $i \neq j$

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε ότι

$$|M^T M| = (r + (v-1)\lambda)(r-\lambda)^{v-1}$$

Έχουμε

$$\begin{bmatrix} r & \lambda & \cdots & \cdots & \lambda \\ \lambda & r & \cdots & \cdots & \lambda \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \cdots & \cdots & r \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} r+(v-1)\lambda & (v-1)\lambda+r & \cdots & (v-1)\lambda+r \\ \lambda & r & \cdots & \lambda \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda & \lambda & \cdots & r \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} r+(v-1)\lambda & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \lambda & r-\lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \lambda & 0 & r-\lambda & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ \lambda & 0 & 0 & \cdots & \cdots & r-\lambda \end{bmatrix}$$

Επειδή ο παραπάνω πίνακας είναι τριγωνικός η ορίζουσά του θα ισούται με $(r+(v-1)\lambda)\cdot(r-\lambda)^{v-1}$.

Για να αποδείξουμε ότι η παραπάνω ορίζουσα είναι θετική, αρκεί να αποδείξουμε ότι $r > \lambda$. Όμως κάτι τέτοιο ισχύει διότι $r = \dfrac{\lambda(v-1)}{k-1}$ όπου $1 < k < v$.

Θεώρημα 7.3 (Fisher [1], 1940): Για κάθε (v,b,r,k,λ)−σχεδιασμό έχουμε ότι $b \geq v$.

Απόδειξη: Έστω ότι υπάρχει (v,b,r,k,λ)−σχεδιασμός με $v > b$ και έστω M, ο πίνακας πρόσπτωσης ενός τέτοιου σχεδιασμού. Ο πίνακας M θα είναι ένας πίνακας μεγέθους $b \times v$ (με περισσότερες στήλες απ' ότι γραμμές). Προσθέτουμε στον M $v-b$ μηδενικές γραμμές, οπότε "παίρνουμε" έναν πίνακα $N = \begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix}$ μεγέθους $v \times v$.

Οπότε έχουμε

$$N^T \cdot N = \begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M^T & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix} = M^T \cdot M$$

$$\left(\overset{b \times v}{M} = [m_{ij}] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1v} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ m_{b1} & b_{b2} & \cdots & m_{bv} \end{bmatrix} \right.$$

$$(M^T\ 0)\begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix} = \overset{v \times v}{\begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{b1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \\ \vdots & & \vdots & & & \\ \vdots & & \vdots & & & \\ m_{1v} & \cdots & m_{bv} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}} \overset{v \times v}{\begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & \cdots & m_{1v} \\ \vdots & & & \vdots \\ m_{b1} & \cdots & \cdots & m_{bv} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}}$$

$$\left. = \overset{v \times b}{M^T} \cdot \overset{b \times v}{M} \right)$$

'Ομως όπως είδαμε προηγούμενα ο $M^T \cdot M$ έχει θετική ορίζουσα. 'Αρα

$$|N|^2 = |N| \cdot |N| = |N^T| \cdot |N| = |N^T \cdot N| = |M^T \cdot M| > 0, (\textbf{άτοπο})$$

διότι ο πίνακας N έχει μηδενικές γραμμές και επομένως $|N| = 0$.

Παρατήρηση: Από το προηγούμενο Θεώρημα προκύπτει ότι ο μέγιστος αριθμός ποικιλιών που μπορούμε να έχουμε σ' ένα σχεδιασμό ισούται με τον αριθμό των blocks, και επειδή $r = \dfrac{bk}{v}$ θα έχουμε $r = k$. Σ' αυτή την περίπτωση δηλαδή θα πρόκειται για ένα $(v, v, k, k, \lambda)-$σχεδιασμό. Σχεδιασμούς με αυτά τα χαρακτηριστικά τους ονομάζουμε **συμμετρικούς**.

Στην συνέχεια θ' αναφερθούμε σε μια ειδική κατηγορία συμμετρικών σχεδιασμών, τους κυκλικούς σχεδιασμούς.

'Ενα υποσύνολο P του $\{0, 1, 2, \ldots, v-1\}$ θα ονομάζεται **σύνολο τέλειας διαφοράς mod$\boldsymbol{v}$**, εάν στον πίνακα διαφοράς *modulo* v του P κάθε στοιχείο του $\{1, 2, \ldots, v-1\}$ εμφανίζεται τον ίδιο αριθμό φορών.

Παράδειγμα 7.3:
$\{0,1,2,\ldots,10\}$ δηλαδή $v=11$.
$P=\{1,3,4,5,9\}$

$-(\bmod 11)$	1	3	4	5	9
1	0	9	8	7	3
3	2	0	10	9	5
4	3	1	0	10	6
5	4	2	1	0	7
9	8	6	5	4	0

Το P είναι σύνολο τέλειας διαφοράς mod 11.

Θεώρημα 7.4: Έστω $B_0=\{b_1,b_2,\ldots,b_k\}$ υποσύνολο του $\{0,1,2,\ldots,v-1\}$ με $1<k<v$. Για κάθε $0\leq i\leq v-1$, ορίζουμε σύνολα $B_i=\{b_1+i,\ldots,b_k+i\}$. Τότε τα σύνολα $B_0,B_1,\ldots,B_{v-1}$ ορίζουν ένα σχεδιασμό εάν και μόνον εάν το B_0 είναι σύνολο τέλειας διαφοράς mod v.
(Και εδώ η πρόσθεση θεωρείται *modulo* v)

Απόδειξη: Τα σύνολα $B_0,B_1,\ldots,B_{v-1}$ έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων (k τον αριθμό). Άρα για να αποδείξουμε ότι αποτελούν σχεδιασμό, αρκεί να αποδείξουμε ότι κάθε ζεύγος στοιχείων του $\{0,1,2,\ldots,v-1\}$ ανήκει στον ίδιο αριθμό υποσυνόλων $B_0,B_1,\ldots,B_{v-1}$. Εμείς αρχικά θα πάρουμε δύο στοιχεία του $\{0,1,2,\ldots,v-1\}$, το 0 και το j, και θα εξετάσουμε κάτω από ποιες προϋποθέσεις ανήκουν σ' ένα σύνολο B_i.

Ας υποθέσουμε εδώ, χωρίς να βλάψουμε την γενικότητα των επιχειρημάτων μας, ότι $0\notin B_0$. Έστω ότι

$$B_i=\{b_1+i,\ldots,b_a+i,\ldots\ldots,b_\beta+i,\ldots,b_k+i\}.$$

Θα εξετάσουμε κάτω από ποιες συνθήκες

$$b_a+i=0 \quad \text{και} \quad b_\beta+i=j.$$

(Στις παραπάνω σχέσεις η πρόσθεση θεωρείται *modulo* v)

'Εστω ότι ισχύει το παραπάνω. Τότε αυτό σημαίνει ότι $b_a + i = v$ και $b_\beta + i \equiv j \pmod v$. Δηλαδή $i = v - b_a$ και $b_\beta + i = mv + j \Rightarrow b_\beta + v - b_a = mv + j \Rightarrow j = b_\beta - b_a + (-m+1)v$.

Επομένως όταν $0, j \in B_i$, $v - b_a = i$ και $j \equiv (b_\beta - b_a) \pmod v$.

Αντίστροφα έστω ότι $i = v - b_a$ και $j = (b_\beta - b_a) \pmod v$. Τότε

$$i = v - b_a \quad \text{και} \quad b_\beta + i = b_\beta - b_a + b_a + i = b_\beta - b_a + v,$$

δηλαδή $b_\beta + i \equiv j \pmod v$.

Άρα $0, j \in B_i$ εάν και μόνον εάν

$$i = v - b_a \quad \text{και} \quad j \equiv (b_\beta - b_a) \pmod v.$$

Επομένως κάθε φορά που $j \equiv (b_\beta - b_a) \pmod v$, $0, j \in B_{v-b_a}$ και αντίστροφα.

Άρα υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των φορών που το 0 και το j συνυπάρχουν σ' ένα εκ των συνόλων $B_0, B_1, \ldots, B_{v-1}$ και των φορών που δύο στοιχεία του B_0 διαφέρουν κατά $j (\text{mod } v)$. 'Ομως ο αριθμός των φορών που δύο στοιχεία του B_0 διαφέρουν κατά $j(\text{ mod } v)$ ισούται με τον αριθμό των εμφανίσεων του στοιχείου j στον πίνακα διαφοράς *modulo* v του B_0.

Επομένως ο αριθμός των φορών που το ζεύγος $\{0, j\}$ ανήκει σε κάποιο σύνολο ισούται με τον αριθμό των εμφανίσεων του j στον πίνακα διαφοράς *modulo* v του B_0. Τώρα η κυκλική φύση των συνόλων συνεπάγεται ότι το ζεύγος $\{0, 3\}$ εμφανίζεται αριθμό φορών ίσο με το ζεύγος $\{1, 4\}$ ή $\{2, 5\}$ κ.τ.λ.

Άρα κάθε ζεύγος στοιχείων θα ανήκουν στον ίδιο αριθμό συνόλων εάν και μόνον εάν κάθε αριθμός j $(1 \leq j < v)$ εμφανίζεται τον ίδιο αριθμό φορών στον πίνακα διαφοράς *modulo* v του B_0, δηλαδή εάν και μόνον εάν το B_0 είναι σύνολο τέλειας διαφοράς mod v.

<u>Σημείωση:</u> 'Οπως αναφέραμε και προηγουμένως οι συμμετρικοί σχεδιασμοί στους οποίους αναφέρεται το Θεώρημα 7.4 ονομάζονται κυ-

κλικοί.

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 7.4 και ξεκινώντας από ένα σύνολο τέλειας διαφοράς mod v μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν κυκλικό σχεδιασμό. Βέβαια για να είναι χρήσιμο το παραπάνω Θεώρημα χρειαζόμαστε ένα συστηματικό τρόπο εύρεσης τέτοιων συνόλων. 'Ενα τέτοιο θεώρημα είναι το ακόλουθο.

Θεώρημα 7.5: 'Εστω v πρώτος αριθμός της μορφής $4n-1$ για κάποιο ακέραιο n. 'Εστω επίσης ότι οι δυνάμεις ενός αριθμού θ *modulo* v μας δίνουν το σύνολο $\{1,2,\ldots,v-1\}$, δηλαδή $\{\theta,\theta^2,\ldots,\theta^{v-1}\} = \{1,2,\ldots,v-1\}$. Τότε το σύνολο $\{\theta^2,\theta^4,\ldots,\theta^{v-1}\}$, θα είναι σύνολο τέλειας διαφοράς mod v.

Απόδειξη: Παραλείπεται.

Παρατήρηση: Ξεκινώντας απ' ένα τέτοιο σύνολο τέλειας διαφοράς mod v μπορούμε να κατασκευάσουμε τον κυκλικό σχεδιασμό $(4n-1, 4n-1, 2n-1, 2n-1, n-1)$.

Παράδειγμα 7.4: Θεωρούμε το σύνολο $\{0,1,2,\ldots,9,10\}$. Εδώ έχουμε $v = 11 = 4n-1$, δηλαδή $n=3$. Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κυκλικό $(11,11,5,5,2)-$σχεδιασμό.

Υπάρχει θ έτσι ώστε $\{\theta,\theta^2,\theta^3,\ldots,\theta^{10}\} = \{1,2,3,\ldots,10\}$ (Εδώ οι δυνάμεις του θ θεωρούνται mod v, δηλαδή *modulo* 11).
Πράγματι εάν $\theta = 2$,

$$\begin{array}{lclcrcr}
\theta^1 & = & 2^1 & = & 2 & & \\
\theta^2 & = & 2^2 & = & 4 & & \\
\theta^3 & = & 2^3 & = & 8 & & \\
\theta^4 & = & 2^4 & = & 16 & \equiv & 5 \\
\theta^5 & = & 2^5 & = & 32 & \equiv & 10 \\
\theta^6 & = & 2^6 & = & 64 & \equiv & 9 \\
\theta^7 & = & 2^7 & = & 128 & \equiv & 7 \\
\theta^8 & = & 2^8 & = & 256 & \equiv & 3 \\
\theta^9 & = & 2^9 & = & 512 & \equiv & 6 \\
\theta^{10} & = & 2^{10} & = & 1024 & \equiv & 1
\end{array}$$

Βάσει του Θεωρήματος 7.5 το σύνολο $\{\theta^2, \theta^4, \ldots, \theta^{v-1}\} = \{4, 5, 9, 3, 1\}$ είναι σύνολο τέλειας διαφοράς mod 11.

Ας το επαληθεύσουμε:

− mod 11	1	3	4	5	9
1	0	9	8	7	3
3	2	0	10	9	5
4	3	1	0	10	6
5	4	2	1	0	7
9	8	6	5	4	0

Κάθε στοιχείο του $\{1, 2, \ldots, 10\}$ εμφανίζεται στον πίνακα 2 φορές.

Στην συνέχεια ξεκινώντας από το $\{1, 3, 4, 5, 9\}$ και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 7.4, θα κατασκευάσουμε έναν συμμετρικό κυκλικό σχεδιασμό. Θέτουμε

$$\begin{aligned}
B_0 &= \{1, 3, 4, 5, 9\} \\
B_1 &= \{1+1, 3+1, 4+1, 5+1, 9+1\} = \{2, 4, 5, 6, 10\} \\
B_2 &= \{2+1, 4+1, 5+1, 6+1, 10+1\} = \{3, 5, 6, 7, 0\} \\
B_3 &= \{3+1, 5+1, 6+1, 7+1, 0+1\} = \{4, 6, 7, 8, 1\} \\
B_4 &= \{4+1, 6+1, 7+1, 8+1, 1+1\} = \{5, 7, 8, 9, 2\} \\
B_5 &= \{5+1, 7+1, 8+1, 9+1, 2+1\} = \{6, 8, 9, 10, 3\} \\
B_6 &= \{7, 9, 10, 0, 4\} \\
B_7 &= \{8, 10, 0, 1, 5\} \\
B_8 &= \{9, 0, 1, 2, 6\} \\
B_9 &= \{10, 1, 2, 3, 7\} \quad \text{και} \quad B_{10} = \{0, 2, 3, 4, 8\}
\end{aligned}$$

Εδώ έχουμε κατασκευάσει ένα κυκλικό $(11, 11, 5, 5, 2)$−σχεδιασμό διότι $v = b = 11$, $k = r = 5$ και $\lambda = 2$ (όσες φορές κάθε μη-μηδενικό στοιχείο εμφανίζεται στον πίνακα διαφοράς *modulo* v του αρχικού συνόλου $B_0 = \{1, 3, 4, 5, 9\}$).

Οι συμμετρικοί σχεδιασμοί έχουν και την εξής ενδιαφέρουσα ιδιότητα.

Θεώρημα 7.6: Εάν M είναι ο πίνακας πρόσπτωσης ενός συμμετρικού σχεδιασμού, τότε και ο M^T είναι επίσης πίνακας πρόσπτωσης ενός συμμετρικού σχεδιασμού (ο σχεδιασμός αυτός ονομάζεται δυικός του αρχικού).

Απόδειξη: Έστω M, ο πίνακας πρόσπτωσης ενός $(v, v, k, k, \lambda)-$σχεδιασμού (ο σχεδιασμός αυτός θα είναι προφανώς συμμετρικός). Ο πίνακας M θα είναι μεγέθους $v \times v$, θα έχει για στοιχεία του, τα 0 και 1, σε κάθε γραμμή θα υπάρχουν k στοιχεία που είναι ίσα με 1 και σε κάθε στήλη επίσης k στοιχεία που είναι 1.

Από το Θεώρημα 7.2, έχουμε ότι

$$M^T \cdot M = \begin{bmatrix} k & \lambda & \cdots & \cdots & \lambda \\ \lambda & k & \cdots & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \lambda & \lambda & \cdots & \cdots & k \end{bmatrix} = \Lambda + (k - \lambda)I$$

όπου Λ πίνακας μεγέθους $v \times v$, του οποίου όλα τα στοιχεία είναι λ.

Ο πίνακας M^T θα είναι μεγέθους $v \times v$ και θα έχει k στοιχεία που είναι ίσα με 1 σε κάθε γραμμή.

Βάσει του Θεωρήματος 7.2, ο M^T θα είναι ο πίνακας πρόσπτωσης ενός $(v, v, k, k, \lambda)-$σχεδιασμού εάν και μόνον εάν

$$\left(M^T\right)^T \cdot M^T = \Lambda + (k - \lambda)I.$$

Με άλλα λόγια αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$M^T \cdot M = M \cdot M^T$$

Από το Θεώρημα 7.2, επίσης έχουμε

$$|M^T \cdot M| > 0$$

και επομένως

$$|M|^2 = |M||M| = |M^T| \cdot |M| = |M^T \cdot M| > 0$$

Άρα $|M| \neq 0$ και επομένως ο M είναι αντιστρέψιμος.

Τώρα

$$M\Lambda = \begin{bmatrix} k\lambda & k\lambda & \cdots & \cdots & k\lambda \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ k\lambda & k\lambda & \cdots & \cdots & k\lambda \end{bmatrix} = \Lambda M$$

Οπότε έχουμε,

$$\begin{aligned} MM^T &= (M \cdot M^T)(MM^{-1}) \\ &= M(M^T \cdot M)M^{-1} \\ &= M(\Lambda + (k-\lambda)I)M^{-1} \\ &= M\Lambda M^{-1} + (k-\lambda)MIM^{-1} \\ &= \Lambda MM^{-1} + (k-\lambda)I \\ &= \Lambda + (k-\lambda)I \\ &= M^T \cdot M \end{aligned}$$

Άρα ο M^T είναι ο πίνακας πρόσπτωσης ενός (v, v, k, k, λ)−σχεδιασμού.

Από το Θεώρημα 7.6, προκύπτουν τα εξής πορίσματα:

Πόρισμα 7.7: Σε κάθε ζεύγος γραμμών του πίνακα πρόσπτωσης ενός (v, v, k, k, λ)−σχεδιασμού υπάρχει ταύτιση στοιχείων που είναι 1, σε ακριβώς λ θέσεις.

Απόδειξη: Έστω M ο πίνακας πρόσπτωσης ενός τέτοιου σχεδιασμού. Βάσει του Θεωρήματος 7.6, ο πίνακας M^T αποτελεί επίσης τον πίνακα πρόσπτωσης ενός (v, v, k, k, λ)−σχεδιασμού. Τώρα εάν πάρουμε δύο οποιεσδήποτε στήλες του M^T, θα έχουμε ταύτιση στοιχείων που είναι 1 σε ακριβώς λ θέσεις (ο αριθμός αυτός αντιπροσωπεύει το πλήθος των blocks, στα οποία ανήκουν ταυτόχρονα οι δύο ποικιλίες που αντιστοιχούν στις δύο στήλες).

Τώρα οι στήλες του M^T αποτελούν τις γραμμές του M, οπότε προκύπτει το παραπάνω Πόρισμα.

Πόρισμα 7.8: Κάθε ζεύγος γραμμών του πίνακα πρόσπτωσης ενός (v, v, k, k, λ)−σχεδιασμού διαφέρουν ακριβώς σε $2(k-\lambda)$−θέσεις.

Απόδειξη: Η εικόνα που θα παρουσιάζουν οι δύο γραμμές, θα είναι η εξής:

$$\begin{array}{cccc} 0\ 0\ \cdots\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\overbrace{1\ 1\ \cdots\ 1 \;\mid\; 1\ 1\ \cdots\ 1}^{k}} & 0\ 0\ \cdots\ 0 \\ \multicolumn{2}{c}{\underbrace{\underbrace{1\ 1\ \cdots\ 1}_{k-\lambda} \;\mid\; \underbrace{1\ 1\ \cdots\ 1}_{\lambda}}_{k}} & \underbrace{0\ 0\ \cdots\ 0}_{k-\lambda} & 0\ 0\ \cdots\ 0 \end{array}$$

7.2. Θεωρία Κωδίκων

Δυαδικό κώδικα ονομάζουμε κάθε σύνολο $0-1$ ακολουθιών. Τα στοιχεία αυτού του συνόλου ονομάζονται **κωδικές-λέξεις**. Θα ασχοληθούμε με δυαδικούς κώδικες των οποίων όλες οι κωδικές-λέξεις έχουν το ίδιο μήκος[1].

Παράδειγμα 7.5: Έστω ότι θέλουμε να στείλουμε τα μηνύματα NORTH, SOUTH, EAST, WEST. Ένας δυαδικός κώδικας που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε γι' αυτό τον σκοπό είναι:

$$\begin{array}{ccc} N & \rightarrow & 00 \\ S & \rightarrow & 01 \\ E & \rightarrow & 10 \\ W & \rightarrow & 11 \end{array}$$

Εδώ παρατηρούμε ότι εάν ένα ψηφίο κάποιας κωδικής-λέξης μεταδοθεί

[1] Αυτό ονομάζεται και μήκος του κώδικα.

λάθος, τότε θα έχει μεταδοθεί λάθος μήνυμα. Η λανθασμένη μετάδοση δεν μπορεί να εντοπισθεί από τον αποδέκτη.

Παράδειγμα 7.6: Έστω ότι για την μετάδοση των 4 λέξεων, του προηγούμενου παραδείγματος, χρησιμοποιούμε τον δυαδικό κώδικα:

$$\begin{array}{rcl} \text{NORTH} & \rightarrow & 000 \\ \text{SOUTH} & \rightarrow & 011 \\ \text{EAST} & \rightarrow & 101 \\ \text{WEST} & \rightarrow & 110 \end{array}$$

Εάν κατά την μετάδοση μιας εκ των παραπάνω κωδικών-λέξεων έχουμε ακριβώς ένα λάθος, τότε ο αποδέκτης μπορεί να εντοπίσει την λανθασμένη μετάδοση. (Αυτό του το επιτρέπει το extra ψηφίο που έχουμε προσθέσει και συγκεκριμένα το γεγονός ότι κάθε κωδική-λέξη περιέχει άρτιο αριθμό 1). Εδώ θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι παρ'όλο που ο αποδέκτης γνωρίζει ότι έχει συμβεί λάθος στην μετάδοση, δεν μπορεί να το διορθώσει.

Για παράδειγμα, εάν ο αποδέκτης λάβει το μήνυμα 001, γνωρίζει ότι είναι λάθος, αλλά δεν γνωρίζει εάν το μήνυμα που εστάλη ήταν το 000 ή το 101.

Παράδειγμα 7.7: Έστω ότι, για την μετάδοση των 4 λέξεων, χρησιμοποιούμε τον δυαδικό κώδικα:

$$\begin{array}{rcl} N & \rightarrow & 000111 \\ S & \rightarrow & 011010 \\ E & \rightarrow & 101100 \\ W & \rightarrow & 110001 \end{array}$$

Ο παραπάνω κώδικας παρ'όλο που είναι μεγαλύτερου μήκους, έχει τα εξής πλεονεκτήματα:

α) Εάν κατά την διάρκεια μετάδοσης μιας κωδικής-λέξης έχουμε το πολύ 3 λάθη, τότε μπορεί να εντοπισθεί η λάθος μετάδοση. Η δυνατότητα αυτή στηρίζεται στο γεγονός ότι δεν μπορούμε να πάρουμε μια κωδική-λέξη από μια άλλη με 3 ή λιγότερες από 3 αλλαγές.

β) Εάν κατά την διάρκεια μετάδοσης μιας κωδικής-λέξης έχουμε ακριβώς ένα λάθος, τότε αυτό όχι μόνον μπορεί να εντοπισθεί από τον αποδέκτη, αλλά μπορεί επίσης να διορθωθεί από αυτόν.

Για παράδειγμα, εάν το μήνυμα που ελήφθη είναι το 111001, τότε προφανώς πρόκειται περί λανθασμένου μηνύματος και με την προϋπόθεση ότι σ' αυτό έχει συμβεί ακριβώς ένα λάθος, το μήνυμα που εστάλη ήταν το 110001.

Άρα σε κώδικες όπως ο παραπάνω:

α) Εάν σε κάθε μετάδοση κωδικής-λέξης ο αριθμός των λανθασμένων ψηφίων δεν υπερβαίνει το 3, τότε μπορεί να εντοπισθεί η λανθασμένη μετάδοση μιας κωδικής-λέξης.

β) Εάν σε κάθε μετάδοση κωδικής-λέξης ο αριθμός των λανθασμένων ψηφίων δεν υπερβαίνει το 1, τότε όχι μόνον μπορεί να εντοπισθεί η λανθασμένη μετάδοση μιας κωδικής-λέξης αλλά επίσης μπορεί και να διορθωθεί.

Σχετικά μ' αυτό το θέμα ισχύει το εξής γενικότερο αποτέλεσμα:

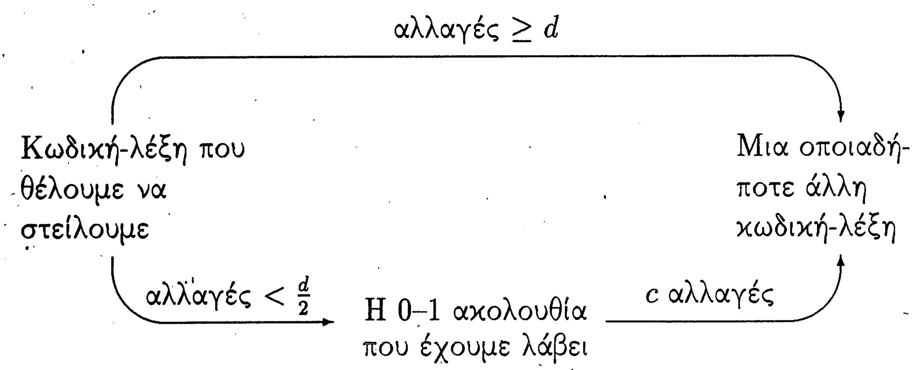
<u>Θεώρημα 7.9:</u> Έστω κώδικας του οποίου οι κωδικές-λέξεις έχουν την εξής ιδιότητα: Μπορούμε να "πάμε" από την μία στην άλλη με τουλάχιστον d αλλαγές.

α) εάν στην μετάδοση μιας κωδικής-λέξης ο αριθμός των λανθασμένων ψηφίων είναι μικρότερος του d, τότε μπορεί να εντοπισθεί η λανθασμένη μετάδοση, και

β) η λανθασμένη μετάδοση μιας κωδικής-λέξης μπορεί να διορθωθεί εάν ο αριθμός των λανθασμένων ψηφίων είναι μικρότερος του $\frac{1}{2}d$.

Απόδειξη: (α) Προφανές (Εάν συμβεί κάποιο λάθος στην μετάδοση, η κωδική-λέξη που θα προκύψει δεν θα ανήκει στο σύνολο των κωδικών-λέξεων του κώδικα).

β)



Άρα για να πάμε από την κωδική-λέξη που θέλουμε να στείλουμε σε μια άλλη οποιαδήποτε κωδική-λέξη χρειαζόμαστε λιγότερες από $\frac{1}{2}d+c$ αλλαγές. Επομένως

$$\frac{1}{2}d + c > d$$

Άρα $c > d/2$. Επομένως η κωδική-λέξη που θέλουμε να στείλουμε είναι η μόνη, από τις κωδικές-λέξεις, που μπορεί να προκύψει από την 0–1 ακολουθία που έχουμε λάβει, με λιγότερες από $\frac{d}{2}$ αλλαγές. Η μοναδικότητα αυτή, μας επιτρέπει να την προσδιορίσουμε.

Είδαμε προηγουμένως, στους Σχεδιασμούς (Πόρισμα 7.8), ότι κάθε ζεύγος γραμμών του πίνακα πρόσπτωσης ενός $(v, v, k, k, \lambda)-$σχεδιασμού διαφέρουν ακριβώς σε $2(k-\lambda)$ θέσεις. Εάν θεωρήσουμε το σύνολο των γραμμών ενός τέτοιου πίνακα ως το σύνολο των κωδικών-λέξεων ενός κώδικα, τότε στηριζόμενοι στο πρηγούμενο Θεώρημα έχουμε το εξής Πόρισμα.

Πόρισμα 7.10: 'Εστω ότι οι κωδικές-λέξεις ενός κώδικα αποτελούνται από τις γραμμές του πίνακα πρόσπτωσης ενός (v, v, k, k, λ)−σχεδιασμού. Τότε

(α) στον κώδικα αυτό εντοπίζουμε λανθασμένη μετάδοση μιας κωδικής-λέξης, εάν ο αριθμός των λαθών είναι μικρότερος του $2(k-\lambda)$.

(β) μια λανθασμένη μετάδοση κωδικής-λέξης μπορεί να διορθωθεί εάν ο αριθμός των λανθασμένων ψηφίων είναι μικρότερος του $(k-\lambda)$.

Παρατηρήσεις: 1) Κατασκευάζοντας ένα συμμετρικό (κυκλικό) σχεδιασμό και στην συνέχεια θεωρώντας τον πίνακα πρόσπτωσης του, έχουμε έναν κώδικα με τα χαρακτηριστικά που αναφέραμε.
2) 'Ενας κώδικας που κατασκευάζεται χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση 1, έχει επίσης τα εξής χαρακτηριστικά:

(i) κάθε ζεύγος κωδικών-λέξεων διαφέρουν κατά τον ίδιο αριθμό θέσεων.

(ii) κάθε κωδική-λέξη έχει τον ίδιο αριθμό στοιχείων που είναι 1.

Αναφορές

1. Fisher, R.A., An examination of the different possible solutions of a problem in incomplete blocks, Ann. Eugenics, 10, 52–57.