

Ειδικά Θέματα Επιχειρησιακής Έρευνας

Τελική εξέταση

Πέμπτη 25/6/09

1. (3 μονάδες.) Θεωρήστε το γραμμικό πρόγραμμα:

$$A: \min_{x_1, x_2} 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{έτσι ώστε } x_1 + 3x_2 \geq 6$$

$$x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

(α') Γράψτε το δυικό πρόβλημα του προγράμματος A.

(β') Λύστε το δυικό πρόβλημα.

(γ') Στη βέλτιστη λύση του A, ποιοί από τους περιορισμούς ικανοποιούνται με ισότητα;

(δ') Ποιά είναι η βέλτιστη τιμή και λύση του A;

(ε') Πόσο θα αλλάξει η βέλτιστη τιμή του A εάν ο περιορισμός $x_1 + 3x_2 \geq 6$ αλλάξει σε $x_1 + 3x_2 \geq 6 + \epsilon$ για μικρό $\epsilon \geq 0$;

(ς') Πόσο θα αλλάξει η βέλτιστη τιμή του A εάν η αντικειμενική συνάρτηση αλλάξει σε $(2 + \epsilon)x_1 + 3x_2$ για μικρό $\epsilon \geq 0$;

(ζ') Γενικότερα, γιατί είναι χρήσιμη η μελέτη του δυικού ενός γραμμικού προγράμματος;

2. (2 μονάδες.) Θεωρήστε την αλυσίδα Markov με στοχαστικό πίνακα:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/4 & 5/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(α') Δώστε το γράφημα πιθανοτήτων μετάβασης της αλυσίδας.

(β') Ποιά είναι τα ποσοστά του χρόνου που η αλυσίδα ξοδεύει σε κάθε κατάσταση;

(γ') Θεωρήστε ότι η αλυσίδα περιγράφει τα ημερήσια κέρδη σας στο ηλεκτρονικό πόκερ ως εξής:

κατάσταση	κέρδος
1	-1
2	1
3	2

Εάν σας προσέφεραν μόνιμη εργασία με σταθερό ημερομίσθιο 1.1 θα δεχόσασταν την προσφορά; (Θεωρήστε ότι εφόσον αποφασίσετε να εργάζεστε δεν θα έχετε χρόνο για πόκερ.)

3. (3 μονάδες.) Εργάζεστε σε μια γραμμή συναρμολόγησης όπου κάθε χρονική στιγμή σας προμηθεύουν με έναν τυχαίο αριθμό Μη Συναρμολογημένων Αντικειμένων (ΜΣΑ) που αναμένουν επεξεργασία. Κάθε στιγμή έχετε την επιλογή να αναπαυθείτε (Α) ή να εργαστείτε (Ε). Κάθε φορά που εργάζεστε, ο αριθμός των ΜΣΑ μειώνεται κατά ένα με πιθανότητα $1/2$ εφόσον υπάρχουν ΜΣΑ, ή μένει σταθερός με πιθανότητα $1/2$ (εάν δεν υπάρχουν ΜΣΑ τότε η πιθανότητα αυτή είναι 1). Όταν αναπαύεστε ο αριθμός των ΜΣΑ είτε αυξάνει κατά ένα με πιθανότητα $1/2$, είτε μένει σταθερός με πιθανότητα $1/2$. Πάντως, τα ΜΣΑ δε μπορούν να υπερβούν τα δύο, λόγω φυσικών περιορισμών του χώρου εργασίας. Συνεπώς, ο αριθμός τους μπορεί να είναι 0, 1 ή 2.

Όταν ο αριθμός των ΜΣΑ είναι 0 ή 1, το κόστος της απόφασης Α είναι -1, ενώ όταν τα ΜΣΑ είναι 2, το κόστος αυτό είναι 2. Η απόφαση Ε σας δημιουργεί κόστος 1 για οποιοδήποτε αριθμό ΜΣΑ.

- (α') Δώστε μία Μαρκοβιανή διαδικασία απόφασης (δηλ. πίνακα μετάβασης για κάθε απόφαση και συνάρτηση κόστους) που να περιγράφει τα παραπάνω.
- (β') Γράψτε την εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού για το κριτήριο του σταθμισμένου κόστους, με συντελεστή στάθμισης $\beta = 1/2$.
- (γ') Βρείτε το σταθμισμένο κόστος της πολιτικής που υπαγορεύει να αναπαύεστε μόνο όταν δεν υπάρχουν ΜΣΑ.
- (δ') Η παραπάνω πολιτική είναι η καλύτερη σύμφωνα με το κριτήριο του σταθμισμένου κόστους; Βρείτε τη βέλτιστη πολιτική.
- (ε') Βρείτε την πολιτική που ελαχιστοποιεί το μέσο κόστος.

4. (2 μονάδες.) Λύστε το μη γραμμικό σύστημα εξισώσεων

$$x = \min \left(1 + \frac{x+y}{6}, -1 + \frac{y}{2} \right)$$
$$y = \min \left(-1 + \frac{x+y}{8}, 1 + \frac{x}{2} \right)$$

ως προς $x, y \in \mathbb{R}$, χρησιμοποιώντας τουλάχιστον δύο διαφορετικούς τρόπους λύσης.