Ειδικά Θέματα Επιχειρησιακής Έρευνας

Ενδεικτικές λύσεις 1ης Σειράς Ασκήσεων

---

1. **Δίδεται το γραμμικό πρόγραμμα**

$$\begin{aligned} &\max x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \textbf{έτσι ώστε } & 2x_1 - x_3 \leq 5 \\ & x_3 - 8x_2 = 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0, x_3 \geq -5. \end{aligned}$$

   (α΄) **Γράψτε το παραπάνω πρόγραμμα σε κανονική μορφή.**

   Μετά την αλλαγή μεταβλητής $x_3' = x_3 + 5$ λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} &\max x_1 + 2x_2 - x_3' \\ \text{έτσι ώστε } & 2x_1 - x_3' \leq 0 \\ & x_3' - 8x_2 \leq -7 \\ & -x_3' + 8x_2 \leq 7 \\ & x_1, x_2, x_3' \geq 0. \end{aligned}$$

   (β΄) **Γράψτε το δυϊκό πρόβλημα.**

$$\begin{aligned} &\min -7\lambda_2 + 7\lambda_3 \\ \text{έτσι ώστε } & 2\lambda_1 \geq 1 \\ & -8\lambda_2 + 8\lambda_3 \geq 2 \\ & -\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 \geq -1 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0. \end{aligned}$$

2. **Θεωρήστε το γραμμικό πρόγραμμα**

$$\begin{aligned} &\max x_1 + 4x_2 \\ \textbf{έτσι ώστε } & 4x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 + 12x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

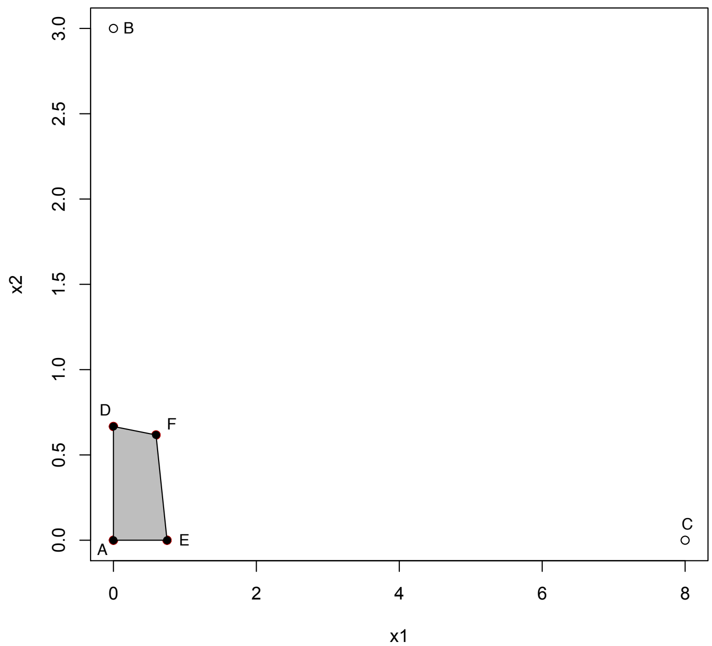
   (α΄) **Βρείτε τις βασικές λύσεις και απεικονίστε τις (αγνοώντας τις μεταβλητές χαλαρότητας) σε διάγραμμα με άξονες τις αρχικές μεταβλητές x_1, x_2.**

   Οι βασικές λύσεις δίνονται στον πίνακα:

	x_1	x_2	z_1	z_2
A	0	0	3	8
B	0	3	0	-28
C	8	0	-29	0
D	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{3}$	0
E	$\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{29}{4}$
F	$\frac{28}{47}$	$\frac{29}{47}$	0	0

(β′) **Στο ίδιο διάγραμμα, απεικονίστε τις βασικές εφικτές λύσεις καθώς και το σύνολο όλων των εφικτών σημείων.**

Οι βασικές λύσεις απεικονίζονται στο παρακάτω διάγραμμα:



(γ′) **Γράψτε το δυϊκό πρόβλημα.**

$$\begin{aligned} &\min 3\lambda_1 + 8\lambda_2 \\ &\text{έτσι ώστε } 4\lambda_1 + \lambda_2 \geq 1 \\ &\qquad\qquad \lambda_1 + 12\lambda_2 \geq 4 \\ &\qquad\qquad \lambda_1, \lambda_2 \geq 0. \end{aligned}$$

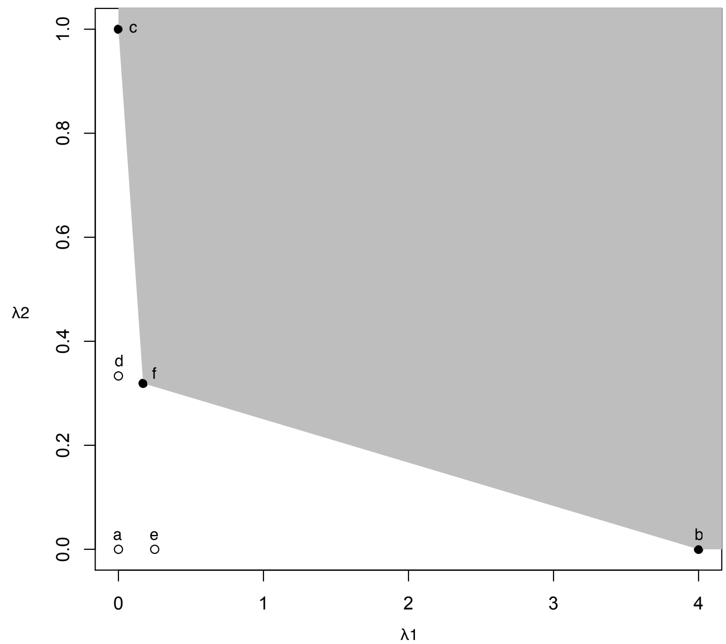
(δ′) **Βρείτε τις βασικές λύσεις του δυϊκού και απεικονίστε τις (αγνοώντας τις μεταβλητές χαλαρότητας) σε διάγραμμα με άξονες τις δυϊκές μεταβλητές.**

Οι βασικές λύσεις δίνονται στον πίνακα:

	λ_1	λ_2	v_1	v_2
a	0	0	-1	-4
b	4	0	15	0
c	0	1	0	8
d	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{3}$	0
e	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{-15}{4}$
f	$\frac{8}{47}$	$\frac{15}{47}$	0	0

(ε′) **Αντιστοιχίστε τις βασικές λύσεις που βρήκατε στα ερωτήματα 2α′ και 2δ′ σύμφωνα με το ποιες είναι συμπληρωματικές, δηλ. ικανοποιούν τις συμπληρωματικές συνθήκες χαλαρότητας.**

$A \leftrightarrow a, B \leftrightarrow b, C \leftrightarrow c, D \leftrightarrow d, E \leftrightarrow e, F \leftrightarrow f.$



(ϛ′) **Βρείτε τη βέλτιστη τιμή και μια βέλτιστη λύση με τη χρήση simplex.**

Λύνουμε το πρόβλημα με simplex σε μορφή λέξικού.
Βήμα 1:

$$\begin{aligned} \max \zeta = & \quad x_1 + 4x_2 \\ z_1 = & 3 - 4x_1 - x_2 \\ z_2 = & 8 - x_1 - 12x_2 \\ & x_1, x_2, z_1, z_2 \geq 0\,. \end{aligned}$$

Βήμα 2:

$$\begin{aligned} \max \zeta = & \frac{8}{3} + \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}z_2 \\ z_1 = & \frac{7}{3} - \frac{47}{12}x_1 + \frac{1}{12}z_2 \\ x_2 = & \frac{2}{3} - \frac{1}{12}x_1 - 12x_2 \\ & x_1, x_2, z_1, z_2 \geq 0\,. \end{aligned}$$

Βήμα 3:

$$\begin{aligned} \max \zeta = & \frac{144}{47} - \frac{8}{47}z_1 - \frac{15}{47}z_2 \\ x_1 = & \frac{28}{47} - \frac{12}{47}z_1 + \frac{1}{47}z_2 \\ x_2 = & \frac{29}{47} + \frac{1}{47}z_1 - \frac{4}{47}z_2 \\ & x_1, x_2, z_1, z_2 \geq 0\,. \end{aligned}$$

Ο αλγόριθμος simplex τερματίζει και η βέλτιστη λύση είναι $x_1^* = 28/47, x_2^* = 29/47$ με βέλτιστη τιμή $144/47$.

(ζ′) **Εάν ο περιορισμός $x_1+12x_2 \le 8$ γίνει $x_1+12x_2 \le 8+\epsilon$ για μικρό $\epsilon > 0$, πόσο αλλάζει η βέλτιστη τιμή ως συνάρτηση του ϵ; (βοήθεια: δε χρειάζεται να λύσετε ξανά το πρόβλημα.)**

Από την ιδιότητα της ευαισθησίας, η βέλτιστη τιμή μεταβάλλεται κατά $\lambda_2^*\epsilon$, όπου $\lambda_1^* = 8/47, \lambda_2^* = 15/47$ η βέλτιστη λύση του δυϊκού προβλήματος (από το τελευταίο βήμα simplex του προηγούμενου υποερωτήματος).

3. **Θεωρήστε το γραμμικό πρόγραμμα:**

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \\ \text{έτσι ώστε}\ & x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ & x_2 - x_3 + x_4 \le 3 \\ & x_1 - 2x_2 + 2x_4 \ge 1 \\ & x_1, x_3, x_4 \ge 0\,, x_2 \ge 2\,. \end{aligned}$$

(α′) **Δείξτε ότι η $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1, x_4 = 2$ είναι βέλτιστη λύση – χωρίς να χρησιμοποιήσετε simplex.**

Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο βέλτιστης λύσης, κατά συνέπεια θα πρέπει να υπολογίσουμε τη συμπληρωματική βασική εφικτή λύση. Πρώτα φέρνουμε το πρόβλημα σε κανονική μορφή κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $x_2' = x_2 - 2$:

$$\begin{aligned} \max\quad & x_1 + 2x_2' - 3x_3 + x_4 \\ & x_1 + x_2' + x_3 \le 2 \\ & x_2' - x_3 + x_4 \le 1 \\ & -x_1 + 2x_2' - 2x_4 \le -5 \\ & x_1, x_2', x_3, x_4 \ge 0\,. \end{aligned}$$

Η προτεινόμενη βέλτιστη λύση αντιστοιχεί στη βασική εφικτή λύση $(x_1, x_2', x_3, x_4, z_1, z_2, z_3) = (1, 0, 1, 2, 0, 0, 0)$. Το διϋκό του πρόβλημα είναι:

$$\begin{aligned} \min\quad & 2\lambda_1 + \lambda_2 - 5\lambda_3 \\ & \lambda_1 - \lambda_3 \ge 1 \\ & \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \ge 2 \\ & \lambda_1 - \lambda_2 \ge -3 \\ & \lambda_2 - 2\lambda_3 \ge 1 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ge 0\,. \end{aligned}$$

Η συμπληρωματική βασική λύση ικανοποιεί

$$\begin{aligned} \lambda_1 - \lambda_3 &= 1 + v_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 2 + v_2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 &= -3 + v_3 \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 &= 1 + v_4 \end{aligned}$$

και $v_1 = v_3 = v_4 = 0$ (αφού $x_1, x_3, x_4 > 0$) από τις συνθήκες συμπληρωματικής χαλαρότητας. Λύνοντας το σύστημα εξισώσεων βρίσκουμε $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 7, \lambda_3 = 3$. Η συμπληρωματική βασική λύση $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, v_1, v_2, v_3, v_4)$ είναι εφικτή, άρα η προτεινόμενη λύση είναι βέλτιστη για το αρχικό γραμμικό πρόβλημα.

(β′) **Πόσο θα μεταβληθεί η βέλτιστη τιμή εάν ο 2ος περιορισμός γίνει $x_2 - x_3 + x_4 \leq 3.001$;**

Ο 2ος περιορισμός στο πρόβλημα σε κανονική μορφή αλλάζει σε $x_2' - x_3 + x_4 \leq 1.001$. Η μεταβολή στον περιορισμό είναι μικρή άρα, από την ιδιότητα της ευαισθησίας, η βέλτιστη τιμή μεταβάλλεται κατά $0.001\lambda_2 = 0.007$.

(γ′) **Βρείτε τη βέλτιστη λύση μετά την αλλαγή του 2ου περιορισμού.**

Η ιδέα είναι να δούμε αν η συμπληρωματική βασική λύση $(x_1, x_2', x_3, z_1, z_2, z_3)$ της $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, v_1, v_2, v_3, v_4) = (4, 7, 3, 0, 15, 0, 0)$ είναι βέλτιστη για το αρχικό πρόγραμμα. Αυτή ικανοποιεί

$$\begin{aligned} x_1 + x_2' + x_3 + z_1 &= 2 \\ x_2' - x_3 + x_4 + z_2 &= 1.001 \\ -x_1 + 2x_2' - 2x_4 + z_3 &= -5 \end{aligned}$$

και $x_2' = z_1 = z_2 = z_3 = 0$ από τις συνθήκες συμπληρωματικής χαλαρότητας (αφού $v_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ αντίστοιχα).

Λύνοντας τις παραπάνω εξισώσεις βρίσκουμε $x_1 = 1.002, x_2' = 0, x_3 = 0.998, x_4 = 1.999$ οι οποίες είναι μη αρνητικές τιμές. Άρα από το κριτήριο βέλτιστης λύσης, η βέλτιστη λύση είναι $x_1 = 1.002, x_2 = 2, x_3 = 0.998, x_4 = 1.999$.

4. **Θεωρήστε ότι τη χρονική διάρκεια μιας εργάσιμης εβδομάδας (από Δευτέρα έως και Παρασκευή) (=15 οκτάωρα) τη μοιράζετε ανάμεσα σε εργασία, ύπνο και προσωπικό χρόνο. Είναι απαραίτητο ο χρόνος ύπνου και ο προσωπικός χρόνος συνολικά να υπερβαίνουν το διπλάσιο του χρόνου εργασίας. Επίσης τα έσοδα από τον μισθό σας των 75 ευρώ/8 ώρες θα πρέπει να καλύπτουν πάγια έξοδα 25 ευρώ συν το ποσό που ξοδεύετε κατά τον προσωπικό σας χρόνο. Θεωρήστε ότι κατά μέσο όρο ξοδεύετε 50 ευρώ ανά 8 ώρες προσωπικού χρόνου.**

   Απαντήστε εάν το εβδομαδιαίο πρόγραμμα που μεγιστοποιεί τον προσωπικό σας χρόνο κάτω από τους παραπάνω περιορισμούς είναι αυτό όπου εργάζεστε για 5 οκτάωρα, κοιμάστε 3 οκτάωρα και απομένουν 7 οκτάωρα για προσωπικές δραστηριότητες.

   Πόσο επιπλέον προσωπικό χρόνο θα κερδίζατε εάν η εργάσιμη εβδομάδα ήταν δυνατόν να μεγαλώσει κατά 1 λεπτό;

   Ορίζοντας τις μεταβλητές απόφασης x_1 =χρόνος εργασίας, x_2 =ύπνος, x_3 =προσωπικός χρόνος (σε οκτάωρα) καταλήγουμε στο γραμμικό πρόγραμμα:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_3 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 15 \\ & x_2 + x_3 \geq 2x_1 \\ & 75x_1 \geq 25 + 50x_3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

το οποίο φέρνουμε σε κανονική μορφή ως εξής:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_3 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \le 15 \\ & -x_1 - x_2 - x_3 \le -15 \\ & 2x_1 - x_2 - x_3 \le 0 \\ & -3x_1 + 2x_3 \le -1 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

Θα διαπιστώσουμε εάν η προτεινόμενη λύση είναι βέλτιστη χρησιμοποιώντας το κριτήριο βέλτιστης λύσης. Το δυϊκό πρόγραμμα είναι:

$$\begin{aligned} \min \quad & 15\lambda_1 - 15\lambda_2 - \lambda_4 \\ & \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 - 3\lambda_4 \ge 0 \\ & \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 \ge 0 \\ & \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + 2\lambda_4 \ge 1 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \ge 0 \end{aligned}$$

Η συμπληρωματική βασική λύση $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, v_1, v_2, v_3)$ ικανοποιεί

$$\begin{aligned} \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 - 3\lambda_4 &= v_1 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 &= v_2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + 2\lambda_4 &= 1 + v_3 \end{aligned}$$

όπου $v_1 = v_2 = v_3 = 0$ από τις συνθήκες συμπληρωματικής χαλαρότητας (αφού $x_1, x_2, x_3 \neq 0$).

Θέτοντας $\lambda_2 = 0$ και λύνοντας το σύστημα των παραπάνω εξισώσεων βρίσκουμε $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1/2$ και άρα η συμπληρωματική βασική λύση είναι εφικτή. Από το κριτήριο βέλτιστης λύσης συνεπάγεται ότι η προτεινόμενη λύση $x_1 = 5, x_2 = 3, x_3 = 7$ είναι βέλτιστη.

Εάν η εργάσιμη εβδομάδα μεγάλωνε κατά 1 λεπτό (=1/480 οκτάωρα) οι πρώτοι δύο περιορισμοί θα άλλαζαν σε $x_1 + x_2 + x_3 \le 15 + 1/480$ και $-x_1 - x_2 - x_3 \le -15 - 1/480$. Κατά συνέπεια, η μεταβολή στον προσωπικό χρόνο θα ήταν $(1/480)\lambda_1 + (-1/480)\lambda_2 = 1/960 = 1/2$ λεπτό.

5. (α′) **Βρείτε τη βέλτιστη λύση και τιμή του γραμμικού προγράμματος που ακολουθεί χρησιμοποιώντας simplex στο δυϊκό του:**

$$\begin{aligned} \min \ & x_1 + 3x_2 \\ \text{έτσι ώστε } & x_1 + x_2 \ge 4 \\ & 2x_1 - x_2 \ge 1 \\ & x_1, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

Το δυϊκό πρόβλημα είναι:

$$\begin{aligned} \max \quad & 4\lambda_1 + \lambda_2 \\ & \lambda_1 + 2\lambda_2 \le 1 \\ & \lambda_1 - \lambda_2 \le 3 \\ & \lambda_1, \lambda_2 \ge 0\,. \end{aligned}$$

Βήμα 1:

$$\begin{aligned}
\max \xi = &\quad 4\lambda_1 + \lambda_2 \\
v_1 &= 1 - \lambda_1 - 2\lambda_2 \\
v_2 &= 3 - \lambda_1 + \lambda_2 \\
&\lambda_1, \lambda_2, v_1, v_2 \geq 0\,.
\end{aligned}$$

Βήμα 2:

$$\begin{aligned}
\max \xi &= 4 - 4v_1 - 7\lambda_2 \\
\lambda_1 &= 1 - v_1 - 2\lambda_2 \\
v_2 &= 2 + v_1 + 3\lambda_2 \\
&\lambda_1, \lambda_2, v_1, v_2 \geq 0\,.
\end{aligned}$$

Ο αλγόριθμος simplex τερματίζει και η βέλτιστη λύση είναι $\lambda_1^* = 1, \lambda_2^* = 0$ με βέλτιστη τιμή 4. Από την ιδιότητα της ισχυρής δυϊκότητας, η βέλτιστη τιμή του αρχικού προβλήματος είναι ίση με αυτή του δυϊκού, δηλαδή 4. Επίσης, η συμπληρωματική βασική λύση θα είναι βέλτιστη στο αρχικό πρόβλημα. Από την 1η εξίσωση του τελευταίου βήματος βλέπουμε ότι η συμπληρωματική λύση είναι $x_1^* = 4, x_2^* = 0$.

(β΄) **Πόσο θα άλλαζε η βέλτιστη τιμή εάν ο 1ος περιορισμός ήταν $x_1 + x_2 \geq 4.004$;**

Η μεταβολή στον περιορισμό είναι μικρή, άρα η μεταβολή στη βέλτιστη λύση θα είναι $0.004\lambda_1 = 0.004$, σύμφωνα με την ιδιότητα της ευαισθησίας.

6. **Θεωρήστε το γραμμικό πρόγραμμα:**

$$\begin{aligned}
\max\ & 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 7x_4 \\
\text{έτσι ώστε}\ & x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 4 \\
& -x_1 + x_2 + \frac{3}{4}x_3 + x_4 \leq 1 \\
& x_4 - x_2 \geq 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.
\end{aligned}$$

Χωρίς να χρησιμοποιήσετε simplex δείξτε ότι η βέλτιστη λύση ικανοποιεί τον 1ο περιορισμό με ισότητα.

Ας υποθέσουμε ότι για μια βέλτιστη λύση $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$ ο 1ος περιορισμός δεν ικανοποιείται με ισότητα, δηλαδή η μεταβλητή χαλαρότητας z_1^* του 1ου περιορισμού ικανοποιεί $z_1^* > 0$. Από την ιδιότητα της ισχυρής δυϊκότητας, η συμπληρωματική βασική λύση $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots)$ στο δυϊκό είναι εφικτή. Αυτή θα πρέπει να ικανοποιεί τους περιορισμούς του δυϊκού προβλήματος:

$$\begin{aligned}
\lambda_1^* - \lambda_2^* &\geq 2 \\
\lambda_1^* + \lambda_2^* + \lambda_3^* &\geq -3 \\
2\lambda_1^* + \frac{3}{4}\lambda_2^* &\geq 3 \\
4\lambda_1^* + \lambda_2^* - \lambda_3^* &\geq 7
\end{aligned}$$

Επίσης η συνθήκη συμπληρωματικής χαλαρότητας $\lambda_1^* z_1^* = 0$ δίνει $\lambda_1^* = 0$ αφού $z_1^* > 0$. Αυτό όμως είναι αδύνατο αφού από τον 1ο περιορισμό παραπάνω έχουμε $\lambda_1^* \geq 2 > 0$ αφού $\lambda_2^* \geq 0$. Καταλήξαμε σε άτοπο, συνεπώς ο 1ος περιορισμός (του αρχικού προβλήματος) θα πρέπει ικανοποιείται με ισότητα στη βέλτιστη λύση.