Ειδικά Θέματα Επιχειρησιακής Έρευνας, Σεπτέμβριος 2019.

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες.
Καλή Επιτυχία!

1ο Θέμα

α) (1 μονάδα) Θεωρήστε ένα τυχαίο ζεύγος πρωτεύοντος-δυϊκού σαν το ακόλουθο, με βέλτιστες λύσεις $x = (x_1, \ldots, x_n)$ και $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ αντίστοιχα.

$$\max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \qquad\qquad \min \sum_{i=1}^{m} b_i \lambda_i$$

$$\begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^{n} a_{1i} x_i & \leq & b_1 \\ & \vdots & \\ \sum_{i=1}^{n} a_{mi} x_i & \leq & b_m \\ x_1, \ldots, x_n & \geq & 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^{m} a_{i1} \lambda_i & \geq & c_1 \\ & \vdots & \\ \sum_{i=1}^{n} a_{in} \lambda_i & \geq & c_n \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_m & \geq & 0 \end{array}$$

Δείξτε ότι αν για την λύση x η πρώτη ανισότητα ικανοποιείται με $<$, τότε αν την αντικαταστήσουμε με την $\sum_{i=1}^{n} a_{1i} x_i \leq b_1 + 100$ η βέλτιστη τιμή του πρωτεύοντος και του δυϊκού δεν αλλάζουν.

β) (1,5 μονάδα) Ένας παραγωγός παράγει τα προϊόντα *Choco*, *Cocktail* και *Cherry* χρησιμοποιώντας σαν πρώτες ύλες βανίλια, σοκολάτα και κεράσι. Η τιμή πώλησης των προϊόντων, η διαθεσιμότητα των πρώτων υλών καθώς και οι 'συνταγές' για κάθε προϊόν δίνονται από τον παρακάτω πίνακα.

	Βανίλια	Σοκολάτα	Κεράσι	Τιμή
Choco	25%	75%	-	10000
Cocktail	25%	25%	50%	5000
Cherry	25%	-	75%	15000
Διαθεσιμότητα	5	3	8	

Δείξτε οτι αν ο παραγωγός ξεπουλάει όλα του τα προϊόντα και μεγιστοποιεί το κέρδος του, τότε στο βέλτιστο πλάνο παραγωγής καταναλώνεται όλη η σοκολάτα και το κεράσι και δεν παράγεται καθόλου Cocktail.

2ο Θέμα

Δύο διυλιστήρια πετρελαίου Δ_1, Δ_2 με αντίστοιχο απόθεμα 10 και 6 εκατομμύρια τόνους πετρελαίου προμηθεύουν τις δύο πόλεις Π_1 και Π_2. Η ζήτηση σε πετρέλαιο είναι 5 και 7 εκατομμύρια τόνοι για την Π_1 και Π_2 αντίστοιχα. Δίδεται επίσης το κόστος μεταφοράς ανά τόνο από τον πίνακα (σε εκατοστά του ευρώ) που ακολουθεί:

	Π_1	Π_2
Δ_1	1	3
Δ_2	1	2

α) (1,25 μονάδες) Βρείτε τον οικονομικότερο τρόπο μεταφοράς πετρελαίου από τα διυλιστήρια στις πόλεις έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι περιορισμοί που αφορούν τη διάθεση και τη ζήτηση.

β) (1,25 μονάδες) Θεωρήστε ότι από κάθε διυλιστήριο προς κάθε πόλη υπάρχει ο περιορισμός ότι δε μπορούν να σταλούν περισσότερο από 4 εκατομμύρια τόνοι. Επιβεβαιώστε ότι ο οικονομικότερος τρόπος μεταφοράς είναι αυτός όπου το Δ1 στέλνει 4 εκ. τόνους στην Π1 και 3 στην Π2, ενώ το Δ2 στέλνει 1 και 4 εκ. τόνους στην Π1 και Π2 αντίστοιχα.

(Υπόδειξη: θεωρήστε ένα τροποποιημένο πρόβλημα μεταφοράς με διυλιστήρια όπου το κάθενα διαθέτει το πολύ 4 εκ. τόνους προς όλες τις πόλεις συνολικά...)

3ο Θέμα

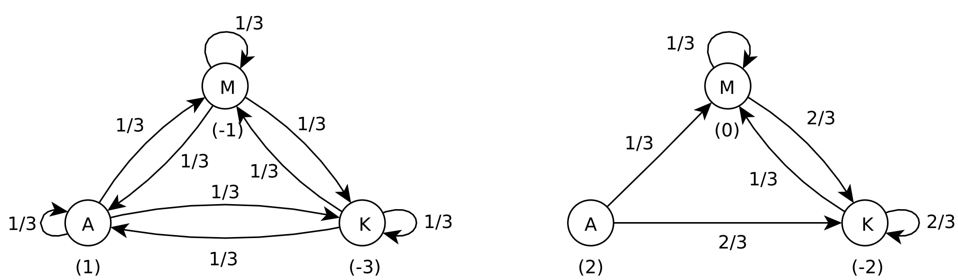
α) (1 μονάδα) Για κάποια Μαρκοβιανή αλυσίδα δύο καταστάσεων υποθέστε πως ο πίνακας $Q = \begin{pmatrix} a & 2/3 \\ b & c \end{pmatrix}$ περιέχει τις πιθανότητες μετάβασης σε δύο βήματα, δηλαδή $Q(i,j) = Pr[X_2 = j | X_0 = i]$ (για κάποια a, b και c). Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι με ένα βήμα από την 1η κατάσταση πάντα πάμε στην 2η, βρείτε τις πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος της αλυσίδας.

β) (3×1 μονάδα) Ασχολείστε με συλλογές κόμιξ και θέλετε να μαζεύετε τα 3 σπάνια τεύχη του Αστερίξ. Μέχρι να τα μαζέψετε, κάθε εβδομάδα πληρώνετε 5 ευρώ και με πιθανότητα 1/2 σας έρχεται ένα τεύχος που δεν έχετε, και με πιθανότητα 1/2 πρέπει να επιστρέψετε ένα τεύχος πίσω (εφόσον έχετε). Αν τα έχετε μαζέψει όλα τότε τα πουλάτε 100 ευρώ και την επόμενη βδομάδα ξαναξεκινάτε να μαζεύετε. Αρχικά ξεκινάτε με 1 σπάνιο τεύχος. Βρείτε:

1. την πιθανότητα να δώσετε 20 ευρώ μέχρι να καταφέρετε να τα μαζέψετε όλα για πρώτη φορά;
2. την πιθανότητα χωρίς να χάσετε όλα σας τα τεύχη να τα συγκεντρώσετε όλα για πρώτη φορά.
3. το αναμενόμενο κέρδος (κατά προσέγγιση) αν το κάνετε αυτό για 40 χρόνια (2080 εβδομάδες).

4ο Θέμα

Ένας αγρότης κάθε χρόνο μπορεί να επιλέξει αν θα ρίξει λίπασμα στο χωράφι του ή όχι. Το λίπασμα του κοστίζει αλλά του βελτιώνει τις πιθανότητες η επόμενη χρονιά να είναι καλύτερη και να του αποφέρει περισσότερη παραγωγή (και κέρδος). Τα αντίστοιχα κόστη και πιθανότητες φαίνονται στο σχήμα. Το Α αντιστοιχεί σε άσχημη χρονιά, το Μ σε μέτρια και το Κ σε καλή χρονιά.



Χωρίς λίπασμα (Χ)   με Λίπασμα (Λ)

α) (1 μονάδα) Αν φέτος είναι η τελευταία χρονιά που ο αγρότης θα χρησιμοποιήσει το χωράφι, βρείτε το συνολικό κέρδος του αγρότη από πρόπερισυ μέχρι το τέλος της φετινής χρονιάς αν γνωρίζετε οτι πέρισυ ήταν μια καλή χρονιά και πρόπερισυ μια άσχημη, δεδομένου οτι ο αγρότης πάντα ακολουθεί μια βέλτιστη πολιτική μεγιστοποίησης κέρδους.
β) (1,5 μονάδες) Βρείτε την βέλτιστη πολιτική για το κριτήριο του υποτιμόμενου συνολικού κόστους με συντελεστή υποτίμησης $\beta = 1/2$

Συνθήκες συμπληρωματικής χαλαρότητας:

$$x \text{ και } \lambda \text{ (κατ' αντιστοιχία) βέλτιστες}$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall j \in [1,\ldots,m] \text{ και } \forall i \in [1,\ldots,n]:$$
$$(\lambda_j = 0 \text{ ή } \sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k = b_j) \text{ και } (x_i = 0 \text{ ή } \sum_{k=1}^{m} a_{ki}\lambda_i = c_i)$$

Αλγόριθμος $Simplex$:

Έστω ξέρουμε μια βασική λύση B (με m μεταβλητές)

1. Με γραμμοπράξεις μετάτρεψε τον υποπίνακα που αντιστοιχεί στις μεταβλητές της B σε μοναδιαίο
2. Με γραμμοπράξεις μηδένισε τις θέσεις της 1ης γραμμής (αυτή της αντικ. συν.) που αντιστοιχούν στις βασικές μεταβλητές
3. Αν τιμές 1ης γραμμής μη θετικές σταμάτα: Η βάση είναι βέλτιστη (Η τιμή εμφανίζεται με '-' πάνω δεξιά)
4. Αν όχι, διάλεξε στήλη k με θετική τιμή στην πιο πάνω θέση της και αν υπόλοιπες τιμές στήλης αρνητικές, τότε μη φραγμένο αλλιώς διάλεξε τη γραμμή ℓ, όπου $\ell = argmin_i\{\frac{b'_k}{a'_{ik}} | a'_{ik} > 0\}$
5. Βάλε την μεταβλητή x_k στην B βγάζοντας την μεταβλητή που είχε μονάδα στην ℓ-στή γραμμή της στήλης της και πήγαινε στο βήμα 1

Πρόβλημα Μεταφοράς:

Οι περιορισμοί του δυϊκού είναι $\mu_j - \lambda_i \leq c_{ij}, \forall i,j \;\; \rightarrow \;\; \mu_j - \lambda_i + v_{ij} = c_{ij}, \forall i,j$

Επιλογή ακμής που εισέρχεται αν γράφημα συνεκτικό:

- Μέσω συμπληρωματικών συνθηκών υπολόγισε τα υπόλοιπα $v_{ij}{}'s$
- Αν $v_{ij}{}'s$ όλα θετικά, τότε εφικτή δυϊκή και άρα βέλτιστο δέντρο, αλλιώς επίλεξε ζεύγος k,l με $v_{kl} < 0$
- Βάλε την ακμή (k,l) στο δέντρο με κόστος που σέβεται τους περιορισμούς στον κύκλο, μηδενίζει κάποια ακμή και κρατά τις υπόλοιπες μη αρνητικές.

Πρόβλημα Ανάθεσης:

1. Από κάθε γραμμή/στήλη αφαίρεσε το ελάχιστο στοιχείο της
2. Βρες μέγιστο ταίριασμα από 0. Αν μεγέθους $= n$ τέλος.
3. Αν μεγέθους $< n$ κάλυψε όλα τα 0 με ελάχιστο πλήθος ευθειεών
4. Από τα μη καλλυμένα στοιχεία αφαίρεσε το μικρότερο από αυτά, πρόσθεσέ το στις τομές ευθειών και πήγαινε στο βήμα 2

Μαρκοβιανές Αλυσίδες:

$\Pr[X_n = j | X_0 = i] = \sum_{k \in S} p_{ik} \Pr[X_{n-1} = j | X_0 = k]$

Για $i \neq j$, $\Pr[X_1 = j \text{ ή } \ldots \text{ ή } X_n = j | X_0 = i] = \sum_{k \in S} p_{ik} \Pr[X_0 = j \text{ ή } \ldots \text{ ή } X_{n-1} = j | X_0 = k]$

Σε άπειρο ορίζοντα, $\Pr[\text{επίσκεψη στην } j | X_0 = i] = \sum_{k \in S} p_{ik} \Pr[\text{επίσκεψη στην } j | X_0 = k]$

Αναμενόμενος Χρόνος από i σε j (όταν υπάρχουν και για $i \neq j$), $T_{ij} = 1 + \sum_{k \in S} p_{ik} T_{kj}$

Στάσιμη Κατανομή, $\pi_i = \sum_{j \in S} \pi_j p_{ji}$ και $\sum_{i \in S} \pi_i = 1$

Βέλτιστη πολιτική για αναμενόμενο κόστος σε φραγμένο ορίζοντα:

- $v_0^*(i) = \min_{a \in A}\{c(i,a)\}$
- $v_n^*(i) = \min_{a \in A}\{c(i,a) + \sum_{j \in S} p_{ij}^a v_{n-1}^*(j)\}$ για $n \geq 1$
- $a_n(i) = arg\min_{a \in A}\{c(i,a) + \sum_{j \in S} p_{ij}^a v_{n-1}^*(j)\}$

Βέλτιστη πολιτική για αναμενόμενο υποτιμούμενο κόστος σε μη φραγμένο ορίζοντα:

1. Για την σ_k υπολόγισε τα $v_{\sigma_k}(i)$ για κάθε i χρησιμοποιώντας τις $v_{\sigma_k}(i) = c(i, \sigma_k(i)) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}^{\sigma_k(i)} v_{\sigma_k}(j)$
2. Κατασκεύασε πολιτική σ_{k+1} ώστε $\sigma_{k+1}(i)$ να ελαχιστοποιεί το $c(i,a) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}^a v_{\sigma_k}(j)$
3. Αν για κάθε i είναι $v_{\sigma_k}(i) = v_{\sigma_{k+1}}(i)$ τότε σ_k βέλτιστη αλλιώς πήγαινε στο 2ο βήμα με την σ_{k+1}.

Βέλτιστη πολιτική για αναμενόμενο μέσο κόστος σε μη φραγμένο ορίζοντα:

1. Για την πολιτική σ_k υπολόγισε τα $h_k(i)$ για κάθε i χρησιμοποιώντας $h_k(i) + \gamma = c(i, \sigma_k(i)) + \sum_{j \in S} p_{ij}^{\sigma_k(i)} h_k(j)$
2. Κατασκεύασε πολιτική σ_{k+1} ώστε $\sigma_{k+1}(i)$ να ελαχιστοποιεί το $c(i,a) + \sum_{j \in S} p_{ij}^a h_k(j)$
3. Αν $\forall i$: $h_k(i) = h_{k+1}(i)$ τότε σ_k βέλτιστη αλλιώς 1ο βήμα με σ_{k+1}.