

Ειδικά Θέματα Επιχειρησιακής Έρευνας

Επαναληπτική εξέταση

Τρίτη 7/12/10

1. (3 μονάδες.) Θεωρήστε το γραμμικό πρόγραμμα:

$$A: \min_{x_1, x_2} x_1 + x_2$$

$$\text{έτσι ώστε } x_1 + 2x_2 \geq 4$$

$$2x_1 - x_2 \geq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

(α') Γράψτε το δυϊκό πρόβλημα του προγράμματος A χωρίς να το λύσετε.

(β') Βρείτε τη βέλτιστη τιμή και λύση του δυϊκού πρόβληματος.

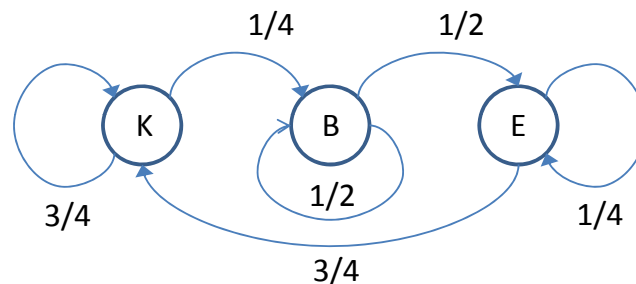
(γ') Στη βέλτιστη λύση του A, ποιοί από τους περιορισμούς του A ικανοποιούνται με ισότητα;

(δ') Ποιά είναι η βέλτιστη τιμή και λύση του A;

(ε') Εάν σας επιτρεπόταν να μειώσετε τα δεξιά μέλη των ανισοτικών περιορισμών (δηλ. το 4 και 1) συνολικά κατά ϵ για μικρό $\epsilon \geq 0$, τότε πόσο θα μειώνατε το καθένα έτσι ώστε η βέλτιστη τιμή του A να γίνει όσο το δυνατόν μικρότερη;

(ς') Γενικότερα, γιατί είναι χρήσιμη η μελέτη του δυϊκού ενός γραμμικού προγράμματος;

2. (3 μονάδες.) Ένα μηχάνημα παραγωγής μπορεί να βρίσκεται σε 3 δυνατές καταστάσεις: κανονική λειτουργία (K), λειτουργία με βλάβη (B) και σε επιδιόρθωση (E). Η ακολουθία καταστάσεων εξελίσσεται στο χρόνο σύμφωνα με την αλυσίδα Markov:



(α') Βρείτε το ποσοστό του χρόνου που το μηχάνημα βρίσκεται σε κάθε κατάσταση εάν παρατηρηθεί για μεγάλο χρονικό διάστημα.

(β') Θεωρήστε ότι κάθε κατάσταση λειτουργίας αποδίδει όφελος ως εξής:

| κατάσταση | ώφελος |
|-----------|------------------------|
| K | $\alpha - 1$ |
| B | $\frac{\alpha}{2} - 2$ |
| E | -3 |

όπου $\alpha > 0$.

Για ποιές τιμές του α αξίζει να λειτουργήσετε το μηχάνημα αυτό; (Θεωρήστε ότι η μη λειτουργία του μηχανήματος έχει μηδενικό όφελος.)

3. (4 μονάδες.) Δίδεται η Μαρκοβιανή διαδικασία απόφασης με σύνολα καταστάσεων $S = \{1, 2\}$ και αποφάσεων $A = \{B, C\}$. Οι στοχαστικοί πίνακες που αντιστοιχούν στις αποφάσεις είναι

$$P_B = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 7/8 & 1/8 \end{pmatrix}, \quad P_C = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/8 & 7/8 \end{pmatrix}.$$

(Για παράδειγμα, εάν στην κατάσταση 1 εφαρμοστεί η απόφαση B τότε η επόμενη κατάσταση είναι η 2, με πιθανότητα $3/4$.)

Στην κατάσταση i η εφαρμογή της απόφασης a έχει κόστος $c(i, a)$ με

$$c(i, a) = \begin{cases} 1 & i = 1, a = B \\ -3 & i = 2, a = B \\ 0 & a = C \end{cases}$$

για κάθε $i \in S, a \in A$.

- (α') Γράψτε την εξίσωση Δυναμικού Προγραμματισμού στην περίπτωση πεπερασμένου χρονικού ορίζοντα, η οποία δίνει το ελάχιστο αναμενόμενο κόστος $V_n(i)$, όταν απομένουν n μεταβάσεις και η αρχική κατάσταση είναι i , ως συνάρτηση των $V_{n-1}(j), j \in S$.
- (β') Υπολογίστε τα $V_3(1), V_3(2)$.
- (γ') Εάν ο χρονικός ορίζοντας είναι $n = 3$ και κάποιος σας πεί ότι η ακολουθία καταστάσεων στα βήματα $0, 1, 2, 3$ ήταν $1, 1, 2, 1$, τότε ποιές αποφάσεις ελήφθησαν στα βήματα $0, 1, 2, 3$ εάν ακολουθήθηκε η βέλτιστη πολιτική;