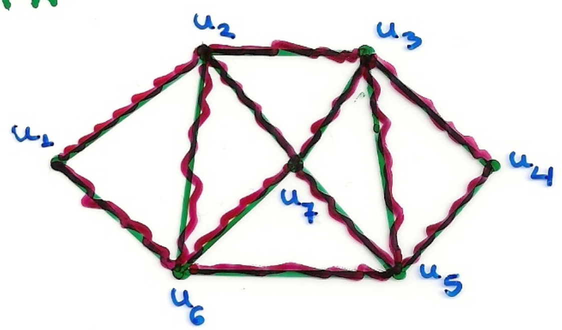
Ίχνη του Euler.

- Ένα γράφημα G ονομάζεται Eulerian εάν υπάρχει ένα κλειστό ίχνος* στο G, το οποίο περιέχει όλες τις ακμές του.

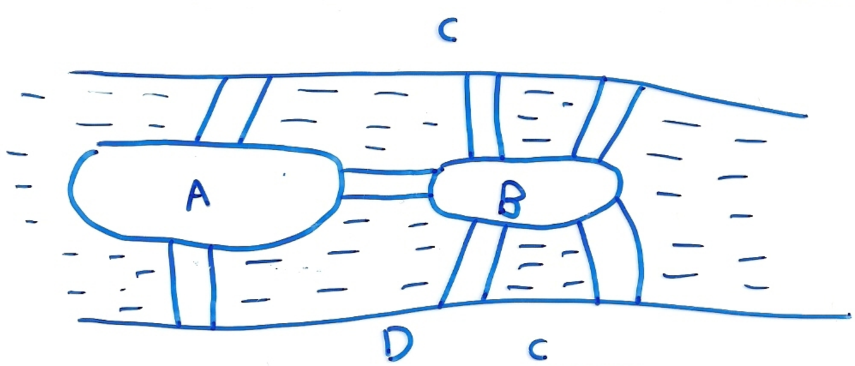
* Περίπατος στον οποίο δεν έχουμε επανάληψη ακμών.

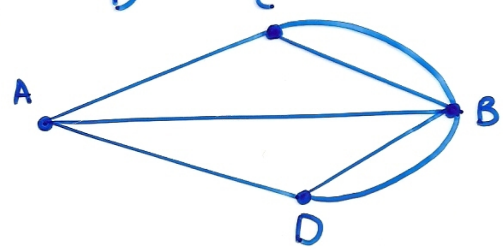
π.χ.



$u_1 u_2 u_7 u_5 u_4 u_3 u_5 u_6 \overset{u_7}{\uparrow} u_3 u_2 u_6 u_1$

Το πρόβλημα της γέφυρας του Königsberg. (Euler 1736)





Θεώρημα: (Euler, Hierholzer, Veblen)

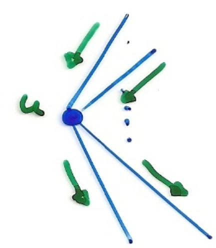
Για κάθε συνεκτικό γράφημα G, οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(1) Το G είναι Eulerian.
(2) Ο βαθμός κάθε κορυφής είναι άρτιος.
(3) Υπάρχει ένα σύνολο $B=\{C_1, C_2, \ldots, C_\ell\}$, τα στοιχεία του οποίου είναι κύκλοι του G, έτσι ώστε (i) $E(C_1)\cup \ldots \cup E(C_\ell)=E(G)$ και (ii) $E(C_i)\cap E(C_j)=\phi$ $\forall\, i,j=1,2,\ldots,\ell$ όπου $i\neq j$.

Απόδειξη:

$(1)\Rightarrow(2)$.

Έστω T ίχνος του Euler στο G. Κάθε φορά που το T "περνάει" από μια κορυφή u, χρησιμοποιεί δύο διαφορετικές ακμές ή ένα βρόχο που έχει την u άκρο. Επειδή στο T εμφανίζονται όλες οι ακμές, η u πρέπει να έχει άρτιο βαθμό



δηλ. $d_G(u)=2\times$(αριθμό επισκέψεων στην u)

$(2)\Rightarrow(3)$.

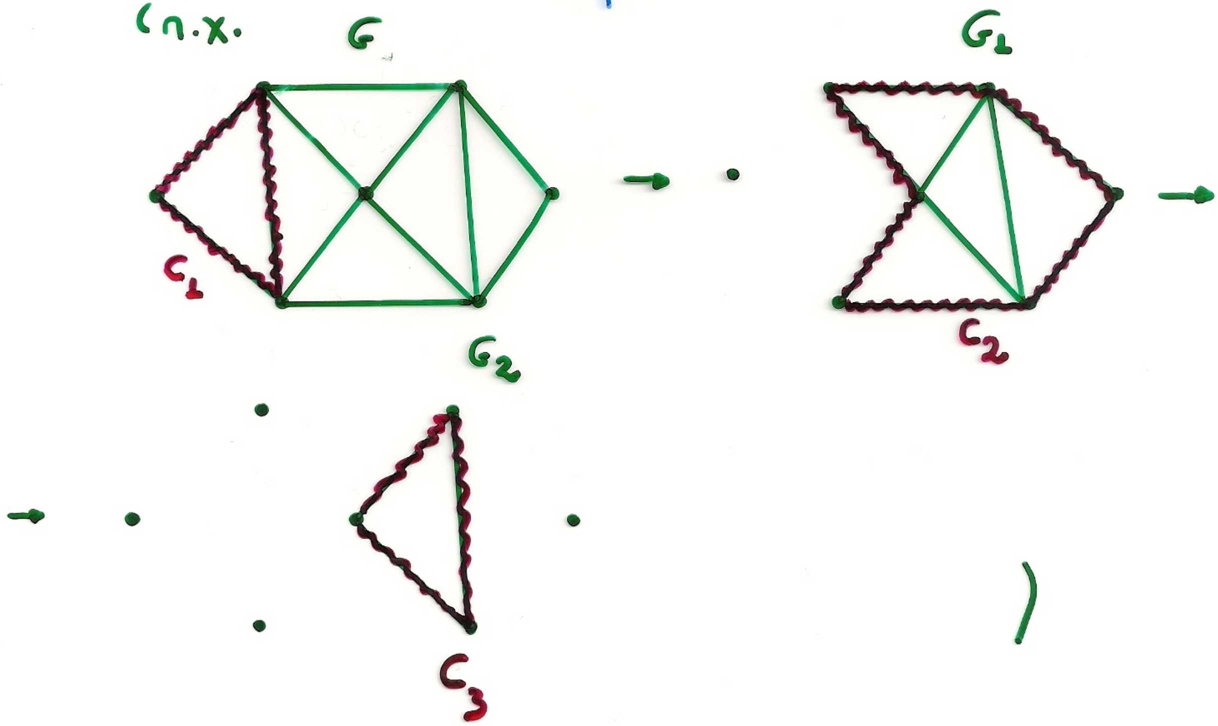
Επειδή το G είναι συνεκτικό και ο βαθμός κάθε κορυφής είναι άρτιος, $\delta(G)\geq 2$.
(Άσκηση 1.8: Εάν G απλό γράφημα με $\delta(G)\geq 2$, το G περιέχει κύκλο).
Έστω κύκλος C_1 στο G. Θεωρούμε το γράφημα $G_1=G-E(C_1)$.
Κάθε κορυφή του G_1 θα έχει άρτιο

βαθμό. Εάν $E(G_1)=\emptyset$ τότε έχουμε τελειώσει διότι ισχύει η (3).
Εάν $E(G_1)\neq\emptyset$, τότε υπάρχει κύκλος C_2 στο G_1. Ορίζουμε $G_2=G_1-E(C_2)$. Εάν $E(G_2)=\emptyset$ τότε ισχύει η (3). Εάν $E(G_2)\neq\emptyset$ τότε υπάρχει κύκλος C_3 στο G_2.

⋮

Εάν εφαρμόσουμε αυτή την διαδικασία μέχρι να προκύψει ένα γράφημα χωρίς ακμές, τότε θα έχουμε βρεί ένα σύνολο κύκλων του G που ικανοποιεί τις ιδιότητες (i) και (ii) της πρότασης (3).

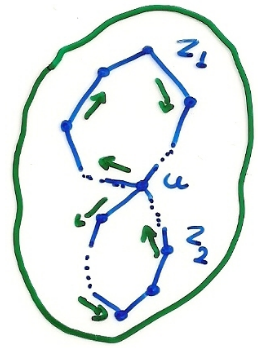
(π.χ.



)

(3) ⇒ (1)

Έστω $Z_1\in B$. Εάν $E(Z_1)=E(G)$ τότε προφανώς το G είναι Eulerian. Εάν $E(Z_1)\neq E(G)$ τότε επειδή το G είναι συνεκτικό υπάρχει κύκλος $Z_2\in B$ έτσι ώστε Z_1 και Z_2 έχουν τουλάχιστον μία κοινή κορυφή, έστω την u.



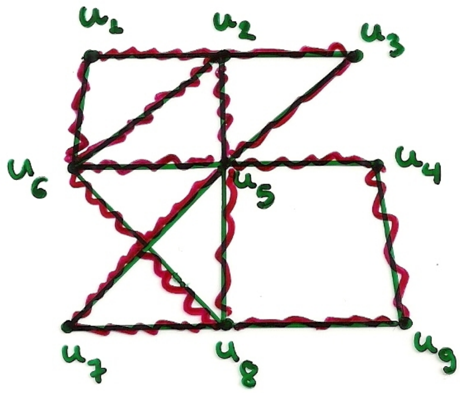
Το ίχνος που έχει ως αρχή την u και περιέχει διαδοχικά τους κύκλους Z_1 και Z_2 είναι ένα κλειστό ίχνος στο G, το οποίο περιέχει τις ακμές του Z_1 και Z_2. Εάν $E(Z_1) \cup E(Z_2) = E(G)$, τότε προφανώς το G είναι Eulerian. Εάν $E(Z_1) \cup E(Z_2) \neq E(G)$ τότε συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία μπορούμε να βρούμε τελικά ένα κλειστό ίχνος στο G, το οποίο περιέχει όλες τις ακμές του. Άρα το G είναι Eulerian.

Αλγόριθμος του Fleury (1921).

1. Επιλέγουμε μια τυχαία κορυφή u_0 και θέτουμε $W_0 = u_0$.
2. Έστω ότι έχει κατασκευασθεί το ίχνος $W_i = u_0 e_1 u_1 \ldots e_i u_i$. Τότε επιλέγουμε την ακμή e_{i+1} από το σύνολο $E(G) - \{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$ έτσι ώστε (i) η κορυφή u_i να αποτελεί άκρο της ακμής e_{i+1} και (ii) εάν είναι δυνατόν $\omega(G_i) = \omega(G_i - \{e_{i+1}\})$ όπου $G_i = G - \{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$.
3. Ο αλγόριθμος σταματά όταν το Βήμα 2 δεν μπορεί να εκτελεστεί.

Θεώρημα: Εάν το G είναι Eulerian τότε κάθε ίχνος που κατασκευάζεται από τον αλγόριθμο του Fleury είναι ίχνος του Euler.

π.χ.



$W_0 = u_1$

$W_1 = u_1 u_2$

$W_2 = u_1 u_2 u_6$

$W_3 = u_1 u_2 u_6 u_8$

$W_4 = u_1 u_2 u_6 u_8 u_7$

$W_5 = u_1 u_2 u_6 u_8 u_7 u_5$

$W_6 = u_1 u_2 u_6 u_8 u_7 u_5 u_4$

$W_7 = u_1 u_2 u_6 u_8 u_7 u_5 u_4 u_9$

$W_8 = u_1 u_2 u_6 u_8 u_7 u_5 u_4 u_9 u_8$

$W_9 = u_1 u_2 u_6 u_8 u_7 u_5 u_4 u_9 u_8 u_5$

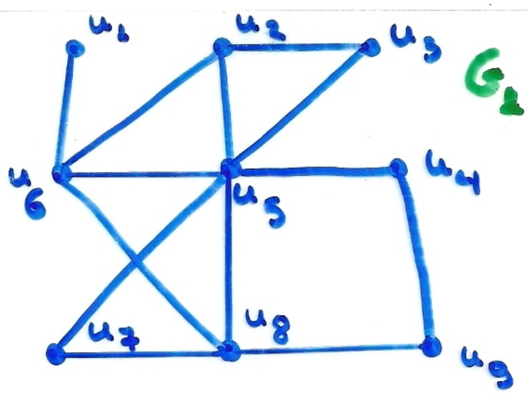
$W_{10} = u_1 u_2 u_6 u_8 u_7 u_5 u_4 u_9 u_8 u_5 u_3$

$W_{11} = W_{10} u_2$

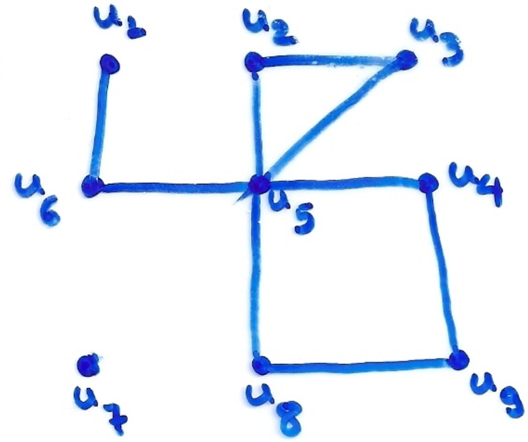
$W_{12} = W_{11} u_5$

$W_{13} = W_{12} u_6$

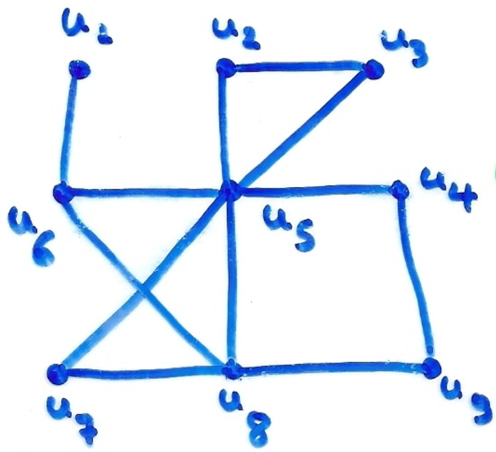
$W_{14} = W_{13} u_1$



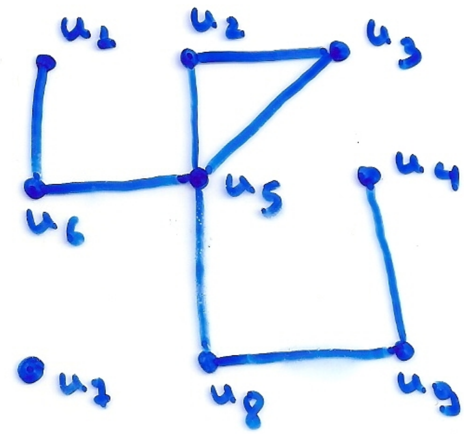
G_1



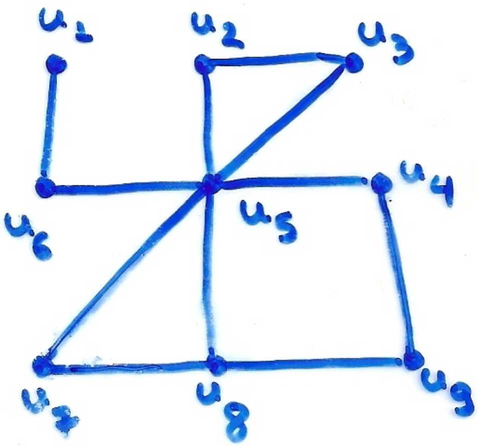
G_5



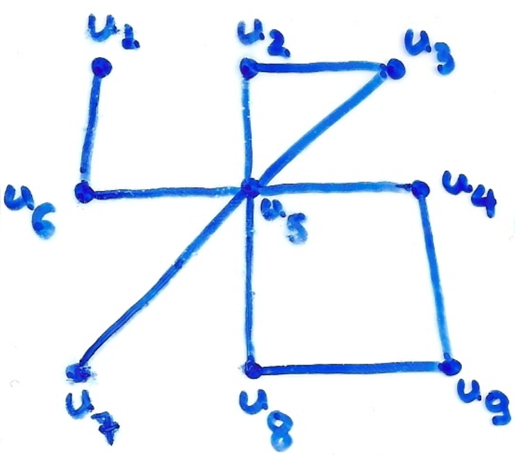
G_2



G_6



G_3



G_4

⋮

Λήμμα: Έστω γράφημα G, στο οποίο όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό. Τότε $\forall\, e\in E(G)$,

$$\omega(G-\{e\})=\omega(G).$$

Αποδ. Έστω ότι $\omega(G-\{e\})>\omega(G)$. Εάν u, v είναι οι δύο κορυφές που αποτελούν άκρα της e, αυτές θα βρίσκονται σε διαφορετικές συνιστώσες του $G-\{e\}$, έστω G_1, G_2.

Όμως σ' αυτή την περίπτωση οι αριθμοί $\sum_{x\in V(G_1)} d_{G_1}(x)$ και $\sum_{x\in V(G_2)} d_{G_2}(x)$ θα είναι περιττοί αριθμοί ∟ ΑΤΟΠΟ.

Απόδειξη: (Θεωρήματος).

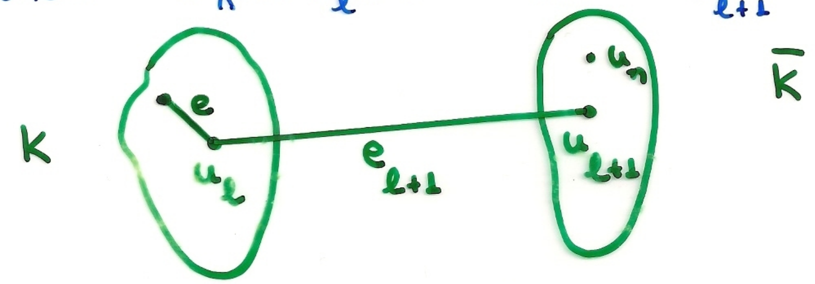
Έστω G Eulerian γράφημα και έστω ίχνος $W=u_0e_1u_1\dots e_nu_n$ στο G, το οποίο έχει κατασκευασθεί χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Fleury. Επειδή το W έχει για τελευταία του κορυφή την u_n, αυτό σημαίνει ότι ο βαθμός της u_n στο G_n ισούται με 0. Όμως αρχικά ο βαθμός της u_n στο G ήταν άρτιος, επομένως $u_0=u_n$ και άρα το W είναι κλειστό ίχνος.

Ας υποθέσουμε ότι το W δεν είναι ίχνος του Euler στο G. Ορίζουμε

K: σύνολο κορυφών που έχουν θετικούς βαθμούς στο G_n.

$\bar{K}=V(G)-K$.

Προφανώς $u_n \in \overline{K}$.
Έστω ℓ ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει: $u_\ell \in K$ και $u_{\ell+1} \in \overline{K}$.



Η $e_{\ell+1}$ είναι η μόνη ακμή του G_ℓ που έχει ένα άκρο στο K και το άλλο στο $\overline{K}$.

δηλ. έχουμε
$$\omega(G_{\ell+1}) = \omega(G_\ell) + 1.$$

Έστω e μια οποιαδήποτε ακμή του G_ℓ που έχει για άκρο της, την κορυφή u_ℓ.

Από το Βήμα 2, έχουμε ότι
$$\omega(G_\ell - \{e\}) = \omega(G_\ell) + 1.$$

και επομένως
$$\omega(G_\ell[K] - \{e\}) = \omega(G_\ell[K]) + 1. \quad -(*)$$

Όμως $G_\ell[K] = G_n[K]$ και άρα κάθε κορυφή στο $G_\ell[K]$, θα έχει άρτιο βαθμό. – ΑΤΟΠΟ
διότι σε μια τέτοια περίπτωση η $(*)$ δεν μπορεί να ισχύει (από το Λήμμα).

Άσκηση:

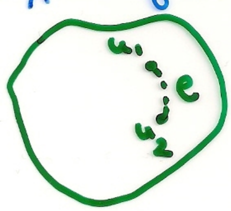
6.2) Έστω G συνεκτικό γράφημα με ακριβώς $2k$ κορυφές περιττού βαθμού, όπου $k \geq 1$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν υποσύνολα $E_1, E_2, \ldots, E_k$ του $E(G)$ με $E_1 \cup \ldots \cup E_k = E(G)$ και $E_i \cap E_j = \emptyset$ για $i \neq j$, κάθε ένα από τα οποία αποτελεί το σύνολο ακμών ενός ανοικτού ίχνους. Τα ίχνη αυτά συνδέουν τις κορυφές περιττού βαθμού κατά ζεύγη.

Απ.

Θα το αποδείξουμε με επαγωγή ως προς k.

Έστω $k=1$, και έστω u_1, u_2 οι δύο κορυφές στο G που έχουν περιττό βαθμό. Θεωρούμε το γράφημα $G+\{e\}$ όπου η ακμή e έχει για άκρα της τις κορυφές u_1, u_2.

$G+\{e\}$

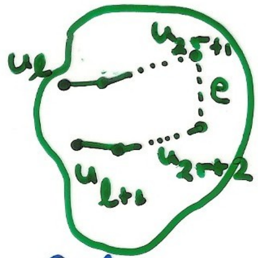


Επειδή όλες οι κορυφές στο $G+\{e\}$ έχουν άρτιο βαθμό, το $G+\{e\}$ είναι Eulerian. Άρα $\exists$ (u_1,u_2)-ίχνος στο G που περιέχει όλες τις ακμές του.

Ας υποθέσουμε ότι η πρόταση που θέλουμε να αποδείξουμε ισχύει για $k=r$ και έστω $k=r+1$.

Έστω επίσης $u_1, u_2, \ldots, u_{2r+2}$ οι κορυφές του G που έχουν περιττό βαθμό. Θεωρούμε το γράφημα $G+\{e\}$ όπου η ακμή e έχει για άκρα της τις κορυφές u_{2r+1}, u_{2r+2}. Από την υπόθεση της επαγωγής

υπάρχουν ανοικτά ίχνη που συνδέουν τις κορυφές $u_1, u_2, \ldots, u_{2r}$, τα οποία έχουν τα χαρακτηριστικά που αναφέρονται στην άσκηση. Έστω ότι η ακμή e ανήκει στο

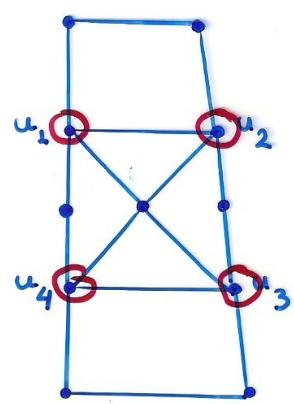


ανοικτό ίχνος (u_l, u_{l+1}). Όμως το ίχνος από στο γράφημα G μας δίνει τα ανοικτά ίχνη (u_l, u_{2r+1}) και (u_{l+1}, u_{2r+2}).

6.1: Να δοθεί παράδειγμα γραφήματος, το οποίο είναι Eulerian και δεν είναι HAMILTONIAN.

<u>Απ.</u>

G



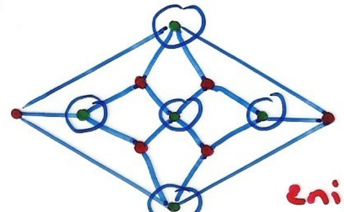
Το G είναι Eulerian, διότι όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό. Το G δεν είναι Hamiltonian διότι εάν $S=\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$,

$$\omega(G-S) > |S|$$

$$(\ \omega(G-S) = 5,\quad |S| = 4).$$

<u>Άσκηση</u>: Να δοθεί παράδειγμα γραφήματος, το οποίο δεν είναι Hamiltonian και δεν είναι Eulerian.

G



μη-Eulerian: Κορυφές περιττού βαθμού.

μη-Hamiltonian: $\omega(G-X) > |X|$

επίσης από Ασκ. 5.2 → X: "πράσινες" κορυφές.

• Το πρόβλημα του Κινέζου ταχυδρόμου (Kwan 1962).

- Κλειστός καλυπτικός περίπατος στο G: Κλειστός περίπατος που "περνάει" από κάθε ακμή του G τουλάχιστον μια φορά.

- Eulerian περίπατος στο G: Κλειστός καλυπτικός περίπατος ελάχιστου μήκους.

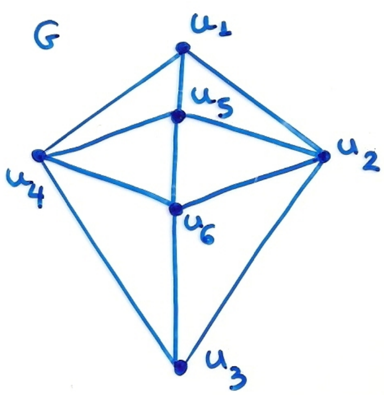
- e(G): Μήκος Eulerian περιπάτου στο G.

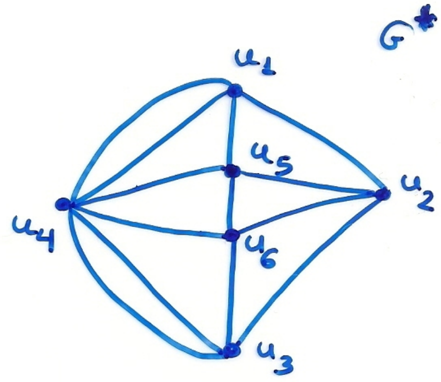
Εάν το G είναι Eulerian, $e(G)=|E(G)|$. (δηλ. η έννοια του Eulerian περιπάτου ταυτίζεται με την έννοια του Eulerian ίχνους).

Πρόβλημα του Κινέζου ταχυδρόμου: εύρεση ενός Eulerian περιπάτου.

<u>Παρατήρηση</u>: Έστω γράφημα G το οποίο δεν είναι Eulerian και έστω W κλειστός καλυπτικός περίπατός του. Θεωρούμε ένα νέο γράφημα G^*, το οποίο προκύπτει από το G εάν σε κάθε ακμή του, προσθέσουμε k-1 αντίγραφά της, όπου k ο αριθμός των φορών που ο W επισκέπτεται αυτή την ακμή. Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι ο κλειστός καλυπτικός περίπατος W στο G αντιστοιχεί σ' ένα ίχνος του Euler T στο G^*. Επίσης το αντίστροφο ισχύει.

π.χ.





$W = u_1 u_5 u_6 u_3 u_2 u_6 u_4 u_5 u_2 u_1 u_4 u_3 u_4 u_1$

Επομένως το πρόβλημα του Κινέζου ταχυδρόμου επαναδιατυπώνεται ως εξής:

Έχουμε ένα μη-Eulerian γράφημα G και θέλουμε απ' αυτό να κατασκευάσουμε ένα Eulerian γράφημα G^* κατόπιν προσθήκης αντιγράφων ακμών έτσι ώστε ο αριθμός $|E(G^*)|-|E(G)|$ να είναι όσο το δυνατόν μικρότερος.

Παρατηρήσεις:

(a) Προφανώς $e(G)=|E(G^*)|$

και

(b) $|E(G)| \le e(G) \le 2|E(G)|$

διότι εάν προσθέσουμε σε κάθε ακμή του G ένα αντίγραφό της, τότε το γράφημα που θα προκύψει είναι Eulerian.

Έστω G συνεκτικό γράφημα με $|E(G)| = q$, στο οποίο υπάρχουν ακριβώς $2n$ κορυφές περιττού βαθμού.

K: σύνολο των κορυφών του G που έχουν περιττό βαθμό.

Ζευγαρωτός-διαμερισμός του K: Κάθε σύνολο

$$\Pi = \{ \{u_{11}, u_{12}\}, \{u_{21}, u_{22}\}, \ldots, \{u_{n1}, u_{n2}\} \}$$ το οποίο

χωρίζει τα στοιχεία του K σε n ζεύγη ανά δύο ξένα μεταξύ τους.

Δοθέντος ενός τέτοιου ζευγαρωτού-διαμερισμού Π, ορίζουμε το άθροισμα

$$d(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} d_G(u_{i1}, u_{i2})$$

$\Pi(G)$: σύνολο όλων των ζευγαρωτών-διαμερισμών του K.

Ορίζουμε

$$m(G) = \min_{\Pi \in \Pi(G)} d(\Pi).$$

Θεώρημα: (Goodman-Hedetniemi: 1973).

Για κάθε απλό συνεκτικό γράφημα G με q ακμές, στο οποίο υπάρχουν ακριβώς $2n$ κορυφές περιττού βαθμού.

$$e(G) = q + m(G).$$