

Ειδικά Θέματα Επιχειρησιακής Έρευνας

Τελική εξέταση, Πέμπτη 26/1/17

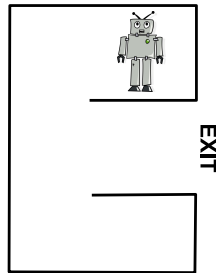
Διάρκεια: 3 ώρες

1. (2 μονάδες) Ένας παραγωγός διαθέτει τρεις καλλιέργειες (ντομάτες, αγγούρια και πιπεριές) για τις οποίες πρέπει να αποφασίσει πόσο θα παράξει από κάθε μια έτσι ώστε να καρπωθεί το μεγαλύτερο δυνατό κέρδος από την πώληση της συνολικής παραγωγής.

Θεωρήστε ότι ο παραγωγός διαθέτει και για τις τρεις καλλιέργειες συνολικά 500 τετραγωνικά μέτρα (τ.μ.) εδαφικής επιφάνειας, 10000 λίτρα νερού και 800 κιλά λιπάσματος. Για την παραγωγή κάθε κιλού ντομάτας απαιτείται 1 τ.μ. εδάφους και 10 λίτρα νερού. Κάθε κιλό αγγουριών απαιτεί 0.75 τ.μ. και 20 λίτρα νερού ενώ για κάθε κιλό πιπεριάς απαιτείται 1 τ.μ. και 5 λίτρα νερού. Επίσης για κάθε κιλό οποιασδήποτε καλλιέργειας απαιτείται 1 κιλό λιπάσματος.

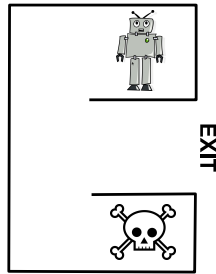
Θεωρήστε ότι η τιμή της ντομάτας, αγγουριού και πιπεριάς είναι 1.5, 1 και 2 ευρώ/κιλό αντίστοιχα.

- (α') (1.5) Είναι βέλτιστο για τον παραγωγό να παράγει μόνο πιπεριές; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
- (β') (0.5) Εάν ο παραγωγός είχε στη διαθεσή του είτε 1 τ.μ. επιπλέον εδάφους είτε 1 λίτρο επιπλέον νερού είτε 1 κιλό επιπλέον λιπάσματος, ποιά από τις τρεις δυνατότητες θα ήταν πιο επικερδής;
2. (7 μονάδες) Ένα ρομπότ βρίσκεται σε ένα λαβύρινθο που αποτελείται από 6 διακριτές θέσεις, από όπου προσπαθεί να βγεί.

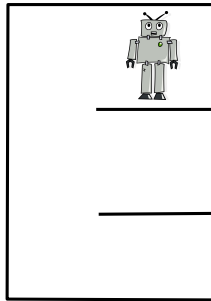


Σε κάθε βήμα το ρομπότ κινείται προς μια από τις διαθέσιμες διπλανές θέσεις με ίση πιθανότητα.

- (α') (0.5) Δώστε μια αλυσίδα Markov που να περιγράφει την κίνηση του ρομπότ.
- (β') (0.5) Βρείτε την πιθανότητα το ρομπότ να βγεί κάποτε από τον λαβύρινθο. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
- (γ') (1.5) Βρείτε το μέσο αριθμό βημάτων μέχρι το ρομπότ να βγεί από τον λαβύρινθο.
- (δ') (1.5) Βρείτε την πιθανότητα να εξέλθει του λαβυρίνθου χωρίς να πέσει στην παγίδα θανάτου, όπως φαίνεται στο σχήμα:



(ε') (1) Εάν η έξοδος κλείσει βρείτε πόσο συχνά περνάει το ρομπότ από κάθε θέση του λαβυρίνθου καθώς κινείται ατέρμονα μέσα σε αυτόν.



(ε') (2) Για τον λαβύρινθο του ερωτήματος (δ') βρείτε την πιθανότητα το ρομπότ να βγεί από αυτόν περνώντας πρώτα από τη θέση δίπλα από την παγίδα θανάτου.

3. (3 μονάδες) Ένας γερο-ληστής στην Άγρια Δύση σκέφτεται πως θα περάσει τις 4 τελευταίες μέρες της ζωής του. Κάθε ημέρα έχει την επιλογή είτε να ληστέψει την (ημερήσια) ταχυδρομική άμαξα από όπου θα πάρει λάφυρα αξίας 2, είτε να μην τη ληστέψει. Εάν ληστέψει τότε μπορεί να πιαστεί και να οδηγηθεί στη φυλακή είτε να μην πιαστεί με ίση πιθανότητα. (Εάν δε ληστέψει τότε δεν κινδυνεύει να πιαστεί.) Εάν οδηγηθεί φυλακή τότε θα μείνει εκεί για όσες μέρες του απομένουν και κάθε ημέρα φυλάκισης του κοστίζει 1 μονάδα.

(α') (0.5) Δώστε μια Μαρκοβιανή διαδικασία απόφασης που να περιγράφει το πρόβλημα.

(β') (1) Βρείτε την πολιτική που ελαχιστοποιεί το μέσο κόστος που συσσωρεύεται στις 4 τελευταίες μέρες του γερο-ληστή.

(γ') (1.5) Θεωρήστε τώρα ότι ο ληστής θα ζήσει για πάντα, όμως δίνει περισσότερο βάρος στο σήμερα από ότι στο αύριο. Συγκεκριμένα, ένα κόστος ή λάφυρο το οποίο αποχτάται την επόμενη ημέρα υποτιμάται κατά ένα συντελεστή $\beta \in (0, 1)$, σε σχέση με αν αυτό λαμβάνονταν σήμερα. Δείξτε ότι η πολιτική που ελαχιστοποιεί το μέσο συσσωρευμένο υποτιμώμενο κόστος είναι ο ληστής να μη ληστεύει καθόλου εάν $\beta \geq 0.8$, ενώ εάν $\beta \leq 0.8$ η βέλτιστη πολιτική είναι πάντα να ληστεύει.