Θεωρία Γραφημάτων.

1. Βασικές εισαγωγικές έννοιες.

2. Δέντρα (Γενικές ιδιότητες, Το πρόβλημα σύνδεσης, βέλτιστα επικαλυπτικά δέντρα και βέλτιστα μονοπάτια, απαρίθμηση δέντρων, Δέντρα με ρίζες, Κώδικες προθέματος και αλγόριθμος του Huffman).

3. Μονοπάτια και αποστάσεις σε γραφήματα. (Το πρόβλημα των αποστάσεων και των συντομότερων μονοπατιών, Εκκεντρικότητα κορυφών και κέντρο γραφήματος).

4. Συνεκτικότητα γραφημάτων (Γενικά περί συνεκτικότητας, Κατασκευή αξιόπιστων δικτύων με ελάχιστο αριθμό συνδέσεων).

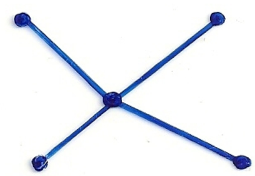
5. Hamiltonian γραφήματα (Ικανές συνθήκες για την ύπαρξη κύκλου του Hamilton σ' ένα γράφημα, Το πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή.)

6. Eulerian γραφήματα (Ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη ίχνους του Euler σ' ένα γράφημα, Το πρόβλημα του Κινέζου ταχυδρόμου.)

Κεφ. 2: Δέντρα.

Δέντρα: Συνεκτικά γραφήματα που δεν περιέχουν κύκλους.

π.χ



Θεώρημα: Για κάθε απλό γράφημα G, οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες

(1) Το G είναι δέντρο.

(2) $\forall$ $u, v \in V(G)$, $\exists$ ακριβώς ένα (u,v)-μονοπάτι.

(3) Το G είναι συνεκτικό και $v(G) = \varepsilon(G) + 1$.

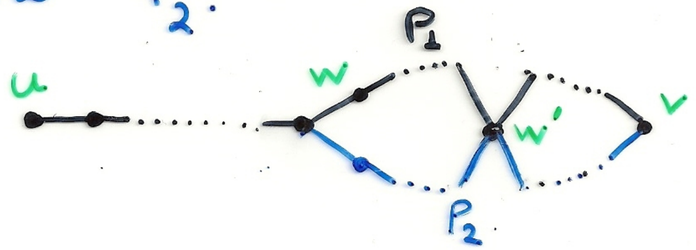
(4) Το G δεν περιέχει κύκλους και $v(G) = \varepsilon(G) + 1$.

(5) Το G δεν περιέχει κύκλους και για κάθε ζεύγος μη-γειτονικών κορυφών u και v, το γράφημα που προκύπτει από την προσθήκη της ακμής uv περιέχει ακριβώς ένα κύκλο.

Απόδειξη:

(1) ⇒ (2)
Επειδή το G είναι συνεκτικό $\forall$ $u,v \in V(G)$, υπάρχει (u,v)-μονοπάτι.

Έστω P_1, P_2 δύο διαφορετικά (u,v)-μονοπάτια και έστω w η πρώτη κορυφή του P_1 για την οποία ισχύει ότι (i) η w είναι κορυφή και των δύο μονοπατιών και (ii) η αμέσως επόμενη κορυφή της w στο P_1 δεν ανήκει στο P_2.



Έστω w' η επόμενη κοινή κορυφή των P_1, P_2 μετά την w.
Τότε τα τμήματα των P_1, P_2 που βρίσκονται μεταξύ των κορυφών w και w' αποτελούν κύκλο στο G.
Άτοπο.

(2) ⇒ (3) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\nu(G) = \varepsilon(G) + 1$.
Θα το αποδείξουμε με επαγωγή ως προς $\nu(G)$.
Εάν $\nu(G) = 1$, τότε $\varepsilon(G) = 0 = \nu(G) - 1$.
Έστω ότι το Θεώρημα ισχύει για

όλα τα γραφήματα που έχουν λιγότερες από $\nu(G)$ κορυφές.

Εάν $e \in E(G)$, θεωρούμε το γράφημα $G-\{e\}$. Προφανώς το $G-\{e\}$ είναι μη-συνεκτικό και συγκεκριμένα $\omega(G-\{e\})=2$. Έστω G_1, G_2 οι δύο συνιστώσες του $G-\{e\}$.

Από την υπόθεση της επαγωγής θα έχουμε

$$\begin{array}{l} \nu(G_1)=\varepsilon(G_1)+1 \\ \underline{\nu(G_2)=\varepsilon(G_2)+1} \quad + \\ \nu(G_1)+\nu(G_2)=\varepsilon(G_1)+\varepsilon(G_2)+2 \end{array}$$

δηλαδή $\nu(G)=\varepsilon(G)+1$

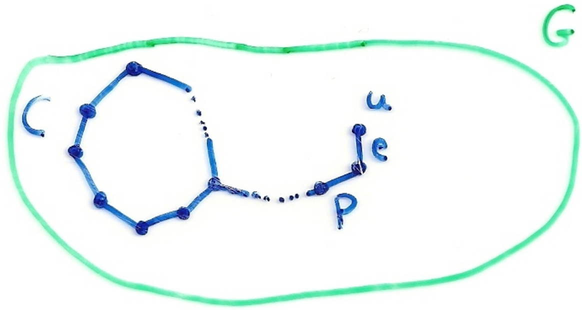
διότι $\nu(G_1)+\nu(G_2)=\nu(G)$ και $\varepsilon(G_1)+\varepsilon(G_2)+1=\varepsilon(G)$.

3) ⇒ (4) Αρκεί να αποδείξουμε ότι το G δεν περιέχει κύκλους.

Έστω ότι το G περιέχει κύκλο C μήκους n. Ονομάζουμε S το σύνολο των κορυφών του G που δεν ανήκουν στον C και S' το σύνολο των ακμών του G που δεν ανήκουν επίσης στον C. Προφανώς

$|S| = \nu(G) - n$ και $|S'| = \varepsilon(G) - n$.

Μεταξύ του S και του S' ορίζουμε την εξής αντιστοιχία:
Σε κάθε στοιχείο του S, αντιστοιχούμε την πρώτη ακμή του συντομότερου μονοπατιού που συνδέει αυτό το στοιχείο με τον C.



$u \to e$
P: συντομότερο (u, C)-μονοπάτι.

Η αντιστοιχία αυτή είναι 1-1.
Άρα

$$|S| \leq |S'|$$

επομένως $\nu(G) - n \leq \varepsilon(G) - n$,

δηλαδή $\nu(G) \leq \varepsilon(G)$ - Άτοπο.

(4) ⇒ (5) Έστω $G_1, G_2, \ldots, G_k$ συνιστώσες του G. Προφανώς τα $G_1, G_2, \ldots, G_k$ είναι δέντρα. Άρα επειδή (1) ⇒ (3),
$\forall\, i = 1, 2, \ldots, k$

$$\nu(G_i) = \varepsilon(G_i) + 1.$$

Επομένως

$$\sum_{i=1}^{k} \nu(G_i) = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon(G_i) + k$$

Άρα

$$v(G)=\varepsilon(G)+k.$$

Όμως από την (4) έχουμε ότι
$v(G)=\varepsilon(G)+1$, δηλαδή $k=1$.
Επομένως το G είναι συνεκτικό γράφημα.
Τώρα από την (4), το G δεν περιέχει κύκλους. Άρα το G είναι δέντρο.
Έστω u,v δύο μη-γειτονικές κορυφές στο G. Επειδή $(1)\Rightarrow(2)$, $\exists$ ακριβώς ένα (u,v)-μονοπάτι στο G. Η προσθήκη της ακμής uv στο G θα μας δώσει γράφημα, που περιέχει ακριβώς έναν κύκλο.

$(5)\Rightarrow(1)$

Προφανές.

Άσκηση 2.1

Έστω δέντρο T με $\Delta(T)=k$ και έστω ότι με n_i συμβολίζουμε τον αριθμό των κορυφών του που έχουν βαθμό i για $i=1,2,\ldots,k$. Να αποδειχθεί ότι

$$n_1=n_3+2n_4+3n_5+\cdots+(k-2)n_k+2.$$

Απ.

$$2|E(T)| = \sum_{x\in V(T)} d_T(x) = n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \dots + k n_k$$

Όμως $|V(T)| = |E(T)| + 1$.

και $|V(T)| = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

Άρα

$$2(n_1 + n_2 + \dots + n_k - 1) = n_1 + 2n_2 + \dots + k n_k$$

Επομένως $n_1 = n_3 + \dots + (k-2)n_k + 2$.

Το πρόβλημα σύνδεσης.

Έστω συνεκτικό γράφημα G και έστω συνάρτηση $w : E(G) \to \mathbb{R}^+$.
Θέλουμε να βρούμε ένα επικαλυπτικό δέντρο T του G, για το οποίο το $\sum_{e\in E(T)} w(e)$ είναι όσο το δυνατόν μικρότερο.

Ένα τέτοιο επικαλυπτικό δέντρο ονομάζεται βέλτιστο (optimal) επικαλυπτικό δέντρο του G.

Αλγόριθμος του Kruskal (1956).

(1). Επιλέγουμε μια ακμή e_1 έτσι ώστε το $w(e_1)$ να είναι ελάχιστο.

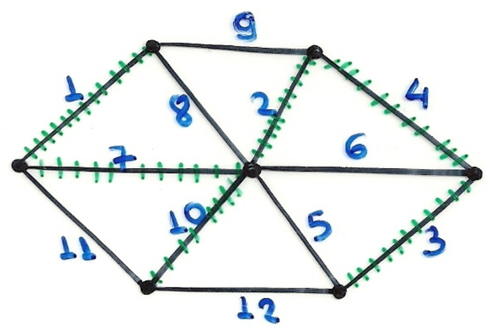
(2). Εάν οι ακμές $e_1, e_2, \ldots, e_i$ έχουν επιλεγεί, τότε επιλέγουμε ακμή e_{i+1} από το σύνολο $E - \{e_1, \ldots, e_i\}$ έτσι ώστε:

(i) $G[\{e_1, e_2, \ldots, e_{i+1}\}]$ δεν περιέχει κύκλους

(ii) $w(e_{i+1})$ είναι ελάχιστο ως προς (i).

(3). Η διαδικασία διακόπτεται όταν το (2) δεν μπορεί να εκτελεσθεί.

Άσκηση.



1
2
3
4
7
10

Θεώρημα: Κάθε επικαλυπτικό δένδρο $T^* = G[\{e_1, e_2, \ldots, e_{v-1}\}]$ ενός γραφήματος G, το οποίο προκύπτει από τον αλγόριθμο του Kruskal είναι optimal.

Αποδ. Έστω ότι το T^* δεν είναι optimal. Τότε θα υπάρχει επικαλυπτικό δέντρο S του G, έτσι ώστε

$$\sum_{e \in E(S)} w(e) < \sum_{e \in E(T^*)} w(e)$$

Έστω e_k η πρώτη ακμή της ακολουθίας $e_1, e_2, \ldots, e_{v-1}$ που δεν ανήκει στο S.

Το γράφημα $S+\{e_k\}$ θα περιέχει ακριβώς έναν κύκλο, έστω τον C.
Στον κύκλο C υπάρχει ακμή e_ℓ που ανήκει στο S και δεν ανήκει στο T^*.
Θεωρούμε το γράφημα $(S+\{e_k\})-\{e_\ell\}=S'$
Προφανώς το S' είναι επικαλυπτικό δέντρο του G.
Όμως από τον τρόπο κατασκευής του T^*, $w(e_\ell) \geq w(e_k)$. Άρα

$$\sum_{e \in E(S')} w(e) \leq \sum_{e \in E(S)} w(e).$$

Εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία, αλλάζοντας μια ακμή κάθε φορά, μπορούμε να πάρουμε από το S το T^*.

Κατά την διάρκεια αυτής της διαδικασίας το συνολικό βάρος δεν αυξάνεται, άρα

$$\sum_{e\in E(S)} w(e) \geq \sum_{e\in E(T^*)} w(e) \quad \text{ΑΤΟΠΟ}$$

Άσκηση 2.5.

Να αποδειχθεί ότι:
Μια ακολουθία $d_1, d_2, \ldots, d_n$ θετικών ακέραιων (όπου $n\geq 2$) αποτελεί την ακολουθία βαθμών ενός δέντρου $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} d_i = 2n-2$.

Απ. $\Rightarrow$

Έστω ότι $d_1, d_2, \ldots, d_n$ αποτελεί την ακολουθία βαθμών ενός δέντρου T. Τότε

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2|E(T)| = 2(|V(T)|-1) = 2n-2.$$

$\Leftarrow$

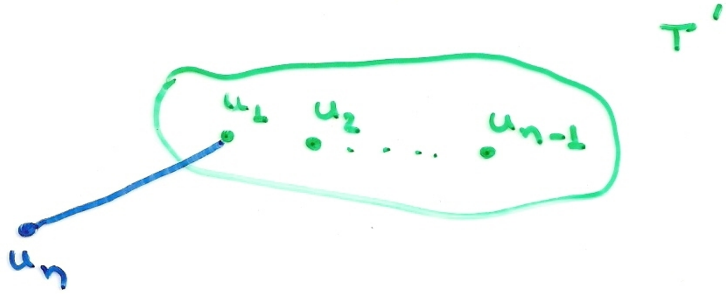
Θα το αποδείξουμε με επαγωγή.
Εάν $n=2$, τότε $\sum_{i=1}^{2} d_i = 2$. Άρα $d_1 = 1$ και $d_2 = 1$. Το δέντρο K_2 έχει μια τέτοια ακολουθία βαθμών.
Έστω ακολουθία $d_1, d_2, \ldots, d_n$ θετικών ακέραιων με $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n-2$ και έστω

$d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$.

Θα έχουμε ότι $d_{n-1} = d_n = 1$ και $n-1 \geq d_1 \geq 2$. Επομένως η ακολουθία

$$d_1 - 1, d_2, \dots, d_{n-1}$$ θα είναι μια ακολουθία $n-1$ θετικών ακέραιων όπου το άθροισμά τους θα ισούται με $2n-4$.

Από την υπόθεση της επαγωγής υπάρχει δέντρο T' που έχει τους $d_1 - 1, d_2, \dots, d_{n-1}$ ως ακολουθία βαθμών του.



$d_{T'}(u_1) = d_1 - 1$

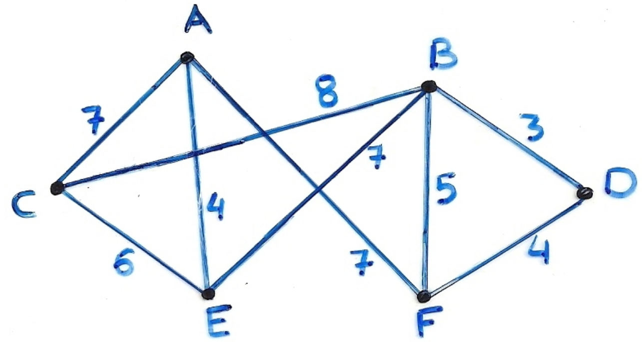
$d_{T'}(u_2) = d_2$

$\vdots$

$d_{T'}(u_{n-1}) = d_{n-1}$

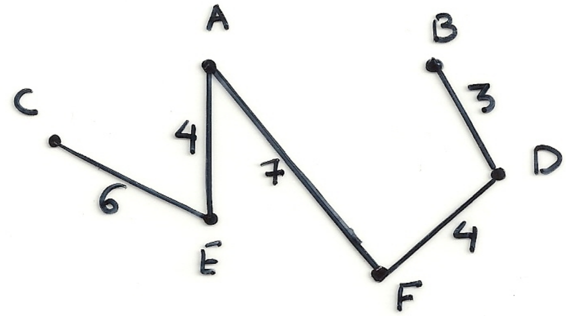
Το παραπάνω δέντρο T θα έχει ως ακολουθία βαθμών του, την $d_1, d_2, \dots, d_{n-1}, d_n$.

Άσκηση 2.3



Αλγόριθμος Kruskal

BD
DF
AE
CE
AF



Αλγόριθμος του Prim [1957]

(1) Επιλέγουμε μια οποιαδήποτε κορυφή u_1 του G και ορίζουμε δένδρο $T_1=(V_1,E_1)$ όπου $V_1=\{u_1\}$ και $E_1=\varnothing$.

(2) Εάν έχει ορισθεί δένδρο $T_k=(V_k,E_k)$, επιλέγουμε ακμή e_k έτσι ώστε,

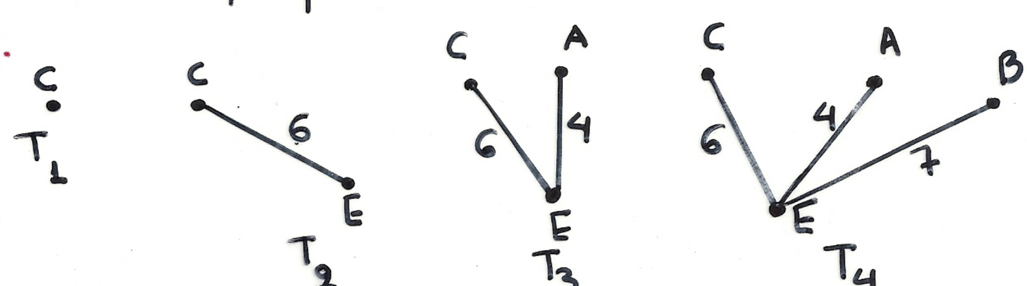
(i) το ένα άκρο της e_k να ανήκει στο V_k και το άλλο, έστω το u_{k+1}, στο $V(G)-V_k$,

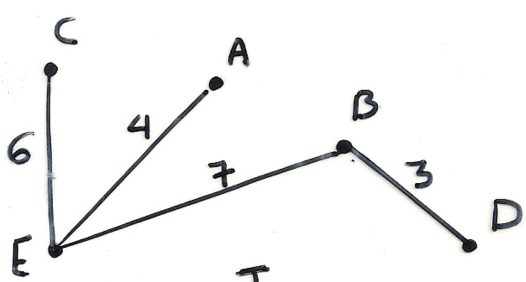
(ii) το $w(e_k)$ να είναι ελάχιστο ως προς το (i).

Ορίζουμε δένδρο $T_{k+1}=(V_{k+1},E_{k+1})$, όπου $V_{k+1}=V_k\cup\{u_{k+1}\}$ και $E_{k+1}=E_k\cup\{e_k\}$.

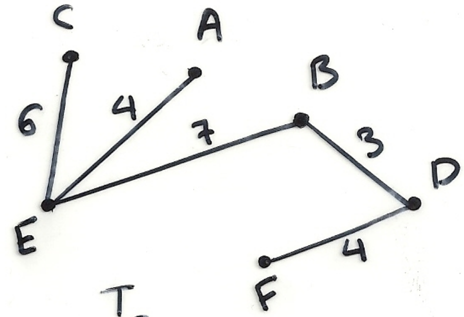
(3) Το βήμα διακόπτεται όταν $k=|V(G)|=\nu$.

Π.χ.





T_5

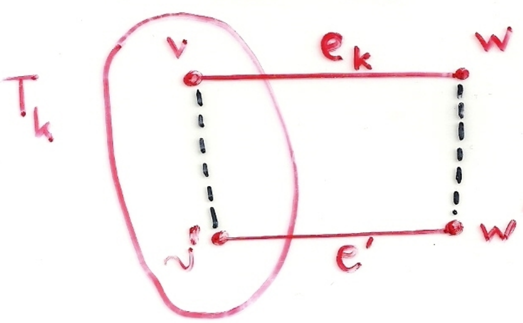


T_6

Θεώρημα: Κάθε δένδρο T_k ($k=1,2,\dots,\nu$) στον αλγόριθμο του Prim περιέχεται σε κάποιο optimal δένδρο T του G.

Απόδειξη: Προφανώς η πρόταση ισχύει για $k=1$. Έστω τώρα ότι το δένδρο T_k περιέχεται σε κάποιο optimal δένδρο T του G και έστω ότι $E(T_{k+1}) = E(T_k) \cup \{e_k\}$

όπου η e_k έχει για άκρα της τις κορυφές v και w.



Έστω ότι η e_k δεν περιέχεται στο optimal δένδρο T. Επειδή το T είναι συνεκτικό γράφημα, $\exists$ (v,w)-μονοπάτι στο T, και επομένως υπάρχει ακμή e' μ' ένα άκρο στο $V(T_k)$ και το άλλο στο $V(G)-V(T_k)$. Από τον τρόπο κατασκευής του T_{k+1},

$w(e') \geq w(e_k)$. Ορίζουμε το δένδρο

$$T' = (T - \{e'\}) + \{e_k\}.$$ Το T' είναι optimal δένδρο του G, το οποίο περιέχει το T_{k+1}.

Minimax μονοπάτι.

Έστω γράφημα G και έστω συνάρτηση $w: E(G) \to \mathbb{R}^+$. Εάν u, v κορυφές του G, με $P(u,v)$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των (u,v)-μονοπατιών στο G.

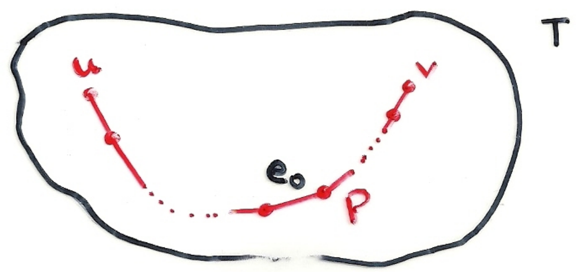
Ένα στοιχείο P του $P(u,v)$ θα ονομάζεται **minimax (u,v)-μονοπάτι** εάν

$$\max_{e \in E(P)} w(e) = \min_{P' \in P(u,v)} \max_{e \in E(P')} w(e)$$

Θεώρημα: (Bardadym 1990). Έστω γράφημα G, συνάρτηση $w: E(G) \to \mathbb{R}^+$ και έστω T βέλτιστο επικαλυπτικό δέντρο του G. Εάν $u, v \in V(G)$, το μοναδικό (u,v)-μονοπάτι που υπάρχει στο T αποτελεί ένα minimax (u,v)-μονοπάτι για το γράφημα G.

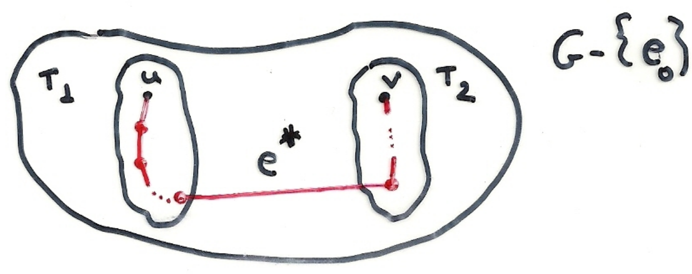
Απόδειξη: Ας ονομάσουμε P το μοναδικό (u,v)-μονοπάτι που υπάρχει στο T.
Έστω $w_0 = \max_{e \in E(P)} w(e)$ και έστω ότι το P δεν αποτελεί minimax (u,v)-μονοπάτι για το γράφημα G. Εάν P^* minimax (u,v)-μονοπάτι στο G και $w^* = \max_{e \in E(P^*)} w(e)$, θα έχουμε $w^* < w_0$.

Έστω $e_0 \in E(P)$ με $w(e_0)=w_0$.



Θεωρούμε το γράφημα $T-\{e_0\}$.

Το $T-\{e_0\}$ θα είναι ένα μη-συνεκτικό επικαλυπτικό υπογράφημα του G που αποτελείται από δύο συνιστώσες, την T_1 και την T_2.
Η ακμή e_0 που διαγράψαμε δεν ανήκει στο P^* (διότι $w^* < w_0$ και $w^* = \max_{e \in E(P^*)} w(e)$). Άρα το P^* θα υπάρχει και στο γράφημα $G-\{e_0\}$.



Επομένως υπάρχει ακμή e^* του P^* στο $G-\{e_0\}$ μ' ένα άκρο στο $V(T_1)$ και το άλλο στο $V(T_2)$. Το γράφημα $H=(T-\{e_0\})+\{e^*\}$ είναι επικαλυπτικό δέντρο του G.

Για το H έχουμε

$$\sum_{e\in E(H)} w(e) = \sum_{e\in E(T)} w(e) - w(e_0) + w(e^*).$$

Όμως $\xrightarrow{w_0}$ $w(e_0) > w^* \geq w(e^*)$. Άρα

$$\sum_{e\in E(H)} w(e) < \sum_{e\in E(T)} w(e)$$

ΑΤΟΠΟ διότι T optimal επικαλυπτικό δέντρο του G.

Απαρίθμηση δέντρων.

Θεώρημα: Έστω $d_1, d_2, \ldots, d_n$ θετικοί ακέραιοι με $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n-2$, όπου $n \geq 2$. Ο αριθμός των δέντρων T που έχουν το $V = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ ως σύνολο κορυφών τους και για τα οποία ισχύει $d_i = d_T(u_i)$ $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ ισούται με

$$\frac{(n-2)!}{(d_1-1)!(d_2-1)!\ldots(d_n-1)!}$$