

Ειδικά Θέματα Επιχειρησιακής Έρευνας

Τελική εξέταση, περίοδος Ιανουαρίου 2012.

Διάρκεια: 2 ώρες

Καλή επιτυχία!

1. (2.5 μονάδες) Θεωρήστε το γραμμικό πρόγραμμα:

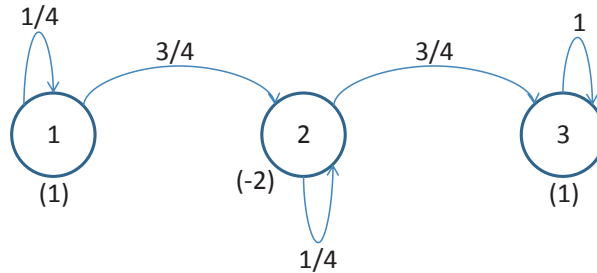
$$\begin{aligned} \max x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 \\ \text{έτσι ώστε } 2x_1 + x_2 - x_3 &\leq 1 \\ -x_1 - x_2 + x_4 &\leq 2 \\ x_1 + 3x_3 + 2x_4 &\leq 4 \\ x_2 + x_3 &\leq 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

- (α') (0.5) Γράψτε το δυϊκό πρόβλημα του παραπάνω γραμμικού προγράμματος.
- (β') (1.5) Επιβεβαιώστε ότι η βέλτιστη λύση είναι η $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 1, x_4 = 1/2$, χωρίς να λύσετε το πρόβλημα με *simplex* ή συγκρίνοντας διαφορετικές βασικές εφικτές λύσεις.
- (γ') (0.5) Ποιά θα είναι η βέλτιστη τιμή εάν ο τελευταίος περιορισμός αλλάξει σε $x_2 + x_3 \leq 3.001$;
2. (2.5 μονάδες) Ένας βάτραχος βρίσκεται στον πάτο ενός πηγαδιού 3 μέτρων. Σε κάθε άλμα που εκτελεί, είτε ανεβαίνει κατά 1 μέτρο (με πιθανότητα 3/4) είτε γλιστράει και πέφτει ξανά στον πάτο.
- (α') (0.2) Δώστε το γράφημα καταστάσεων και πιθανοτήτων μετάβασης μιας αλυσίδας Markov που να περιγράφει την απόσταση του βατράχου από τον πάτο του πηγαδιού.
- (β') (0.3) Θα βγει ποτέ ο βάτραχος από το πηγάδι;
- (γ') (1) Αν βγει, σε πόσα άλματα κατά μέση τιμή θα το έχει καταφέρει;
- (δ') (1) Θεωρήστε ότι η έξοδος στην κορυφή πηγαδιού είναι φραγμένη με αποτέλεσμα ο βάτραχος να πέφτει πίσω στον πάτο όποτε φτάνει στην κορυφή. Από εκεί, συνεχίζει την πορεία του προς την κορυφή όπως παραπάνω, μέχρι να ξαναφτάσει στην κορυφή κοκ.
Κάθε πόσο συχνά βρίσκεται ο βάτραχος στον πάτο του πηγαδιού;
3. (2.5 μονάδες) Η τιμή μιας μετοχής κυμαίνεται μεταξύ των τιμών 0 και 4 σύμφωνα με τον εξής τρόπο: η τιμή μεταβάλλεται κατά 1 κάθε λεπτό της ώρας έτσι ώστε τόσο η αύξηση όσο και η μείωση να είναι ισοπίθανη. Θεωρήστε ότι όταν η τιμή είναι 4, τότε με ίση πιθανότητα η τιμή θα μειωθεί ή θα παραμείνει η ίδια. Παρόμοια, όταν η τιμή είναι 0, στο επόμενο λεπτό η τιμή θα αυξηθεί ή θα μείνει αμετάβλητη με ίση πιθανότητα.
- Υποθέστε ότι αγοράζετε μια μετοχή όταν η τιμή της μετοχής είναι 2. Σε κάθε λεπτό από εκεί και πέρα, αποφασίζετε εάν θα πουλήσετε ή όχι τη μετοχή αυτή (στην τρέχουσα τιμή της στο εκάστοτε λεπτό).
- Ποιό είναι το καλύτερο μέσο κέρδος από τυχόν πώληση της μετοχής που μπορείτε να επιτύχετε στα επόμενα 3 λεπτά; (Κατασκευάστε μια Μαρκοβιανή διαδικασία απόφασης και βρείτε την καλύτερη στρατηγική για τον χρονικό ορίζοντα των επόμενων 3 βημάτων.) Θεωρήστε ότι δε μπορείτε να πουλήσετε τη μετοχή μετά τα 3 λεπτά.

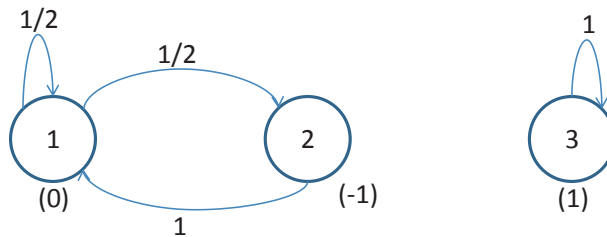
4. (2 μονάδες) Θεωρήστε την παρακάτω Μαρκοβιανή διαδικασία απόφασης:

Υπάρχουν 3 δυνατές καταστάσεις, 1 έως 3 και έχετε στη διάθεσή σας 2 αποφάσεις: την a και b .

Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης που αντιστοιχεί στην απόφαση a είναι:



(Οι αριθμοί στις παρανθέσεις είναι το κόστος που συσσωρεύει σε κάθε βήμα η απόφαση a στην αντίστοιχη κατάσταση.) Παρόμοια, για την απόφαση b έχουμε:



(α') (1) Γράψτε την εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού για το κριτήριο του υποτιμώμενου κόστους, με συντελεστή υποτίμησης $\beta = 1/2$.

(β') (1.5) Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο βελτίωσης πολιτικής, λύστε την εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού που βρήκατε στο προηγούμενο υποερώτημα και βρείτε τη βέλτιστη πολιτική.