Ειδικά Θέματα Επιχειρησιακής Έρευνας
Λύσεις 3ης σειράς ασκήσεων*

Άσκηση 1

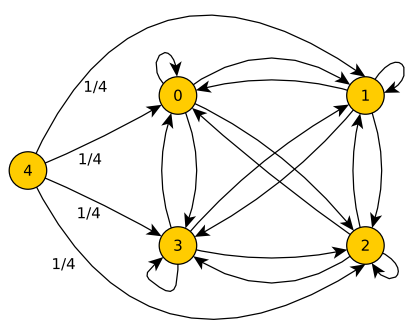
Υποθέστε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα 4 καταστάσεων ($S = \{0, 1, 2, 3\}$) στην οποία προσθέτουμε μια νέα κατάσταση, την 4, από την οποία με ίση πιθανότητα μεταφερόμαστε σε κάθε μια από τις τέσσερις καταστάσεις.

1. Αν αρχικά η στάσιμη κατανομη είναι η $\pi = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12})$ ποια είναι η νέα στάσιμη κατανομή; Υπάρχουν μεταβατικές καταστάσεις (πριν και μετά);

2. Αν αρχικά ο αναμενόμενος αριθμός βημάτων από κάθε κατάσταση προς την 0 δινόταν από το $(T_{10}, T_{20}, T_{30}) = (2, 3, 5)$, ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός βημάτων από κάθε κατάσταση προς την 0 στην καινούρια αλυσίδα;

(Προσπαθείστε οι αποδείξεις σας να είναι αρκετά 'μαθηματικές.')

Λύση: Ας υποθέσουμε οτι οι πιθανότητες μετάβασης από την κατάσταση i στην κατάσταση j, για $0 \le i, j \le 3$, αρχικά ήταν p_{ij}. Η αλυσίδα μετά την προσθήκη της κατάστασης 4 μοιάζει κάπως έτσι



1) Αρχικά, οι συντεταγμένες του διανύσματος της στάσιμης κατανομής $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12})$ ικανοποιούσαν τις εξισώσεις

$$\begin{aligned}
1 &= \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \\
\pi_0 &= \textstyle\sum_{j=0}^{3} p_{j0}\pi_j \\
\pi_1 &= \textstyle\sum_{j=0}^{3} p_{j1}\pi_j \\
\pi_2 &= \textstyle\sum_{j=0}^{3} p_{j2}\pi_j \\
\pi_3 &= \textstyle\sum_{j=0}^{3} p_{j3}\pi_j
\end{aligned}$$

*Βασισμένες (εν μέρει) σε λύσεις του συμφοιτητή σας Μιχαήλ Βαζαίου.

Μετά την προσθήκη της κατάστασης 4 αυτές αλλάζουν σε

$$\begin{array}{rcl} 1 &=& \pi_0+\pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4 \\ \pi_0 &=& \sum_{j=0}^{3} p_{j0}\pi_j + \frac{1}{4}\pi_4 \\ \pi_1 &=& \sum_{j=0}^{3} p_{j1}\pi_j + \frac{1}{4}\pi_4 \\ \pi_2 &=& \sum_{j=0}^{3} p_{j2}\pi_j + \frac{1}{4}\pi_4 \\ \pi_3 &=& \sum_{j=0}^{3} p_{j3}\pi_j + \frac{1}{4}\pi_4 \\ \pi_4 &=& 0 \quad \text{(αφού 4 χωρίς εισερχόμενες ακμές)} \end{array}$$

που όμως μετά την αντικατάσταση του $\pi_4 = 0$ δίνει ακριβώς το ίδιο σύστημα με πριν και άρα την ίδια λύση. Οπότε η στάσιμη κατανομή της καινούριας αλυσίδας είναι η

$$\pi' = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, 0)$$

Η 4 είναι μεταβατκή κατάσταση αφού ανεξαρτήτως σημείου εκκίνησης μετά το 1ο κιόλας βήμα δεν ξαναεμφανίζεται. Οι υπόλοιπες καταστάσεις είναι επανερχόμενες, με την στάσιμη κατανομή να καθορίζει την συχνότητα εμφάνισής τους!

2) Αρχικά, οι συντεταγμένες του διανύσματος που περιέχει τον αναμενόμενο αριθμό βημάτων από καθε κατάσταση προς την 0: $(T_{10}, T_{20}, T_{30}) = (2, 3, 5)$, ικανοποιούσαν τις εξισώσεις

$$\begin{array}{rcl} T_{00} &=& 0 \\ T_{10} &=& 1+\sum_{j=0}^{3} p_{1j}T_{j0} \\ T_{20} &=& 1+\sum_{j=0}^{3} p_{2j}T_{j0} \\ T_{30} &=& 1+\sum_{j=0}^{3} p_{3j}T_{j0} \end{array}$$

Μετά την προσθήκη της κατάστασης 4 αυτές αλλάζουν σε

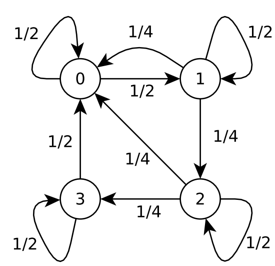
$$\begin{array}{rcl} T_{00} &=& 0 \\ T_{10} &=& 1+\sum_{j=0}^{3} p_{1j}T_{j0} + 0 * T_{40} \\ T_{20} &=& 1+\sum_{j=0}^{3} p_{2j}T_{j0} + 0 * T_{40} \\ T_{30} &=& 1+\sum_{j=0}^{3} p_{3j}T_{j0} + 0 * T_{40} \\ T_{40} &=& 1+\sum_{j=0}^{3} p_{4j}T_{j0} \end{array}$$

Όμως οι 4 πρώτες είναι στην ουσία ίδιες με πριν και δίνουν $(T_{10}, T_{20}, T_{30}) = (2, 3, 5)$, από όπου χρησιμοποιώντας την τελευταία εξίσωση παίρνουμε $T_{40} = 1 + \frac{1}{4}T_{10} + \frac{1}{4}T_{20} + \frac{1}{4}T_{30} = \frac{7}{2}$. Στην καινούρια αλυσίδα λοιπόν έχουμε σαν διάνυσμα που περιέχει τον αναμενόμενο αριθμό βημάτων προς την 0 το

$$(T_{10}, T_{20}, T_{30}, T_{40}) = (2, 3, 5, 7/2)$$

Άσκηση 2

Για την Μαρκοβιανή αλυσίδα του σχήματος,



1. Με πόση πιθανότητα μετά από 4 βήματα βρισκόμαστε στην κατάσταση 1 (i) ξεκινώντας από την κατάσταση 2 και (ii) ξεκινώντας από την κατάσταση 3;
2. Ποια η πιθανότητα ξεκινώντας από την κατάσταση 2 κάποτε να βρεθούμε στην κατάσταση 1;
3. Μπορεί το διάνυσμα $\pi = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3})$ να περιγράφει τη στάσιμη κατανομή της αλυσίδας;

Λύση: 1. Με βάση τον τύπο $Pr[X_n = j|X_0 = i] = \sum_{k \in S} p_{ik} Pr[X_{n-1} = j|X_0 = k]$ υπολογίζουμε τα $Pr[X_4 = 1|X_0 = 2]$ και $Pr[X_4 = 1|X_0 = 3]$:

Τελ. Κατ.	$X_0 = 0$	$X_0 = 1$	$X_0 = 2$	$X_0 = 3$
$X_0 = 1$	0	1	0	0
$X_1 = 1$	1/2	1/2	0	0
$X_2 = 1$	1/2	3/8	1/8	1/4
$X_3 = 1$	7/16	11/32	1/4	3/8
$X_4 = 1$			21/64	13/32

Ενδεικτικά κάποιοι υπολογισμοί

$$Pr[X_2 = 1|X_0 = 1] = \frac{1}{4}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{4}0 + 0\,0 = \frac{3}{8}$$

$$Pr[X_3 = 1|X_0 = 3] = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + 0\frac{3}{8} + 0\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

$$Pr[X_4 = 1|X_0 = 2] = \frac{1}{4}\frac{7}{16} + 0\frac{11}{32} + \frac{1}{2}\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{3}{8} = \frac{21}{64}$$

Η απάντηση στο (i) είναι 21/64 και στο (ii) είναι 13/32.

Εναλλακτικά μπορούμε να υψώσουμε τον πίνακα μεταβάσεων της αλυσίδας στην 4η δύναμη (π.χ. με χρήση κώδικα σε *python*) και να δούμε τα στοιχεία στις μαρκαρισμένες θέσεις:

```
In [1]: import numpy as np
```

```
In [2]: x = np.array([
            [0.5, 0.5, 0, 0],
            [1/4, 1/2, 1/4, 0],
            [1/4, 0, 1/2, 1/4],
            [1/2, 0, 0, 1/2]
        ])
```

```
In [3]: np.linalg.matrix_power(x, 4)

Out[3]: array([[0.34375  , 0.390625 , 0.203125 , 0.0625   ],
               [0.359375 , 0.34375  , 0.1953125, 0.1015625],
               [0.3984375, 0.328125 , 0.140625 , 0.1328125],
               [0.390625 , 0.40625  , 0.125    , 0.078125 ]])
```

2. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι 1 αφού έχουμε συνδεδεμένη αλυσίδα.

3. Όχι, το διάνυσμα $\pi = (1/2, 0, 1/6, 1/3)$ δεν μπορεί να περιγράφει την στάσιμη κατανομή της αλυσίδας αφού έχει 0 σε κάποια θέση του. Εφόσον η αλυσίδα είναι συνδεδεμένη, η πιθανότητα επιστροφής θα είναι 1 για κάθε

κατάσταση και άρα η αλυσίδα θα βρίσκεται σε κάθε κατάσταση για μη μηδενικό ποσοστό n βημάτων καθώς $n \to \infty$. Εναλλακτικά, μπορούμε να δείξουμε οτι κάποια από τις εξισώσεις ισορροπίας δεν ικανοποιείται, π.χ. η

$$\pi_1 = \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{1}{2}\pi_1 \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}0 = \frac{1}{4}$$

Στην χειρότερη περίπτωση μπορούμε απλά να βρούμε τη στάσιμη κατανομή της αλυσίδας και να δούμε οτι διαφέρει (βγαίνει $\pi' = (4/11, 4/11, 2/11, 1/11)$).

Άσκηση 3

Κάθε χρόνο, την 31η του Δεκέμβρη φυτεύετε 3 μαγικούς σπόρους. Κάθε ένας από τους σπόρους, αν δεν έχει φυτρώσει ακόμη, φυτρώνει την επόμενη μέρα το πρωί με πιθανότητα 1/2.

1. Ποια η πιθανότητα να φυτρώσουν όλοι οι σπόροι την 1η Γενάρη, δηλαδή την 1η μέρα;
2. Ποια η πιθανότητα να μην φυτρώσει κανένας σπόρος πριν την 5η μέρα;
3. Ποια η πιθανότητα την 3η μέρα να έχουν φυτρώσει τουλάχιστον 3 σπόροι;

Αν κάποια νύχτα χιονίσει, όσοι σπόροι δεν έχουν φυτρώσει τις προηγούμενες μέρες καταστρέφονται. Αν κάθε νύχτα χιονίζει με πιθανότητα 1/2:

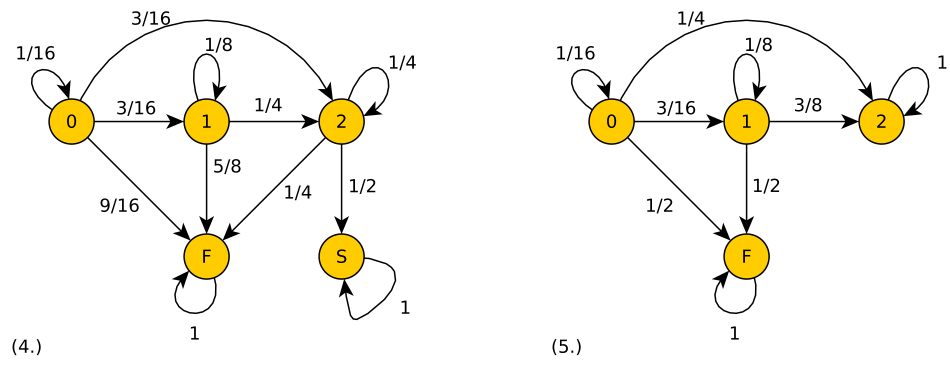
4. Με τι πιθανότητα θα φυτρώσουν ακριβώς 2 σπόροι;
5. Με τι πθανότητα θα φυτρώσουν τουλάχιστον 2 σπόροι;

Λύση: 1. Η πιθανότητα να φυτρώσουν και οι τρεις σπόροι την πρώτη μέρα είναι $(1/2)^3 = 1/8$.

2. Για κάθε σπόρο η πιθανότητα να μην φυτρώσει πριν την 5η μέρα (δηλαδή να μην φυτρώσει μέσα στις 4 πρώτες μέρες) είναι $(1 - \frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$. Άρα η πιθανότητα να μην φυτρώσει κανένας από τους 3 σπόρους τις 4 πρώτες μέρες (πριν την 5η μέρα) είναι $(1/16)^3 = 1/4096$. Εναλλακτικά, κάθε μέρα φυτρώνουν 0 σπόροι με πιθανότητα $(1 - \frac{1}{2})^3 = (\frac{1}{2})^3$. Αυτό συμβαίνει τέσσσερις συνεχόμενες φορές με πιθανότητα $((\frac{1}{2})^3)^4$

3. Εφόσον έχουμε 3 σπόρους, το 'τουλάχιστον 3 σπόροι' σημαίνει 'ακριβώς 3 σπόροι'. Κάθε σπόρος φυτρώνει μέσα στις 3 πρώτες μέρες με πιθανότητα $1 - (1 - 1/2)^3 = 1 - 1/8 = 7/8$. Άρα η πιθανότητα να φυτρώσουν και οι 3 σπόροι τις τρεις πρώτες μέρες είναι $(7/8)^3 = 343/512$.

4. Μπορούμε να φτιάξουμε μια μαρκοβιανή αλυσίδα που να μοντελοποιεί το πρόβλημα, όπως αυτή στο αριστερό σχήμα



Επεξήγηση:

- Το 0 αντιστοιχεί σε 0 φυτρωμένους σπόρους και όχι βροχή

- Το 1 αντιστοιχεί σε 1 φυτρωμένο σπόρο και όχι βροχή
- Το 2 αντιστοιχεί σε 2 φυτρωμένους σπόρους και όχι βροχή
- Το F αντιστοιχεί σε έχει βρέξει και όχι ακριβώς 2 φυτρωμένοι σπόροι
- Το S αντιστοιχεί σε έχει βρέξει και ακριβώς 2 φυτρωμένοι σπόροι

Οι πιθανότητες μετάβασης βγαίνουν από τα δεδομένα του προβλήματος. Π.χ. για την κατάσταση 0:

- ακμή (0,0): Δεν βρέχει και δεν φυτρώνει κανένας σπόρος την επόμενη μέρα με πιθανότητα $\frac{1}{2}\frac{1}{8} = 1/16$
- ακμή (0,1): Δεν βρέχει και φυτρώνει ακριβώς ένας σπόρος την επόμενη μέρα με πιθανότητα $\frac{1}{2}3\frac{1}{8} = \frac{3}{16}$
- ακμή (0,2): Δεν βρέχει και φυτρώνουν ακριβώς δυο σπόροι την επόμενη μέρα με πιθανότητα $\frac{1}{2}3\frac{1}{8} = \frac{3}{16}$
- ακμή (0,F): Βρέχει ή δεν βρέχει και φυτρώνουν και οι τρεις σπόροι με πιθανότητα $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{8} = \frac{9}{16}$

Η αλυσίδα θα καταλήξει στην F ή στη S. Αυτό που ζητά η άσκηση είναι με τι πιθανότητα ξεκινώντας από την 0 θα καταλήξουμε στην S, το f_{0S}. Ισχύουν οι τύποι (από θεωρία)

$$\begin{array}{rcl} f_{0S} &=& \frac{1}{16}f_{0S} + \frac{3}{16}f_{1S} + \frac{3}{16}f_{2S} + \frac{9}{16}f_{FS} \\ f_{1S} &=& \frac{1}{8}f_{1S} + \frac{1}{4}f_{2S} + \frac{5}{8}f_{FS} \\ f_{2S} &=& \frac{1}{4}f_{2S} + \frac{1}{4}f_{FS} + \frac{1}{2}f_{SS} \\ f_{FS} &=& 0 \\ f_{SS} &=& 1 \end{array}$$

που έχει σαν λυση το διάνυσμα

$$(f_{0S}, f_{1S}, f_{2S}, f_{FS}, f_{SS}) = (\frac{6}{35}, \frac{4}{21}, \frac{2}{3}, 0, 1)$$

και άρα θα φυτρώσουν ακριβώς 2 σπόροι (σε άπειρο ορίζοντα) με πιθανοτητα $\frac{6}{35}$

5. Όμοια, μπορούμε να φτιάξουμε μια μαρκοβιανή αλυσίδα που να μοντελοποιεί το πρόβλημα, όπως αυτή στο δεξί σχήμα που είναι και λίγο πιο απλή. Επεξήγηση καταστάσεων:

- Το 0 αντιστοιχεί σε 0 φυτρωμένους σπόρους και όχι βροχή
- Το 1 αντιστοιχεί σε 1 φυτρωμένο σπόρο και όχι βροχή
- Το 2 αντιστοιχεί σε ≥ 2 φυτρωμένους σπόρους ανεξαρτήτως βροχής
- Το F αντιστοιχεί σε έχει βρέξει και < 2 φυτρωμένοι σπόροι

Οι πιθανότητες μετάβασης βγαίνουν από τα δεδομένα του προβλήματος όμοια με πριν.

Η αλυσίδα θα καταλήξει στην F ή στη 2. Αυτό που ζητά η άσκηση είναι με τι πιθανότητα ξεκινώντας από την 0 θα καταλήξουμε στην 2, το f_{02}. Ισχύουν οι τύποι (από θεωρία)

$$\begin{array}{rcl} f_{02} &=& \frac{1}{16}f_{02} + \frac{3}{16}f_{12} + \frac{1}{4}f_{22} + \frac{1}{2}f_{F2} \\ f_{12} &=& \frac{1}{8}f_{12} + \frac{3}{8}f_{22} + \frac{1}{2}f_{F2} \\ f_{22} &=& 1 \\ f_{F2} &=& 0 \end{array}$$

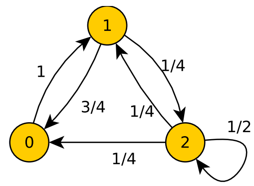
που έχει σαν λυση το διάνυσμα

$$(f_{02}, f_{12}, f_{22}, f_{F2}) = (\frac{37}{105}, \frac{3}{7}, 1, 0)$$

και άρα θα φυτρώσουν τουλάχιστον 2 σπόροι (σε άπειρο ορίζοντα) με πιθανότητα $\frac{37}{105}$

Άσκηση 4

Για την Μαρκοβιανή αλυσίδα του σχήματος



1. Βρείτε την στάσιμη κατανομή
2. Δώστε τον πίνακα μετάβασης και γράψτε πρόγραμμα που τον χρησιμοποιεί και βρίσκει τον πίνακα με τις πιθανότητες για κάθε κατάσταση να βρεθούμε σε οποιαδήποτε άλλη μετά από (α) 5, (β) 10, (γ) 20 και (δ) 100 βήματα.

   (Δώστε και τους τελικούς πίνακες)
3. Ξεκινώντας από την κατάσταση 0, γράψτε πρόγραμμα που προσομειώνει ('τρέχει') την αλυσίδα για 100 βήματα. Ενσωματώστε αυτό το πρόγραμμα σε ένα άλλο που κάνει (α) 1000, (β) 10000 και (γ) 100000 τέτοιες προσομειώσεις και σημειώστε για κάθε μια από τις περιπτώσεις πόσες προσομειώσεις κατέληξαν στην κατάσταση 0, πόσες στην 1 και πόσες στην 2.

Πώς σχετίζονται τα παραπάνω;

Λυση: 1. Η αλυσίδα είναι συνδεδεμένη και απεριοδική (σίγουρα λόγω *self-loop*) οπότε υπάρχει (μοναδική) στάσιμη κατανομή και για να την βρούμε λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= \tfrac{3}{4}\pi_1 + \tfrac{1}{4}\pi_2 \\
\pi_1 &= \pi_0 + \tfrac{1}{4}\pi_2 \\
\pi_2 &= \tfrac{1}{4}\pi_1 + \tfrac{1}{2}\pi_2 \\
1 &= \pi_0 + \pi_1 + \pi_2
\end{aligned}$$

το οποίο δίνει λύση $(\pi_0, \pi_1, \pi_2) = (7/19, 8/19, 4/19)$.

2. Ο πίνακας μεταβάσεων της αλυσίδας είναι ο:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Για να βρούμε τις πιθανότητες από μια κατάσταση i να πάμε σε μια κατάσταση j σε n βήματα αρκεί να υψώσουμε τον P στη n-οστή και να πάρουμε το στοιχείο στη γραμμή i και στήλη j του P^n. Αυτό κάνουμε και στο πρόγραμμα μας το οποίο απλά υψώνει πίνακες σε δυνάμεις (5η 10η 20η και 100η δύναμη) και τους τυπώνει. Ενδεικτικός κώδικας για *matlab* ή *Octave* βρίσκεται στο τέλος της λύσης. Τα παρακάτω παρήχθησαν με *python*.
Για $n = 5$:

```
Πιθανότητες μεταβάσεων σε 5 βήματα:
[[0.13671875 0.70703125 0.15625   ]
 [0.56933594 0.17578125 0.25488281]
 [0.37207031 0.41113281 0.21679688]]
```

Για $n = 10$:

```
Πιθανότητες μεταβάσεων σε 10 βήματα:
[[0.4793663  0.28518677 0.23544693]
 [0.27275181 0.53822803 0.18902016]
 [0.36560535 0.42446709 0.20992756]]
```

Για $n = 20$:

```
Πιθανότητες μεταβάσεων σε 20 βήματα:
[[0.39365792 0.39014391 0.21619817]
 [0.34665748 0.44770746 0.20563506]
 [0.36778369 0.42183323 0.21038307]]
```

Για $n = 100$:

```
Πιθανότητες μεταβάσεων σε 100 βήματα:
[[0.36842123 0.42105241 0.21052636]
 [0.3684209  0.42105282 0.21052628]
 [0.36842105 0.42105264 0.21052631]]
```

3. Κώδικας για *Matlab/Octave* παρατίθεται στο τέλος. Στις παρακάτω εικόνες παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων σε *python*:

α) Για 1000 προσομοιώσεις:

```
Performed  1000  simulations.
372  ended in state 0
418  ended in state 1
210  ended in state 2
```

β) Για 10000 προσομοιώσεις:

```
Performed  10000  simulations.
3741  ended in state 0
4206  ended in state 1
2053  ended in state 2
```

γ) Για 100000 προσομοιώσεις:

```
Performed  100000  simulations.
36739  ended in state 0
42312  ended in state 1
20949  ended in state 2
```

Τα παραπάνω σχετίζονται ως εξής:

Όσο αυξάνεται ο αριθμός των βημάτων στο 2ο ερώτημα, η κάθε γραμμή του πίνακα πλησιάζει την στάσιμη κατανομή (και οι γραμμές του πίνακα γίνονται σχεδόν ίσες). Ουσιαστικά όσο αυξάνονται τα βήματα τόσο λιγότερη σημασία έχει το από που ξεκινήσαμε και τόσο πιο κοντά παμε στην στάσιμη κατανομή.

Για το 3ο ερώτημα, τρέχοντας μια προσομείωση 100 βημάτων βρισκόμαστε στην εκάστοτε κατάσταση με πιθανότητες περίπου ίσες με αυτές της στάσιμης κατανομής (για 'άπειρα βήματα' θα ήταν ακριβώς). Όσο περισσότερες προσομειώσεις κάνουμε και μετρήσουμε το ποσοστό αυτών που καταλήγουν στην εκάστοτε κατάσταση, τόσο περισσότερο αυτό το ποσοστό πλησιάζει την στάσιμη κατανομή (λόγω νόμου μεγάλων αριθμών). Π.χ. στο πιο πάνω πείραμα με 100.000 προσομειώσεις έχουμε τους λόγους

$$(\frac{36739}{100000}, \frac{42312}{100000}, \frac{20949}{100000}) \approx (7/19, 8/19, 4/19)$$

Κώδικας για *Matlab/Octave* για το 2ο και 3ο ερώτημα:

```
A=[[0 1 0]; [0.75 0 0.25]; [0.25 0.25 0.5]];
B=[[1 0 0];[0 1 0];[0 0 1]];
for i=1:100;
B=A*B;
if i==5 B end;
if i==10 B end;
if i==20 B end;
end;
B
s=[0 0 0];
for j=1:100000
p=1;
for i=1:100
r=rand;
switch p
case 1
p=2;
case 2
if r<0.75
p=1;
else
p=3;
end;
case 3
if r<0.25
p=1;
elseif r<0.5
p=2;
else
p=3;
end;
end;
end;
s(p)++;
if j==1000 s end;
if j==10000 s end;
end;
s
```