

Ειδικά Θέματα Επιχειρησιακής Έρευνας

Τελική εξέταση, περίοδος Σεπτεμβρίου 2011.

Διάρκεια: 2 ώρες

Καλή επιτυχία!

1. (3 μονάδες) Θεωρήστε το γραμμικό πρόγραμμα:

$$\begin{aligned} A: \min_{x_1, x_2} & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{έτσι ώστε} & x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

(α') (0.3) Γράψτε το δυϊκό πρόβλημα του προγράμματος A.

(β') (1) Λύστε το δυϊκό πρόβλημα με τη μέθοδο simplex.

(γ') (0.5) Χωρίς να λύσετε το πρόβλημα A και εξετάζοντας μόνο τη λύση του δυϊκού προβλήματος που βρήκατε στο προηγούμενο υποερώτημα, βρείτε ποιοι από τους περιορισμούς του A ικανοποιούνται με ισότητα στη βέλτιστη λύση του A.

(δ') (0.5) Χωρίς να λύσετε το πρόβλημα A και εξετάζοντας μόνο τη λύση του δυϊκού προβλήματος που βρήκατε στο υποερώτημα (β'), βρείτε τη βέλτιστη τιμή και λύση του A.

(ε') (0.3) Πόσο θα αλλάξει η βέλτιστη τιμή του A εάν ο περιορισμός $x_1 + 3x_2 \geq 6$ αλλάξει σε $x_1 + 3x_2 \geq 6 + \epsilon$ για μικρό $\epsilon \geq 0$;

(ς') (0.4) Πόσο θα αλλάξει η βέλτιστη τιμή του A εάν η αντικειμενική συνάρτηση αλλάξει σε $(2 + \epsilon)x_1 + 3x_2$ για μικρό $\epsilon \geq 0$;

2. (3 μονάδες) Είστε υπεύθυνος επιχειρήσεων μιας εταιρίας πετρελαιοειδών όπου καθημερινά διακινούνται συνολικά 17 τόνοι βενζίνης από τα δυϊλιστήρια Δ1, Δ2 της εταιρίας, προς τρία πρατήρια βενζίνης B1, B2, B3 τα οποία εξυπηρετεί η εταιρία σας. Η ημερήσια ζήτηση στα πρατήρια B1, B2 και B3 είναι τουλάχιστον 5, 4 και 8 τόνοι αντίστοιχα, ενώ τα δυϊλιστήρια Δ1, Δ2 μπορούν να προμηθεύουν καθημερινά το πολύ 10 και 7 τόνους αντίστοιχα.

Το κόστος μεταφοράς (ανά τόνο βενζίνης) από κάθε δυϊλιστήριο σε κάθε πρατήριο δίδεται από τον πίνακα:

	B1	B2	B3
Δ1	3	3	1
Δ2	1	4	1

Βρείτε τον οικονομικότερο τρόπο μεταφοράς βενζίνης από τα δυϊλιστήρια στα πρατήρια έτσι ώστε να ικανοποιούνται όλοι οι περιορισμοί ζήτησης των πρατηρίων και προμηθευτικής δυνατότητας των δυϊλιστηρίων.

Ποιό είναι το ελάχιστο κόστος;

3. (2 μονάδες) Έστω ότι έχετε 2 ευρώ και παίζετε εναντίον κάποιου συμφοιτητή σας (ο οποίος έχει επίσης 2 ευρώ) το εξής παιχνίδι: Ρίχνετε ένα νόμισμα και εάν έρθουν γράμματα ο συμφοιτητής σας σας δίνει ένα ευρώ. Εάν έρθει κορώνα, τότε εσείς δίνετε στον συμφοιτητή σας ένα ευρώ. Το παιχνίδι συνεχίζεται μέχρι κάποιος παίκτης να χάσει όλα του τα χρήματα. Θεωρήστε ότι η πιθανότητα να έρθουν γράμματα είναι $1/3$ και ότι τα τυχαία αποτελέσματα των διαφορετικών ρίψεων είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

(α') (0.8) Ποιά η πιθανότητα να είστε εσείς ο νικητής του παιχνιδιού; (Δηλαδή, να πάρετε τα 2 ευρώ του αντιπάλου σας.)

(β') (0.2) Ποιά η πιθανότητα να είστε εσείς ο νικητής του παιχνιδιού εάν αρχικά έχετε 1 ευρώ και ο αντίπαλός σας 3 ευρώ;

(γ') (1) Πόσες ρίψεις κατά μέσο όρο θα χρειαστούν μέχρι να τελειώσει το παιχνίδι (όταν αρχικά έχετε 2 ευρώ);

4. (2 μονάδες.) Θεωρήστε την αλυσίδα Markov με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/4 & 5/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

(α') (0.1) Σχεδιάστε το γράφημα πιθανοτήτων μετάβασης της αλυσίδας.

(β') (1) Ποιό είναι το ποσοστό του χρόνου που η αλυσίδα βρίσκεται σε κάθε κατάσταση εάν την παρατηρήσουμε για πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα;

(γ') (0.9) Θεωρήστε ότι η αλυσίδα περιγράφει τα ημερήσια κέρδη σας στο ηλεκτρονικό πόκερ ως εξής:

κατάσταση	κέρδος
1	-1
2	1
3	2

Εάν σας προσέφεραν μόνιμη εργασία με σταθερό ημερομίσθιο 1.1 θα δεχόσασταν την προσφορά; (Θεωρήστε ότι αποφασίζετε βάσει της πιο προσοδοφόρας δραστηριότητας από την άποψη του μέσου ημερήσιου προσδοκώμενου κέρδους. Επίσης, θεωρείστε ότι εφόσον αποφασίσετε να εργαστείτε δε θα έχετε χρόνο για πόκερ.)