Ειδικά Θέματα Επιχειρησιακής Έρευνας
Ενδεικτικές λύσεις 3ης Σειράς Ασκήσεων

---

1. **Η μετοχή μιας εταιρίας μεταβάλλεται κάθε λεπτό με τον εξής τρόπο: εάν η τρέχουσα τιμή της είναι 10 τότε το επόμενο λεπτό γίνεται 11 ή 9 με ίση πιθανότητα. Εάν η τιμή είναι 11 τότε το επόμενο λεπτό γίνεται 12 με πιθανότητα 3/4 ή 10 με πιθανότητα 1/4. Εάν η τιμή είναι 9 τότε η τιμή γίνεται 10 με πιθανότητα 2/3 ή 8 με πιθανότητα 1/3. Εάν η τιμή είναι 12 τότε το επόμενο λεπτό γίνεται 11. Εάν η τιμή είναι 8 τότε το επόμενο λεπτό γίνεται 10.**

Η τιμή της μετοχής κάθε λεπτό μεταβάλλεται σύμφωνα με μια αλυσίδα Markov με σύνολο καταστάσεων $\{8, 9, 10, 11, 12\}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

όπου στην 1η γραμμή δίνονται οι πιθανότητες μετάβασης από την κατάσταση 8, στη 2η γραμμή οι πιθανότητες μετάβασης από την κατάσταση 9, κοκ.

(α΄) **Βρείτε τη μέση τιμή της μετοχής εάν πριν 2 λεπτά είχε τιμή 10.**

Έστω X_n η τιμή της μετοχής στο n-οστό λεπτό, $n = 0, 1, \ldots$ Ζητείται να υπολογιστεί η δεσμευμένη μέση τιμή

$$E(X_2|X_0 = 10) = \sum_{j\in\{8,\ldots,12\}} jP(X_2 = j|X_0 = 10)\,, \tag{1}$$

συνεπώς θα υπολογίσουμε τις *πιθανότητες μετάβασης σε δύο βήματα* οι οποίες βρίσκονται στην 3η γραμμή του πίνακα

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{11}{24} & 0 & \frac{3}{8} \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{7}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

Άρα,

$$E(X_2|X_0 = 10) = 8\cdot\frac{1}{6} + 10\cdot\frac{11}{24} + 12\cdot\frac{3}{8} = \frac{125}{12} \approx 10.42\,.$$

(β΄) **Υποθέστε ότι παρατηρείτε τις τιμές που λαμβάνει η μετοχή για ένα διάστημα 10000 λεπτών. Ποιά είναι (προσεγγιστικά) η κατά μέσο όρο τιμή της μετοχής στο διάστημα αυτό;**

Εφόσον πρόκειται για ένα χρονικό διάστημα που περιλαμβάνει πολλά βήματα της αλυσίδας, η μέση τιμή της μετοχής είναι προσεγγιστικά ίση με $\sum_{i\in\{8,\ldots,12\}} i\pi_i$, όπου π_i είναι το ποσοστό του χρόνου όπου η τιμή της μετοχής ήταν i στο διάστημα των 10000 λεπτών. Εφόσον η αλυσίδα είναι συνδεδεμένη (σχήμα!), τα π_i είναι η μοναδική στάσιμη κατανομή, δηλαδή ικανοποιούν

$$\begin{cases} \pi_8 = \frac{1}{3}\pi_9 \\ \pi_9 = \frac{1}{2}\pi_{10} \\ \pi_{10} = \pi_8 + \frac{2}{3}\pi_9 + \frac{1}{4}\pi_{11} \\ \pi_{11} = \frac{1}{2}\pi_{10} + \pi_{12} \\ \pi_{12} = \frac{3}{4}\pi_{11} \end{cases}$$

και $\sum_{i\in\{8,\ldots,12\}} \pi_i = 1$. Λύνοντας βρίσκουμε

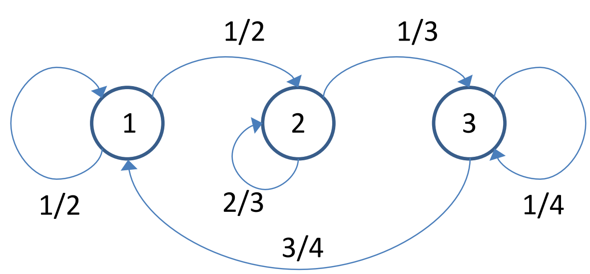
$$\pi_8 = \frac{1}{31}, \pi_9 = \frac{3}{31}, \pi_{10} = \frac{6}{31}, \pi_{11} = \frac{12}{31}, \pi_{12} = \frac{9}{31}.$$

Άρα $\sum_{i\in\{8,\ldots,12\}} i\pi_i = 335/31 \approx 10.81$.

2. **Μια πηγή ψηφιακής πληροφορίας κάθε μsec($=10^{-6}$ sec) βρίσκεται σε μία από τρείς διαφορετικές καταστάσεις:**

   - **Στην κατάσταση 1, όπου μεταδίδει ένα bit 1. Στο επόμενο μsec η κατάσταση παραμένει 1 ή γίνεται 2 με ίση πιθανότητα.**
   - **Στην κατάσταση 2 η πηγή μεταδίδει πάλι ένα bit 1. Στο επόμενο μsec η κατάσταση παραμένει 2 με πιθανότητα 2/3, αλλιώς γίνεται 3.**
   - **Στην κατάσταση 3 η πηγή μεταδίδει ένα bit 0 και είτε μεταβαίνει στην κατάσταση 1 με πιθανότητα 3/4 ή παραμένει στην ίδια.**

   Η κατάσταση της πηγής μεταβάλλεται κάθε μsec σύμφωνα με την αλυσίδα Markov με γράφημα πιθανοτήτων μετάβασης:



   (α′) **Βρείτε το ποσοστό των 1 και 0 που μεταδίδονται μέσα σε ένα λεπτό από την πηγή πληροφορίας.**

   Εφόσον πρόκειται για ένα χρονικό διάστημα που περιλαμβάνει πολλά βήματα της αλυσίδας, το ποσοστό του χρόνου που μεταδίδονται 1 (0) είναι προσεγγιστικά ίσο με $\pi_1 + \pi_2$ (αντίστοιχα π_3), όπου π_i είναι το ποσοστό του χρόνου όπου η πηγή βρέθηκε στην κατάσταση i στο διάστημα του ενός λεπτού. Εφόσον η αλυσίδα είναι συνδεδεμένη, τα π_i είναι η μοναδική στάσιμη κατανομή, δηλαδή ικανοποιούν

$$\begin{cases} \pi_1 = \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{3}{4}\pi_3 \\ \pi_2 = \frac{2}{3}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_1 \\ \pi_3 = \frac{1}{4}\pi_3 + \frac{1}{3}\pi_2 \end{cases} \text{ και } \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1\,.$$

Λύνοντας βρίσκουμε

$$\pi_1 = \frac{6}{19}, \pi_2 = \frac{9}{19}, \pi_3 = \frac{4}{19}\,,$$

άρα το ποσοστό του χρόνου που μεταδίδονται 1 είναι $\frac{15}{19} \approx 78.9\%$.

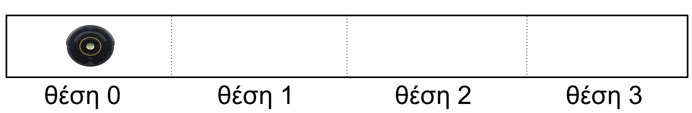
(β΄) **Ποιό είναι το μέσο πλήθος *συνεχόμενων* bit με τιμή 1 που μεταδίδονται από την πηγή πληροφορίας;**

Η πηγή αρχίζει να μεταδίδει 1 όταν εισέλθει στην κατάσταση 1 και σταματάει όταν εισέλθει στην 3. Συνεπώς, το μέσο πλήθος των συνεχόμενων 1 είναι το μέσο πλήθος βημάτων της αλυσίδας μέχρι να επισκεφτεί την 3 αρχίζοντας από την 1. Ορίζοντας $T_i =$'μέσο πλήθος βημάτων μέχρι επίσκεψη στην 3 αρχίζοντας από την i', έχουμε τις εξισώσεις

$$\begin{cases} T_1 = 1 + \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}T_2 \\ T_2 = 1 + \frac{2}{3}T_2 + \frac{1}{3}T_3 \\ T_3 = 0 \end{cases},$$

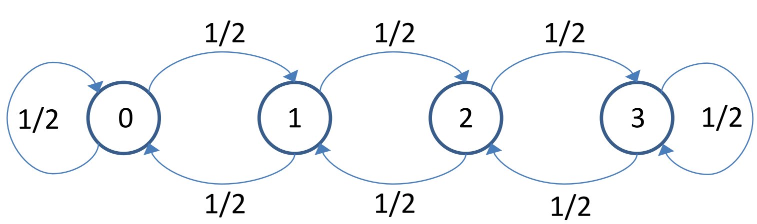
όπου λύνοντας βρίσκουμε $T_1 = 5$. Δηλαδή, μεταδίδονται κατά μέση τιμή 5 συνεχόμενα 1.

3. **Αυτό το θέμα αφορά μια ρομποτική σκούπα η οποία κάθε λεπτό μετακινείται μεταξύ τεσσάρων διακριτών θέσεων κατά μήκος ενός διαδρόμου 4 μέτρων:**



Η σκούπα μετακινείται κατά μια θέση είτε προς τα αριστερά είτε προς τα δεξιά με ίση πιθανότητα. Στις ακραίες θέσεις η σκούπα παραμένει στην ίδια θέση με πιθανότητα 50%. Θεωρήστε ότι αρχικά η σκούπα βρίσκεται στην αριστερότερη θέση (θέση 0).

Η θέση της σκούπας μεταβάλλεται κάθε λεπτό σύμφωνα με την αλυσίδα Markov με γράφημα πιθανοτήτων μετάβασης:



(α′) **Βρείτε την πιθανότητα να καλύψει όλο τον διάδρομο κάποτε. (Δικαιολογήστε την απάντησή σας.)**

Για να καλύψει τον διάδρομο θα πρέπει αρχίζοντας από την 0 η αλυσίδα να επισκεφτεί την 3. Λόγω του ότι η αλυσίδα είναι συνδεδεμένη, η πιθανότητα επίσκεψης σε οποιαδήποτε κατάσταση (άρα και στην 3) είναι 1 οπουδήποτε και αν αρχίσει η αλυσίδα (άρα και από την 0).

(β′) **Βρείτε τον μέσο χρόνο μέχρι η σκούπα να επιστρέψει στην αρχική της θέση αφού καλύψει όλο τον διάδρομο.**

Ο μέσος χρόνος μέχρι η αλυσίδα να επιστρέψει στην αρχική της θέση αφού καλύψει όλο τον διάδρομο είναι ίσος με το άθροισμα

i. του μέσου χρόνου T_0 έως την πρώτη επίσκεψη στην 3 αρχίζοντας από την 0 και
ii. του μέσου χρόνου έως την επιστροφή στην 0 αρχίζοντας από την 3.

Λόγω συμμετρίας του γραφήματος μεταβάσεων, ο 2ος χρόνος είναι ίσος με τον 1ο. Άρα, ο ζητούμενος χρόνος ισούται με $2T_0$.

Ορίζοντας T_i =‘μέσο πλήθος βημάτων μέχρι επίσκεψη στην 3 αρχίζοντας από την i’, έχουμε τις εξισώσεις

$$\begin{cases} T_0 = 1 + \dfrac{1}{2}T_0 + \dfrac{1}{2}T_1 \\ T_1 = 1 + \dfrac{1}{2}T_0 + \dfrac{1}{2}T_2 \\ T_2 = 1 + \dfrac{1}{2}T_1 + \dfrac{1}{2}T_3 \\ T_3 = 0 \end{cases},$$

όπου λύνοντας βρίσκουμε $T_0 = 12$.

Άρα η σκούπα επιστρέφει στην αρχική της θέση αφού καλύψει τον διάδρομο σε μέσο χρόνο 24 λεπτά.

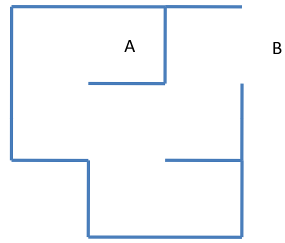
(γ′) **Δείξτε ότι εάν αφήνατε τη σκούπα να δουλεύει συνεχώς, κάθε θέση του διαδρόμου θα καλύπτονταν με την ίδια συχνότητα.**

Εφόσον η αλυσίδα είναι συνδεδεμένη, η συχνότητα επίσκεψης σε κάθε κατάσταση δίδεται από τη μοναδική στάσιμη κατανομή $\pi_i, i = 0, \dots, 3$, δηλαδή θετικούς αριθμούς π_i που ικανοποιούν

$$\begin{cases} \pi_0 = \dfrac{1}{2}\pi_0 + \dfrac{1}{2}\pi_1 \\ \pi_1 = \dfrac{1}{2}\pi_0 + \dfrac{1}{2}\pi_2 \\ \pi_2 = \dfrac{1}{2}\pi_1 + \dfrac{1}{2}\pi_3 \\ \pi_3 = \dfrac{1}{2}\pi_2 + \dfrac{1}{2}\pi_3 \end{cases} \text{ και } \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \,.$$

Αρκεί να επιβεβαιώσουμε ότι η $\pi_i = \frac{1}{4}, i = 0, \dots, 3$ είναι στάσιμη κατανομή.

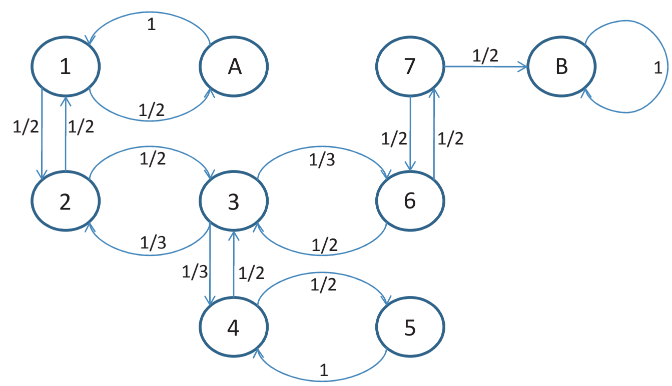
4. **Ένα ρομποτικό ποντίκι βρίσκεται στο σημείο A στον λαβύρινθο του σχήματος:**



Σε κάθε τοποθεσία, το ποντίκι επιλέγει μία απο τις διαθέσιμες κατευθύνσεις με ίση πιθανότητα και ανεξάρτητα από προηγούμενες επιλογές, στην οποία θα κινηθεί στο επόμενο βήμα. Για παράδειγμα, στο πρώτο βήμα το ποντίκι θα μετακινηθεί στη θέση αριστερά του σημείου A, ενώ στο δεύτερο βήμα το ποντίκι θα μετακινηθεί είτε κάτω (με πιθανότητα 1/2) είτε πίσω στο A (με πιθανότητα 1/2).

(α΄) **Βρείτε τον μέσο αριθμό βημάτων που απαιτούνται για να εξέλθει το ποντίκι από τον λαβύρινθο, δηλ. να μετακινηθεί στο σημείο B.**

Η τυχαία κίνηση του ποντικιού ακολουθεί την αλυσίδα Markov με γράφημα πιθανοτήτων μετάβασης:



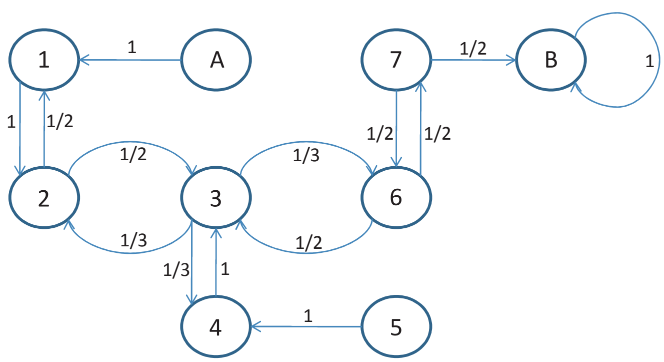
Ο μέσος αριθμός βημάτων ώστε το ποντίκι να αποδράσει από τον λαβύρινθο είναι $E($χρόνος επίσκεψης της B$|X_0 = A)$. Έστω $T_i = E($χρόνος επίσκεψης της B$|X_0 = i)$ για κάθε κατάσταση i. Τα T_i ικανοποιούν

$$
\begin{aligned}
T_B &= 0\\
T_A &= 1 + T_1\\
T_1 &= 1 + \frac{1}{2}T_A + \frac{1}{2}T_2\\
T_2 &= 1 + \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}T_3\\
T_3 &= 1 + \frac{1}{3}T_2 + \frac{1}{3}T_4 + \frac{1}{3}T_6\\
T_4 &= 1 + \frac{1}{2}T_3 + \frac{1}{2}T_5\\
T_5 &= 1 + T_4\\
T_6 &= 1 + \frac{1}{2}T_3 + \frac{1}{2}T_7\\
T_7 &= 1 + \frac{1}{2}T_6 + \frac{1}{2}T_B
\end{aligned}
$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων αυτό βρίσκουμε $T_A = 44$, δηλαδή το ποντίκι θα αποδράσει κατά μέσο όρο σε 44 βήματα.

(β΄) **Ένα άλλο πιο εξελιγμένο ρομποτικό ποντίκι έχει τη δυνατότητα να βλέπει τις διαθέσιμες κατευθύνσεις όχι μόνο της τρέχουσας θέσης του, αλλά και αυτές των γειτονικών τοποθεσιών. Για παράδειγμα, όταν το ποντίκι βρεθεί στη θέση αριστερά του A, το ποντίκι δε θα μετακινηθεί στο A αφού βλέπει ότι η θέση A είναι αδιέξοδο, δηλ. η μόνη δυνατή κατεύθυνση είναι αυτή που οδηγεί πίσω στην τρέχουσα θέση. Να βρεθεί ο μέσος αριθμός βημάτων για να εξέλθει από τον λαβύρινθο το εξελιγμένο ποντίκι.**

Σε αυτή την περίπτωση η αλυσίδα Markov είναι η εξής:

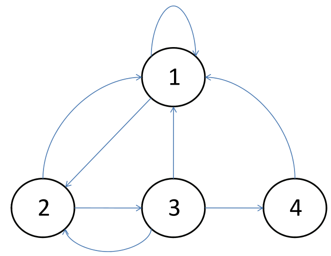


Εάν ορίσουμε τους μέσους χρόνους T_i όπως στο προηγούμενο υποερώτημα, εδώ παίρνουμε τις εξής εξισώσεις:

$$
\begin{aligned}
T_B &= 0 \\
T_A &= 1 + T_1 \\
T_1 &= 1 + T_2 \\
T_2 &= 1 + \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}T_3 \\
T_3 &= 1 + \frac{1}{3}T_2 + \frac{1}{3}T_4 + \frac{1}{3}T_6 \\
T_4 &= 1 + T_3 \\
T_5 &= 1 + T_4 \\
T_6 &= 1 + \frac{1}{2}T_3 + \frac{1}{2}T_7 \\
T_7 &= 1 + \frac{1}{2}T_6 + \frac{1}{2}T_B
\end{aligned}
$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων αυτό βρίσκουμε $T_A = 27$, δηλαδή το εξελιγμένο ποντίκι θα αποδράσει κατά μέσο όρο σε 27 βήματα.

5. **Θεωρήστε την αλυσίδα Markov που δίνεται από το σχήμα. (Οι μεταβάσεις έξω από κάθε κατάσταση έχουν ίση πιθανότητα.)**



(α′) **Υπολογίστε το μέσο πλήθος βημάτων μέχρι την πρώτη επίσκεψη της αλυσίδας στην κατάσταση 4 αρχίζοντας από την κατάσταση 3.**

Εάν $T_i = E(\text{χρόνος επίσκεψης της } 4|X_0 = i)$ για κάθε κατάσταση i, τότε ισχύει:

$$\begin{aligned}
T_4 &= 0 \\
T_1 &= 1 + \frac{1}{2}T_2 \\
T_2 &= 1 + \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}T_3 \\
T_3 &= 1 + \frac{1}{3}T_1 + \frac{1}{3}T_2 + \frac{1}{3}T_4
\end{aligned}$$

Λύνοντας βρίσκουμε $T_3 = 13$.

(β′) **Υπολογίστε την πιθανότητα η αλυσίδα να επισκεφτεί την κατάσταση 2 ακριβώς δύο φορές πρίν επισκεφτεί την 4, εάν η αλυσίδα αρχίσει από την 1.**

Παρατηρήστε ότι για να συμβεί το ζητούμενο γεγονός, πρέπει η αλυσίδα να επισκεφτεί μια φορά τη 2, μετά να την ξαναεπισκεφτεί (από το επόμενο βήμα και μετά) και τέλος, από την 2 να επισκεφτεί την 4 πρίν χτυπήσει τη 2 (από το επόμενο βήμα). Άρα η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$\begin{aligned}
&P(\text{επίσκεψης της 2 πρίν την } 4|X_0 = 1) \\
&\qquad \cdot P(\text{επίσκεψης της 2 πρίν την 4 (από το επόμενο βήμα και μετά)}|X_0 = 2) \\
&\qquad\qquad \cdot P(\text{επίσκεψης της 4 πρίν την 2 (από το επόμενο βήμα και μετά)}|X_0 = 2)\,. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Επίσης παρατηρήστε ότι οι τελευταίες δύο πιθανότητες είναι συμπληρωματικές, δηλαδή, $P(\text{επίσκεψης της 2 πρίν την 4 (από το επόμενο βήμα και μετά)}|X_0 = 2) = 1 - P(\text{επίσκεψης της 4 πρίν την 2 (από το επόμενο βήμα και μετά) }|X_0 = 2)$.

Τώρα, $P(\text{επίσκεψης της 2 πρίν την } 4|X_0 = 1) = 1$ όπως είναι προφανές από το γράφημα. Επίσης, αρχίζοντας από τη 2, η αλυσίδα θα επισκεφθεί την 4 πρίν τη 2 εάν και μόνο εάν ακολουθήσει το μονοπάτι $2 \to 3 \to 4$. Αυτό θα συμβεί με πιθανότητα $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Άρα έχουμε, $P(\text{επίσκεψης της 2 πρίν την 4 (από το επόμενο βήμα και μετά)}|X_0 = 2) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. Βάζοντας αυτές τις τιμές στην έκφραση (2), παίρνουμε τη ζητούμενη πιθανότητα $1 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$.

6. **Σε αυτή την άσκηση θα μελετήσουμε την επίπτωση της χρονικής (temporal) και χωρικής (spatial) συσχέτισης (locality) στη συχνότητα αποτυχημένης αναζήτησης σε μια μνήμη cache, δηλαδή τη συχνότητα των cache miss.**

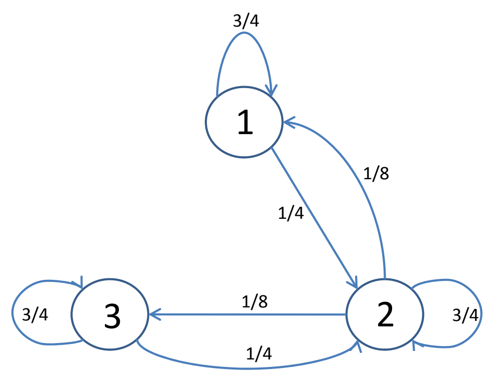
   Για απλότητα θα θεωρήσουμε μια μνήμη cache 2 θέσεων, ενώ η CPU αναφέρεται σε 3 διακριτά αντικείμενα. Άρα σε κάθε χρονική στιγμή βρίσκονται ακριβώς δύο από αυτά στην cache, ενώ το άλλο στην κυρίως μνήμη. Όταν γίνει αναφορά στο

αντικείμενο που βρίσκεται μόνο στην κεντρική μνήμη, το αντικείμενο μεταφέρεται στην cache αντικαθιστώντας το αντικείμενο στο οποίο έχει γίνει αναφορά λιγότερο προσφάτως. Δηλαδή, χρησιμοποιείται η πολιτική αντικατάστασης Least Recently Used (LRU).

(α′) **Ανεξάρτητες και ομοιόμορφες αναφορές. Θεωρήστε ότι η ακολουθία αναφορών είναι η $A_0, A_1, \ldots$, οι οποίες είναι ανεξάρτητες και ισοκατανεμημένες με $P(A_n = i) = 1/3$ για κάθε αντικείμενο $i = 1, 2, 3$ και κάθε $n = 0, 1, \ldots$. Βρείτε την πιθανότητα cache miss, δηλ. να γίνει αναφορά σε αντικείμενο που δε βρίσκεται στην cache.**

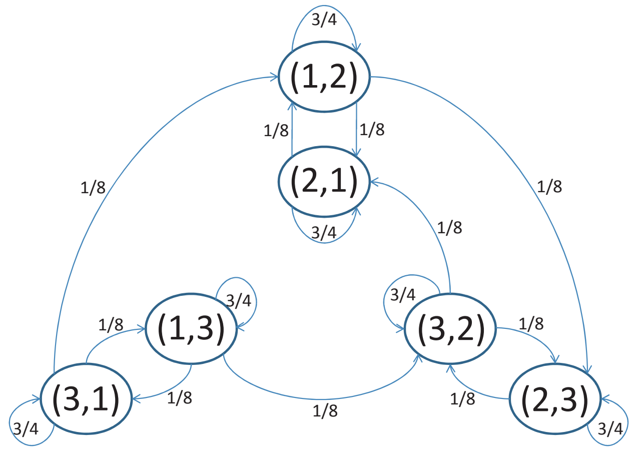
Οποιαδήποτε αντικείμενα και εάν βρίσκονται στην cache, η πιθανότητα να γίνει αναφορά στο αντικείμενο εκτός της cache (δηλ. να γίνει ένα miss) είναι $1/3$, αφού κάθε αναφορά είναι ανεξάρτητη από τις αναφορές που έγιναν στο παρελθόν (άρα και από τα περιεχόμενα της cache).

(β′) **Αναφορές με χωρική και χρονική συσχέτιση. Θεωρήστε ότι η ακολουθία αναφορών $A_0, A_1, \ldots$ είναι η Α.Μ.:**



Βρείτε την πιθανότητα cache miss. (βοήθεια: τα αντικείμενα που περιέχονται στην cache, και το ποιό από τα δύο είναι λιγότερο πρόσφατο, αποτελούν μια Α.Μ. Βρείτε τη στάσιμη κατανομή...)

Θα θεωρήσουμε μια αλυσίδα Markov που περιγράφει τα περιεχόμενα της cache μετά από κάθε αναφορά. Κάθε κατάσταση της αλυσίδας αυτής αποτελείται από τη λίστα των αντικειμένων που βρίσκονται στην cache καθώς και ποιό από αυτά είναι πιο πρόσφατο. Εάν η cache περιέχει τα αντικείμενα i και j όπου πιο πρόσφατη αναφορά έχει γίνει στο i τότε συμβολίζουμε την κατάσταση αυτή με (j, i). Για παράδειγμα εάν στην κατάσταση αυτή γίνει αναφορά στο j, τότε η επόμενη κατάσταση είναι η (i, j) ενώ εάν γίνει αναφορά στο i τότε η αλυσίδα παραμένει στην ίδια κατάσταση. Από το γράφημα της αλυσίδας Markov που περιγράφει την ακολουθία των αναφορών, μπορούμε να βρούμε τις πιθανότητες μετάβασης από την κατάσταση (i, j). Για παράδειγμα, εάν η αλυσίδα βρίσκεται στην κατάσταση $(1, 2)$, τότε η επόμενη αναφορά θα είναι για το αντικείμενο 3 με πιθανότητα $1/8$, αφού η τελευταία αναφορά ήταν για το αντικείμενο 2. Δηλαδή, επόμενη κατάσταση γίνεται η $(2, 3)$ με πιθανότητα $1/8$. Με τον ίδιο συλλογισμό μπορούμε να κατασκευάσουμε τις πιθανότητες μετάβασης μεταξύ όλων των καταστάσεων:



Επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός της στάσιμης κατανομής π για αυτή την αλυσίδα. Παρατηρήστε ότι εάν η αλυσίδα αρχίσει από τις καταστάσεις $(3,1),(1,3)$ τότε μετά από έναν τυχαίο (αλλά πεπερασμένο) χρόνο, η αλυσίδα δε θα επιστρέψει ποτέ σε αυτές τις καταστάσεις. Άρα, $\pi_{(3,1)} = \pi_{(1,3)} = 0$. Άρα, εφόσων μας ενδιαφέρει η στάσιμη κατανομή μπορούμε να θεωρήσουμε την αλυσίδα που αποτελείται από τις υπόλοιπες καταστάσεις, αγνοώντας τις $(3,1),(1,3)$. Για αυτή την αλυσίδα ισχύουν οι εξισώσεις ισορροπίας:

$$\begin{aligned}
\pi_{(1,2)} &= \frac{3}{4}\pi_{(1,2)} + \frac{1}{4}\pi_{(2,1)} \\
\pi_{(2,1)} &= \frac{3}{4}\pi_{(2,1)} + \frac{1}{8}\pi_{(1,2)} + \frac{1}{8}\pi_{(3,2)} \\
\pi_{(2,3)} &= \frac{3}{4}\pi_{(2,3)} + \frac{1}{8}\pi_{(3,2)} + \frac{1}{8}\pi_{(1,2)} \\
\pi_{(3,2)} &= \frac{3}{4}\pi_{(3,2)} + \frac{1}{4}\pi_{(2,3)}
\end{aligned}$$

όπως και η

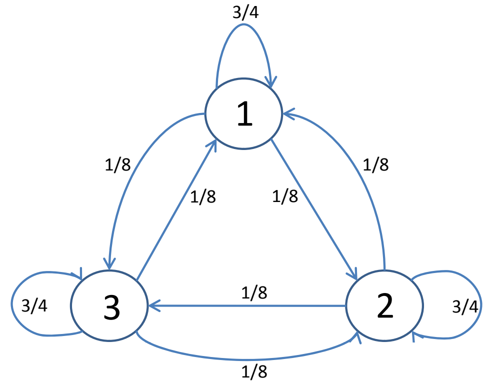
$$\pi_{(1,2)} + \pi_{(2,1)} + \pi_{(2,3)} + \pi_{(3,2)} = 1\ .$$

Λύνοντας βρίσκουμε $\pi_{(1,2)} = 1/4$, $\pi_{(1,2)} = 1/4$, $\pi_{(1,2)} = 1/4$, $\pi_{(1,2)} = 1/4$.

Τώρα εάν η αλυσίδα βρίσκεται στην κατάσταση, π.χ. $(1,2)$ τότε θα συμβεί ένα cache miss εάν η επόμενη αναφορά γίνει για το αντικείμενο 3, δηλαδή, εάν η αλυσίδα μεταβεί στην $(2,3)$ (το οποίο συμβαίνει με πιθανότητα $1/8$). Άρα

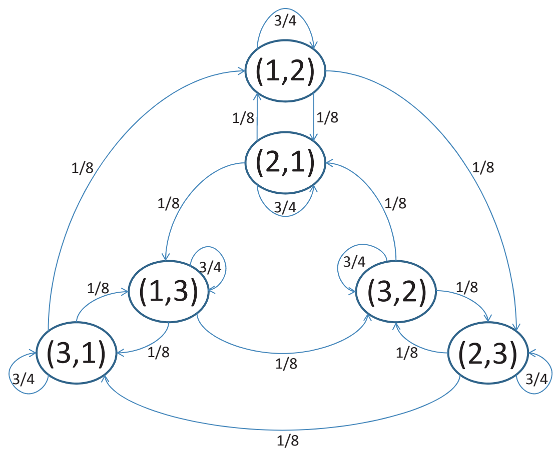
$$P(\text{cache miss}) = \pi_{(1,2)}\frac{1}{8} + \pi_{(3,2)}\frac{1}{8} = \frac{1}{16}\ .$$

(γ′) **Αναφορές με χρονική συσχέτιση. Θεωρήστε ότι η ακολουθία αναφορών $A_0, A_1, \ldots$ είναι η Α.Μ.:**



Βρείτε την πιθανότητα cache miss.

Θεωρούμε την Α.Μ. που ορίσαμε στο προηγούμενο υποερώτημα, όπου εδώ έχει το ακόλουθο γράφημα:



Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι:

$$\begin{aligned}
\pi_{(1,2)} &= \frac{3}{4}\pi_{(1,2)} + \frac{1}{8}\pi_{(2,1)} + \frac{1}{8}\pi_{(2,3)} \\
\pi_{(2,1)} &= \frac{3}{4}\pi_{(2,1)} + \frac{1}{8}\pi_{(1,2)} + \frac{1}{8}\pi_{(1,3)} \\
\pi_{(2,3)} &= \frac{3}{4}\pi_{(2,3)} + \frac{1}{8}\pi_{(3,2)} + \frac{1}{8}\pi_{(3,1)} \\
\pi_{(3,2)} &= \frac{3}{4}\pi_{(3,2)} + \frac{1}{8}\pi_{(2,3)} + \frac{1}{8}\pi_{(2,1)} \\
\pi_{(1,3)} &= \frac{3}{4}\pi_{(1,3)} + \frac{1}{8}\pi_{(3,1)} + \frac{1}{8}\pi_{(3,2)} \\
\pi_{(3,1)} &= \frac{3}{4}\pi_{(3,1)} + \frac{1}{8}\pi_{(1,3)} + \frac{1}{8}\pi_{(1,2)}
\end{aligned}$$

οι οποίες είναι συμμετρικές (όπως και το γράφημα άλλωστε) ως προς 1,2,3. Άρα όλα τα π_{ij} είναι ίσα μεταξύ τους. Επιπλέον αφού πρέπει να αθροίζουν σε 1, έχουμε $\pi_{(i,j)} = 1/6$ για κάθε κατάσταση (i,j).

Τέλος,

$$P(\text{cache miss}) = \sum_{\substack{i,j\in\{1,2,3\}\\ i\neq j}} \pi_{(i,j)}\frac{1}{8} = \binom{3}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{8}\,.$$

(δ΄) **Τί συμπεραίνετε για την πιθανότητα cache miss στις παραπάνω περιπτώσεις συσχέτισης μεταξύ διαδοχικών αναφορών;**

Η πιθανότητα cache miss ελαττώνεται όσο μεγαλώνει ο βαθμός της συσχέτισης μεταξύ διαδοχικών αναφορών.