Ειδικά Θέματα Επιχειρησιακής Έρευνας,
Τελική Εξέταση, Ιανουάριος 2019.

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες.
Καλή Επιτυχία!

1ο Θέμα

(0,5+1,5+1 μονάδες) Δίνεται το γραμμικό πρόγραμμα

$$\max \; x_1 + 2x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1 - x_2 &\leq 1 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

1. Γράψτε το δυϊκό του.
2. Λύστε το πρωτεύον χρησιμοποιώντας *Simplex*.
3. Με τη βοήθεια των συνθηκών συμπληρωματικής χαλαρότητας, δείξτε οτι αν ο πρώτος περιορισμός αντικατασταθεί με τον $x_1 + x_2 \leq 4$, τότε το βέλτιστο σημείο στο χώρο του δυϊκού δεν αλλάζει. Κατά πόσο αλλάζει η βέλτιστη τιμή;

2ο Θέμα

α) (1 μονάδα) Για κάποιο k, θεωρήστε ένα πρόβλημα μεταφοράς όπου κάθε αριστερός κόμβος προσφέρει k μονάδες και κάθε δεξιός κόμβος ζητά k μονάδες. Εξηγείστε γιατί υπάρχει βέλτιστη λύση όπου κάθε κόμβος συνδέεται το πολύ με έναν γείτονα στην απέναντι πλευρά και άρα αρκεί να λύσουμε ένα πρόβλημα ανάθεσης. (Θεωρήστε δεδομένο οτι στα προβλήματα μεταφοράς πάντα υπάρχει βέλτιστη λύση που είναι δέντρο (δάσος).)

β) (1+0,5 μονάδες) Κάθε μήνα δύο πρακτορεία εφημερίδων (E_1 και E_2) μπορούν να προμηθεύσουν τέσσερα περίπτερα (Π_1, Π_2, Π_3 και Π_4) με το περιοδικό 'Τα νέα του ΟΠΑ'. Το κόστος μεταφοράς ανά περιοδικό (σε χιλιοστά του ευρώ) δίνεται από τον πίνακα

	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4
E_1	3	2	2	1
E_2	2	4	4	3

Για κάθε μια από τις δύο περιπτώσεις, βρείτε την ανάθεση και το κόστος της ανάθεσης που ελαχιστοποιεί το κόστος μεταφοράς υπό τον περιορισμό τα πρακτορεία να δίνουν όλα τους τα περιοδικά και τα περίπτερα να μην παίρνουν παραπάνω περιοδικά από όσα ζήτησαν:

1. Το E_1 προσφέρει 500 περιοδικά, το E_2 300 και καθένα από τα Π_1, Π_2, Π_3 και Π_4 ζητά 200 περιοδικά.
2. Το E_1 και το E_2 προσφέρουν 200 περιοδικά το κάθενα και καθένα από τα Π_1, Π_2, Π_3 και Π_4 ζητά 200 περιοδικά.

3ο Θέμα

(3×1 μονάδα) Ασχολείστε με συλλογές κόμιξ και θέλετε να μαζεύετε τα 3 σπάνια τεύχη του Αστερίξ. Μέχρι να τα μαζέψετε, κάθε εβδομάδα με πιθανότητα 1/2 σας έρχεται ένα τεύχος που δεν έχετε, και με πιθανότητα 1/2 πρέπει να επιστρέψετε ένα τεύχος πίσω (εφόσον έχετε). Αν τα έχετε μαζέψει όλα τότε κάθε εβδομάδα με πιθανότητα 1/2 τα κρατάτε και με πιθανότητα 1/2 τα δίνετε όλα σε ένα φίλο σας και ξαναξεκινάτε να μαζεύετε. Αρχικά ξεκινάτε με 1 σπάνιο τεύχος. Βρείτε:

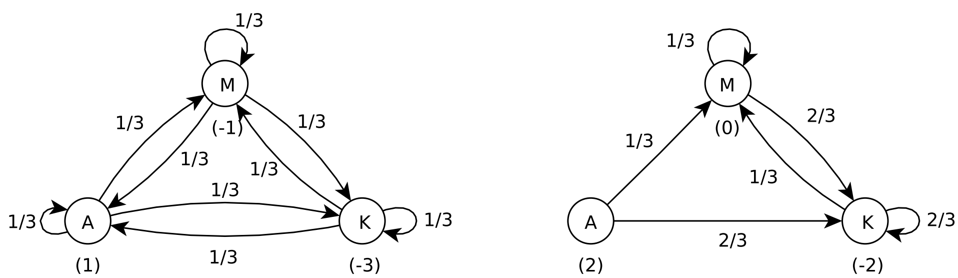
1. την πιθανότητα σε κάποια από τις 6 πρώτες εβδομάδες να μην έχετε κανένα τεύχος.
   (Βοήθεια: ανάλογα με το πόσα τεύχη ξεκινάτε, η πιθανότητα να μην έχετε κανένα τεύχος σε κάποια από τις 4 πρώτες εβδομάδες δίνεται από τον πίνακα

0 τεύχη	1 τεύχος	2 τεύχη	3 τεύχη
1	13/16	13/16	15/16

   .)
2. την πιθανότητα πρώτα να χάσετε όλα σας τα τεύχη και έπειτα να τα συγκεντρώσετε όλα για πρώτη φορά.
3. τον αναμενόμενο αριθμό εβδομάδων μέχρι να μαζέψετε όλα τα τεύχη για πρώτη φορά.

4ο Θέμα

α) (0,75+1,5 μονάδες) Ένας αγρότης κάθε χρόνο μπορεί να επιλέξει αν θα ρίξει λίπασμα στο χωράφι του ή όχι. Το λίπασμα του κοστίζει αλλά του βελτιώνει τις πιθανότητες η επόμενη χρονιά να είναι καλύτερη και να του αποφέρει περισσότερη παραγωγή (και κέρδος). Τα αντίστοιχα κόστη (κέρδη) και πιθανότητες φαίνονται στο σχήμα. Το Α αντιστοιχεί σε άσχημη χρονιά, το Μ σε μέτρια και το Κ σε καλή χρονιά.



Χωρίς λίπασμα (Χ) με Λίπασμα (Λ)

1. Αν φέτος είναι μια καλή χρονιά και θα χρησιμοποιήσει το χωράφι για 2 ακόμη χρόνια, βρείτε τι θα κάνει φέτος ο αγρότης αν ακολουθεί βέλτιστη πολιτική.
2. Βρείτε την βέλτιστη πολιτική σε μη φραγμένο ορίζοντα για το κριτήριο του αναμενόμενου μέσου κόστους.

β) (0,75 μονάδες) Αποδείξτε την παρακάτω πρόταση ή δώστε αντιπαράδειγμα αυτής:

> ''Σε κάθε Μαρκοβιανή διαδικασία αποφάσεων, το αναμενόμενο συνολικό κόστος σε φραγμένο ορίζοντα ελαχιστοποιείται πάντα από κάποια Μαρκοβιανή πολιτική.''

Συνθήκες συμπληρωματικής χαλαρότητας:

$$x \text{ και } \lambda \text{ (κατ' αντιστοιχία) βέλτιστες}$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall j \in [1,\ldots,m] \text{ και } \forall i \in [1,\ldots,n]:$$
$$(\lambda_j = 0 \text{ ή } \sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k = b_j) \text{ και } (x_i = 0 \text{ ή } \sum_{k=1}^{m} a_{ki}\lambda_i = c_i)$$

Αλγόριθμος $Simplex$:

Έστω ξέρουμε μια βασική λύση B (με m μεταβλητές)

1. Με γραμμοπράξεις μετάτρεψε τον υποπίνακα που αντιστοιχεί στις μεταβλητές της B σε μοναδιαίο
2. Με γραμμοπράξεις μηδένισε τις θέσεις της 1ης γραμμής (αυτή της αντικ. συν.) που αντιστοιχούν στις βασικές μεταβλητές
3. Αν τιμές 1ης γραμμής μη θετικές σταμάτα: Η βάση είναι βέλτιστη (Η τιμή εμφανίζεται με '-' πάνω δεξιά)
4. Αν όχι, διάλεξε στήλη k με θετική τιμή στην πιο πάνω θέση της και αν υπόλοιπες τιμές στήλης αρνητικές, τότε μη φραγμένο αλλιώς διάλεξε τη γραμμή ℓ, όπου $\ell = argmin_i\{\frac{b'_k}{a'_{ik}} | a'_{ik} > 0\}$
5. Βάλε την μεταβλητή x_k στην B βγάζοντας την μεταβλητή που είχε μονάδα στην ℓ-στή γραμμή της στήλης της και πήγαινε στο βήμα 1

Πρόβλημα Μεταφοράς:

Οι περιορισμοί του δυϊκού είναι $\mu_j - \lambda_i \leq c_{ij}, \forall i,j \ \rightarrow \ \mu_j - \lambda_i + v_{ij} = c_{ij}, \forall i,j$

Επιλογή ακμής που εισέρχεται αν γράφημα συνεκτικό:

- Μέσω συμπληρωματικών συνθηκών υπολόγισε τα υπόλοιπα v_{ij} $'s$
- Αν v_{ij} $'s$ όλα θετικά, τότε εφικτή δυϊκή και άρα βέλτιστο δέντρο, αλλιώς επίλεξε ζεύγος k, l με $v_{kl} < 0$
- Βάλε την ακμή (k,l) στο δέντρο με κόστος που σέβεται τους περιορισμούς στον κύκλο, μηδενίζει κάποια ακμή και κρατά τις υπόλοιπες μη αρνητικές.

Πρόβλημα Ανάθεσης:

1. Από κάθε γραμμή/στήλη αφαίρεσε το ελάχιστο στοιχείο της
2. Βρες μέγιστο ταίριασμα από 0. Αν μεγέθους $= n$ τέλος.
3. Αν μεγέθους $< n$ κάλυψε όλα τα 0 με ελάχιστο πλήθος ευθειεών
4. Από τα μη καλλυμένα στοιχεία αφαίρεσε το μικρότερο από αυτά, πρόσθεσέ το στις τομές ευθειών και πήγαινε στο βήμα 2

Μαρκοβιανές Αλυσίδες:

$\Pr[X_n = j | X_0 = i] = \sum_{k\in S} p_{ik} \Pr[X_{n-1} = j | X_0 = k]$

Για $i \neq j$, $\Pr[X_1 = j \text{ ή } \ldots \text{ ή } X_n = j | X_0 = i] = \sum_{k\in S} p_{ik} \Pr[X_0 = j \text{ ή } \ldots \text{ ή } X_{n-1} = j | X_0 = k]$

Σε άπειρο ορίζοντα, $\Pr[\text{επίσκεψη στην } j | X_0 = i] = \sum_{k\in S} p_{ik} \Pr[\text{επίσκεψη στην } j | X_0 = k]$

Αναμενόμενος Χρόνος από i σε j (όταν υπάρχουν και για $i \neq j$), $T_{ij} = 1 + \sum_{k\in S} p_{ik} T_{kj}$

Στάσιμη Κατανομή, $\pi_i = \sum_{j\in S} \pi_j p_{ji}$ και $\sum_{i\in S} \pi_i = 1$

Βέλτιστη πολιτική για αναμενόμενο κόστος σε φραγμένο ορίζοντα:

- $v_0^*(i) = \min_{a\in A}\{c(i,a)\}$
- $v_n^*(i) = \min_{a\in A}\{c(i,a) + \sum_{j\in S} p_{ij}^a v_{n-1}^*(j)\}$ για $n \geq 1$
- $a_n(i) = arg\min_{a\in A}\{c(i,a) + \sum_{j\in S} p_{ij}^a v_{n-1}^*(j)\}$

Βέλτιστη πολιτική για αναμενόμενο υποτιμούμενο κόστος σε μη φραγμένο ορίζοντα:

1. Για την σ_k υπολόγισε τα $v_{\sigma_k}(i)$ για κάθε i χρησιμοποιώντας τις $v_{\sigma_k}(i) = c(i, \sigma_k(i)) + \beta \sum_{j\in S} p_{ij}^{\sigma_k(i)} v_{\sigma_k}(j)$
2. Κατασκεύασε πολιτική σ_{k+1} ώστε $\sigma_{k+1}(i)$ να ελαχιστοποιεί το $c(i,a) + \beta \sum_{j\in S} p_{ij}^a v_{\sigma_k}(j)$
3. Αν για κάθε i είναι $v_{\sigma_k}(i) = v_{\sigma_{k+1}}(i)$ τότε σ_k βέλτιστη αλλιώς πήγαινε στο 2ο βήμα με την σ_{k+1}.

Βέλτιστη πολιτική για αναμενόμενο μέσο κόστος σε μη φραγμένο ορίζοντα:

1. Για την πολιτική σ_k υπολόγισε τα $h_k(i)$ για κάθε i χρησιμοποιώντας $h_k(i) + \gamma = c(i, \sigma_k(i)) + \sum_{j\in S} p_{ij}^{\sigma_k(i)} h_k(j)$
2. Κατασκεύασε πολιτική σ_{k+1} ώστε $\sigma_{k+1}(i)$ να ελαχιστοποιεί το $c(i,a) + \sum_{j\in S} p_{ij}^a h_k(j)$
3. Αν $\forall i$: $h_k(i) = h_{k+1}(i)$ τότε σ_k βέλτιστη αλλιώς 1ο βήμα με σ_{k+1}.

1° Θέμα

1.

$$\max \; x_1 + 2x_2$$
$$x_1 + x_2 \le 3$$
$$x_1 - x_2 \le 1$$
$$-x_1 + x_2 \le 1$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$\min \; 3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 \ge 1$$
$$\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 \ge 2$$
$$\lambda_1, \lambda_2 \ge 0$$

2.

$$\max \; x_1 + 2x_2$$
$$x_1 + x_2 + z_1 = 3$$
$$x_1 - x_2 + z_2 = 1$$
$$-x_1 + x_2 + z_3 = 1$$
$$x_1, x_2, z_1, z_2, z_3 \ge 0$$

x_1	x_2	z_1	z_2	z_3	ct
1	2	0	0	0	0
1	1	1	0	0	3
1	-1	0	1	0	1
-1	$\boxed{1}$	0	0	1	1
3	0	0	0	-2	-2
$\boxed{2}$	0	1	0	-1	2
0	0	0	1	1	2
-1	1	0	0	1	1
0	0	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-5
1	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1
0	0	0	1	1	2
0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2

βέλτιστη λύση πρωτεύοντος
$(x_1, x_2) = (1, 2)$ ⇐
με κόστος 5
και δυϊκή λύση την
$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$

3. Βρίσκω την συμπληρωματική λύση της $\left(\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ στο

$$\max \; x_1 + 2x_2$$
$$x_1 + x_2 \le 4$$
$$x_1 - x_2 \le 1$$
$$-x_1 + x_2 \le 1$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

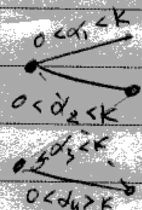
$\lambda_1 = \frac{3}{2} > 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 4$
$\lambda_3 = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow -x_1 + x_2 = 1$
$\Rightarrow x_1 = \frac{3}{2}, \; x_2 = \frac{5}{2}$, εφικτή $\Rightarrow$

Άρα η $\left(\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ παραμένει βέλτιστη και η νέα βέλτιστη τιμή αλλάζει: $(4-3)\,\lambda_1 = \frac{3}{2}$

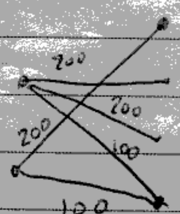
2ο θέμα

α) Έστω δέντρο μεταφοράς που αποτελεί λύση του προβλήματος μεταφοράς.

Προς άτοπο, έστω κορυφή που συνδέεται με δύο ακμές προς την απέναντι πλευρά, ~~Αρχικά~~ με "ποσότητα" $0<\alpha_1<K$ και $0<\alpha_2<K$. Εκεί που καταλήγει κάθε τέτοια ακμή θα πρέπει να υπάρχει εξερχόμενη ακμή με $0<\alpha_3<K$. Αυτό συνεχίζεται μέχρι κάποτε θα κλείσει κύκλος με "θετικές" ακμές καθ' όλο το μήκος του, άρα δεν είχαμε δέντρο αρχικά, άτοπο.



β) **1.** επιλέγω αρχικό δέντρο το



	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4
ε_1		200	200	100
ε_2	200			100

$\xRightarrow[\text{καταλ.}]{\text{συμπλ.}}$

$\mu_2-\lambda_1=2 \quad \mu_1-\lambda_2=2$

$\mu_3-\lambda_1=2 \quad \mu_4-\lambda_2=3$

$\mu_4-\lambda_1=1$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1=0 \\ \lambda_2=-2 \\ \mu_1=0 \\ \mu_2=2 \\ \mu_3=2 \\ \mu_4=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} V_{11}=c_{11}+\lambda_1-\mu_1=3\geq 0 \\ V_{22}=c_{22}+\lambda_2-\mu_2=0\geq 0 \\ V_{23}=c_{23}+\lambda_2-\mu_3=0\geq 0 \end{cases}$$

Άρα δέντρο βέλτιστο με κόστος $2\cdot200+2\cdot200+2\cdot200+1\cdot100+3\cdot100=1{,}600€$

2. Με βάση το ερώτημα α αρκεί να λύσω ένα πρόβλημα ανάθεσης. Προσθέτω δύο πρακτορεία εφημερίδων κι έχω πίνακα κόστους

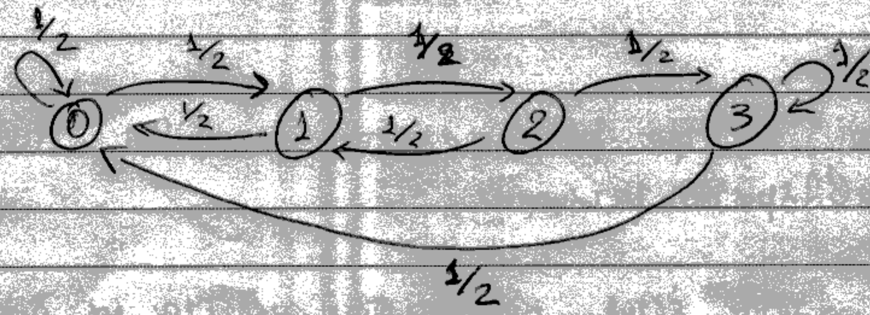
	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4
E_1	3	2	2	1
E_2	2	4	4	3
E_3	0	0	0	0
E_4	0	0	0	0

Αφαιρώ από γραμμές $\Longrightarrow$

	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4
E_1	2	1	1	$\boxed{0}$
E_2	$\boxed{0}$	2	2	1
E_3	0	$\boxed{0}$	0	0
E_4	0	0	$\boxed{0}$	0

Άρα $E_1 \xrightarrow{200} \Pi_4$, $E_2 \xrightarrow{200} \Pi_1$ με κόστος $2\cdot200+1\cdot200=600€$

3^o θέμα



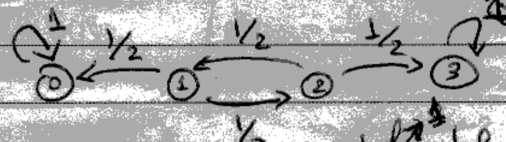
1. Θα χρησιμοποιήσουμε τον αναδρομικό τύπο

$$Pr\left[\begin{matrix}\text{0 τεύχη} \\ \text{σε κάποια} \\ \text{από } t \text{ πρώτα}\end{matrix} \middle| X_0=k\right] = \sum_{i\in States} P_{ki} \cdot Pr\left[\begin{matrix}\text{0 τεύχη} \\ \text{σε κάποια} \\ \text{από } t-1 \text{ πρώτα}\end{matrix} \middle| X_0=i\right]$$

. Γεμίζω πίνακα:

	$X_0=0$	$X_0=1$	$X_0=2$	$X_0=3$
$\exists t\in[4]: X_t=0$	1	$13/16$	$13/16$	$15/16$
$\exists t\in[5]: X_t=0$	1	$29/32$	$28/32$	$31/32$
$\exists t\in[6]: X_t=0$	1	$\boxed{60/64}$	$60/64$	$63/64$

2. Μετατρέπω την αλυσίδα στην



και ψάχνω το f_{10}. Είναι $f_{00}=0$, $f_{30}=0$ και $\begin{cases} f_{10} = \frac{1}{2}f_{00} + \frac{1}{2}f_{20} \\ f_{20} = \frac{1}{2}f_{10} + \frac{1}{2}\cancel{f_{30}} \end{cases}$

που δίνουν $f_{00}=0$, $\boxed{f_{10}=2/3}$, $f_{20}=1/3$, $f_{30}=0$

3. Στην αρχική αλυσίδα, οι αναμενόμενοι χρόνοι από i τεύχη σε 3 τεύχη είναι:

$$\left.\begin{aligned} T_{03} &= 1+\tfrac{1}{2}T_{13}+\tfrac{1}{2}T_{03} \\ T_{13} &= 1+\tfrac{1}{2}T_{23}+\tfrac{1}{2}T_{03} \\ T_{23} &= 1+\tfrac{1}{2}T_{13}+\tfrac{1}{2}T_{33} \\ T_{33} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} T_{03} &= 2+T_{13} \\ 2T_{13} &= 2+T_{23}+(2+\cancel{T_{13}}) \\ 2T_{23} &= 2+(4+T_{23})+0 \\ T_{33} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} T_{03} &= 12 \\ \boxed{T_{13} = 10} \\ T_{23} &= 6 \\ T_{33} &= 0 \end{aligned}$$

Το T_{13} είναι το ζητούμενο.

Θέμα 4^o

α)1 "Γεμίζω την πολιτική" ανάποδα

Σε δυο χρόνια:

A: X με κοστος 1 (συγκριση 1 με 2)

Βέλτιστο → M: X με κόστος -1 (συγκριση -1 με 0)

K: X με κόστος -3 (συγκριση -3 με -4)

Σε ένα χρόνο | Σε δύο χρόνια

$$\begin{array}{ll} & \quad X \qquad\qquad\qquad\qquad \Lambda \\ A: & 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(-1)+\frac{1}{3}(-3)=0 \; ; \; 2+\frac{1}{3}(-1)+\frac{2}{3}(-3)=\boxed{-\frac{1}{3}} \\ M: & -1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(-1)+\frac{1}{3}(-3)=-2 \; ; \; 0+\frac{1}{3}(-1)+\frac{2}{3}(-3)=\boxed{-\frac{7}{3}} \\ K: & -3+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(-1)+\frac{1}{3}(-3)=-4 \; ; \; -2+\frac{1}{3}(-1)+\frac{2}{3}(-3)=\boxed{-\frac{13}{3}} \end{array}$$

(A) $X:1$

(M) $X:-1$

(K) $X:-3$

Άρα φέτος συγκρίνω: $\overset{X}{-3+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(-\frac{7}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(-\frac{13}{3}\right)=-\frac{16}{3}}$; $\overset{\Lambda}{-2+\frac{1}{3}\left(-\frac{7}{3}\right)+\frac{2}{3}\left(-\frac{13}{3}\right)=-\frac{17}{3}}$

Προφανώς φέτος θα ρίξει λίπασμα με αναμενόμενο κόστος $-\frac{17}{3}$

β) Η πρόταση είναι λάθος αφού η παραπάνω βέλτιστη πολιτική για ορίζοντα 1 έτους ~~προτείνει~~ προτείνει λίπασμα αλλά για μηδενικό ορίζοντα δεν προτείνει.

α)2 Κοιτώντας τις δυο αλυσίδες υποπτεύομαι για βέλτιστη πολιτική την σ_0: $\sigma_0(A)=\Lambda$, $\sigma_0(M)=\Lambda$, $\sigma_0(K)=\Lambda$ και κοιτάω αν βελτιώνεται.

$$\left.\begin{array}{l} g+h_0(A)=2+\frac{1}{3}h_0(M)+\frac{2}{3}h_0(K) \\ g+h_0(M)=0+\frac{1}{3}h_0(M)+\frac{2}{3}\cancel{h_0(K)} \\ g+\cancel{h_0(K)}=-2+\frac{1}{3}h_0(M)+\frac{2}{3}\cancel{h_0(K)} \end{array}\right\} \xRightarrow{h_0(K)=0} \begin{array}{l} h_0(A)=4 \\ h_0(M)=2 \\ h_0(K)=0 \\ \boxed{g=-\frac{4}{3}} \end{array}$$

Ψάχνω για σ_1 πολιτική: συγκρίνω:

	X	Λ	
A	$1+\frac{1}{3}4+\frac{1}{3}2+\frac{1}{3}0=3$	$2+\frac{1}{3}2+\frac{2}{3}0=\frac{8}{3}$	$\sigma_1(A)=\Lambda$
M	$-2+\frac{1}{3}4+\frac{1}{3}2+\frac{1}{3}0=1$	$0+\frac{1}{3}2+\frac{2}{3}0=\frac{2}{3}$	$\sigma_1(M)=\Lambda$
K	$-3+\frac{1}{3}4+\frac{1}{3}2+\frac{1}{3}0=-1$	$-2+\frac{1}{3}2+\frac{2}{3}0=-\frac{4}{3}$	$\sigma_1(K)=\Lambda$

$\boxed{\text{Άρα } \sigma_1 \text{ ίδια με } \sigma_0 \text{ και άρα βέλτιστη}}$ (ικανοποιεί ουσιαστικά συνθήκες ισορροπίας)